

Systèmes dynamiques non lisses. Feuille 1

V. Acary.

vincent.acary@inria.fr

2021–2022

Exercice 1. Frottement de Coulomb

On considère le système mécanique décrit sur la Figure 1. Il s'agit d'un bloc rigide de masse m en contact sur une table rigide et fixe, soumis à la gravité et à une force extérieure F . On définit un repère $(0, \mathbf{n}, \mathbf{t})$ donné par la direction normale à la table \mathbf{n} et la direction tangente \mathbf{t} . On suppose que le bloc ne peut pas tourner et qu'il est décrit par la position du centre gravité $q = [q_T, q_N] \in \mathbb{R}^2$ et sa vitesse $v = [v_T, v_N] \in \mathbb{R}^2$.

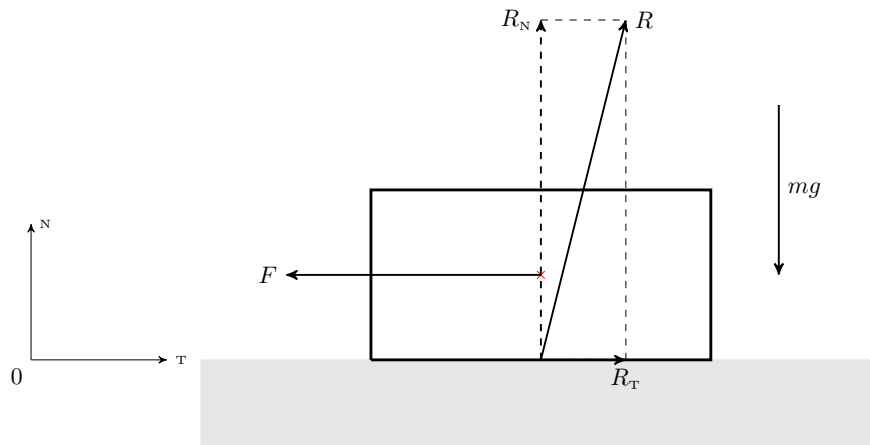


FIGURE 1 – Un bloc rigide avec frottement de Coulomb

Le table exerce une force de réaction $R = [R_T, R_N] \in \mathbb{R}^2$ sur le bloc. La force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de glissement, est décrit par le modèle de Coulomb qui s'écrit en cas de glissement :

$$\text{si } v_T \neq 0, \quad |R_T| = \mu R_N, \quad \frac{R_T}{|R_T|} = -\frac{v_T}{|v_T|} \quad (1)$$

où μ est le coefficient de frottement que nous supposons strictement positif $\mu > 0$.

Dans la suite, on cherchera une solution $q(t), v(t)$ continue par rapport au temps.

Modèle naïf de frottement sans glissement

On suppose dans cette partie que la force tangente R_T en cas de non-glissement est nulle.

$$\text{si } v_T = 0, \quad R_T = 0 \quad (2)$$

1. Représenter le graphe du modèle de frottement R_T en fonction de v_T .
2. Écrire les équations du mouvement du bloc en supposant que le bloc est à l'équilibre suivant la direction normale.
3. Pour $F(t) = 0$ et $q_T(0) = 0, v_T(0) = v_0 > 0$, calculer le mouvement du bloc.
4. Pour $F(t) = a > 0$ et $q_T(0) = 0, v_T(0) = v_0 > 0$, calculer le mouvement du bloc.
5. Pour $F(t) = t$ et $q_T(0) = 0, v_T(0) = 0$, calculer le mouvement du bloc.
6. Que peut on conclure sur l'existence de solution pour un tel modèle ?

Modèle de Coulomb de frottement sans glissement

Le modèle de frottement de Coulomb en cas de non glissement s'exprime :

$$\text{si } v_T = 0, \quad |R_T| \leq \mu R_N. \quad (3)$$

1. Représenter le graphe du modèle de frottement R_T en fonction de v_T .
2. Pour $F(t) = a > 0$ et $q_T(0) = 0, v_T(0) = v_0 > 0$, calculer le mouvement du bloc.
3. Pour $F(t) = t$ et $q_T(0) = 0, v_T(0) = 0$, calculer le mouvement du bloc.

