Systèmes dynamiques non lisses. Feuille 1

V. Acary.
vincent.acary@inria.fr

2018–2019

Exercice 1. Frottement de Coulomb

On considère le système mécanique décrit sur la Figure 1. Il s'agit d'un bloc rigide de masse m en contact sur une table rigide et fixe, soumis a la gravité et à une force extérieure $F(t)$. On définit un repère $(0, \mathrm{N}, \mathrm{T})$ donné par la direction normale à la table N et la direction tangente T. On suppose que le bloc ne peut pas tourner et qu'il est décrit par la position du centre gravité $q = [q_{\mathrm{T}}, q_{\mathrm{N}}] \in \mathbb{R}^2$ et sa vitesse $v = [v_{\mathrm{T}}, v_{\mathrm{N}}] \in \mathbb{R}^2$.

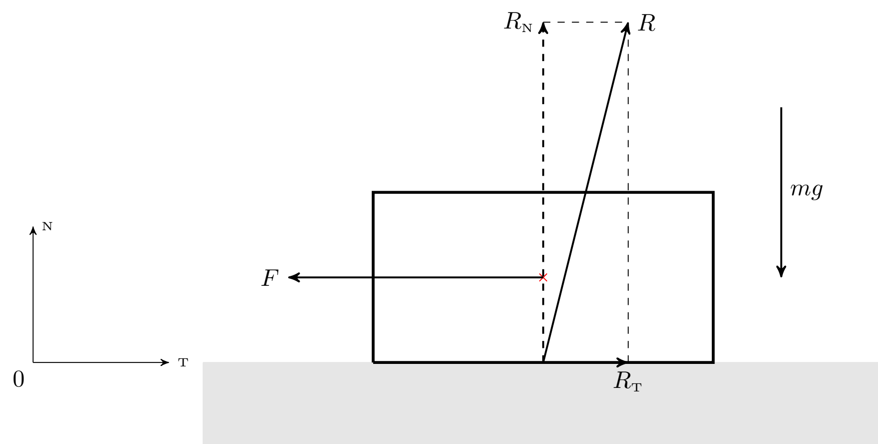


Figure 1 – Un bloc rigide avec frottement de Coulomb

Le table exerce une force de réaction $R = [R_{\mathrm{T}}, R_{\mathrm{N}}] \in \mathbb{R}^2$ sur le bloc. La force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de glissement, est décrit par le modèle de Coulomb qui s'écrit en cas de glissement :

$$\text{si } v_{\mathrm{T}} \neq 0, \quad |R_{\mathrm{T}}| = \mu R_{\mathrm{N}}, \quad \frac{R_{\mathrm{T}}}{|R_t|} = -\frac{v_{\mathrm{T}}}{|v_{\mathrm{T}}|} \tag{1}$$

où μ est le coefficient de frottement que nous supposerons strictement positif $\mu > 0$.

Modèle naïf de frottement sans glissement

On suppose dans cette partie que la force tangente R_{T} en cas de non-glissement est nulle.

$$\text{si } v_{\mathrm{T}} = 0, \quad R_{\mathrm{T}} = 0 \tag{2}$$

1. Représenter le graphe du modèle de frottement R_{T} en fonction de v_{T}.
2. Écrire les équations du mouvement du bloc en supposant que le bloc est à l'équilibre suivant la direction normale.

   Equation du mouvement :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_{\mathrm{N}}(t) &= -mg + R_{\mathrm{N}}(t) \\ m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) &= F(t) + R_{\mathrm{T}}(t) \end{aligned} \tag{3}$$

   Equilibre normal :

$$0 = q_{\mathrm{N}}(t) = -mg + R_{\mathrm{N}}(t) \implies R_{\mathrm{N}}(t) = mg \tag{4}$$

3. Pour $F(t) = 0$ et $q_{\mathrm{T}}(0) = 0, v_{\mathrm{T}}(0) = v_0 > 0$, calculer le mouvement du bloc.
   $v_0 > 0 \implies R_{\mathrm{T}}(t) = -\mu R_{\mathrm{N}}(t) = -\mu mg$ pour $t \in [0, t_*]$
   Integration de l'équation tangentielle :

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) &= -\mu mg \\ \dot{q}_{\mathrm{T}}(t) &= -\mu gt + v_0 \\ q_{\mathrm{T}}(t) &= -\frac{1}{2}\mu gt^2 + v_0 t \end{aligned} \tag{5}$$

   $v(t) > 0$ pour $t \in [0, t_*]$ tel que

$$\dot{q}_{\mathrm{T}}(t_*) = 0 \implies -\mu gt_* + v_0 = \implies t_* = \frac{v_0}{\mu g} \tag{6}$$

   Pour $t > t_*$, plusieurs cas
   a) $v_{\mathrm{T}}(t) > 0, R_{\mathrm{T}}(t) = -\mu mg \implies m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = -\mu mg \implies \ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) < 0$. Impossible
   b) $v_{\mathrm{T}}(t) < 0, R_{\mathrm{T}}(t) = \mu mg \implies m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = \mu mg \implies \ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) > 0$. Impossible
   c) $v_{\mathrm{T}}(t) = 0, R_{\mathrm{T}}(t) = 0 \implies m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = 0 \implies \ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = 0$. seule solution possible

4. Pour $F(t) = a > 0$ et $q_{\mathrm{T}}(0) = 0, v_{\mathrm{T}}(0) = v_0 > 0$, calculer le mouvement du bloc.
   Comme $v_0 > 0$, on suppose que $v_{\mathrm{T}}(t) > 0, R_{\mathrm{T}}(t) = -\mu mg$ pour $t \in [t, t_*]$. cela implique $m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = a - \mu mg$.

$$mv_{\mathrm{T}}(t) = (a - \mu mg)t + mv_0 \tag{7}$$

   Si $(a - \mu mg) \geqslant 0$, $v_t(t) > v_0 > 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Glissement permanent
   Si $(a - \mu mg) < 0$, il existe t_* tel que

$$mv_{\mathrm{T}}(t_*) = 0 = (a - \mu mg)t + mv_0 \implies t_* = \frac{-mv_0}{a - \mu mg} > 0 \tag{8}$$

   