Modèle de Coulomb de frottement linéaire par morceaux

On suppose un modèle de Coulomb linéaire par morceaux, continu et simplement valué est donné par :

$$\begin{aligned} \text{si } |R_T| \leq \mu R_N, R_T &= -cv_T, \\ \text{sinon } |R_T| &= \mu R_N, \quad \frac{R_T}{|R_T|} = -\frac{v_T}{|v_T|} \end{aligned} \quad (4)$$

1. Représenter le graphe du modèle de frottement linéaire par morceaux R_T en fonction de v_T .
2. Pour $F(t) = t$ et $q_T(0) = 0, v_T(0) = 0$, calculer le mouvement du bloc.

Exercice 2. Circuits avec une diode

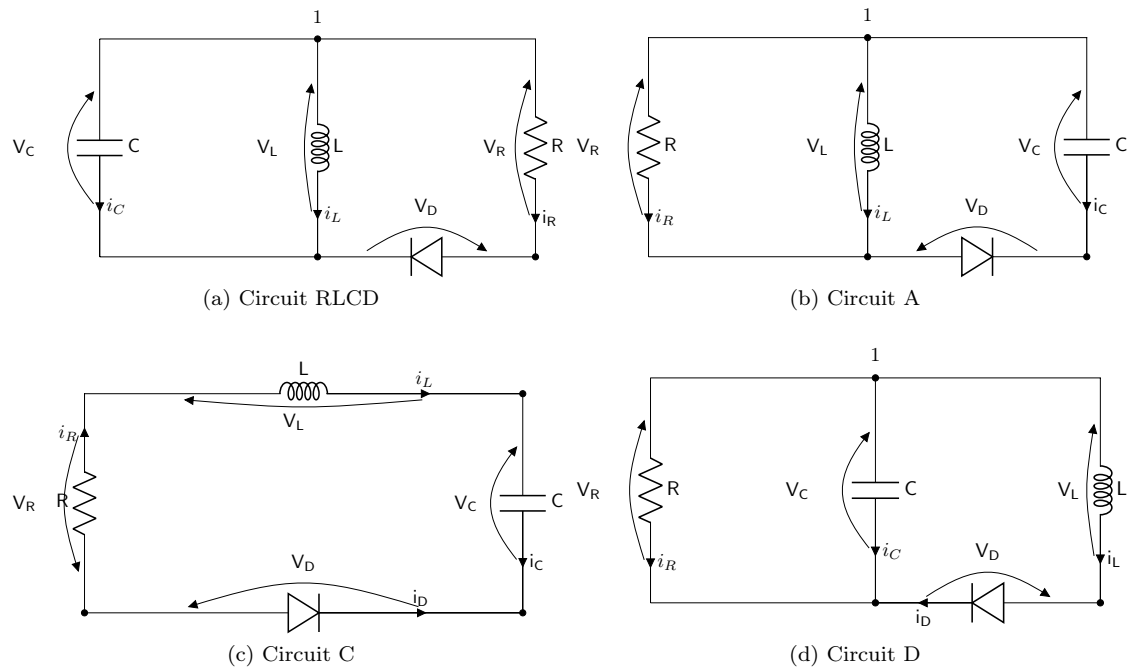


FIGURE 2 – Circuits simples avec une diode

Circuit A

1. Mettre sous forme de LCS les équations du Circuit A.
2. Quelles sont les conditions initiales admissibles ?
3. Quelle est la nature des solutions du problème de Cauchy (régularité, existence, unicité) ?

Circuit C

1. Mettre sous forme de LCS les équations du Circuit C.
2. Quelles sont les conditions initiales admissibles ?
3. Quelle est la nature des solutions du problème de Cauchy (régularité, existence, unicité) ?

Circuit D

1. Mettre sous forme de LCS les équations du Circuit D.
2. Quelles sont les conditions initiales admissibles ?
3. Quelle est la nature des solutions du problème de Cauchy (régularité, existence, unicité) ?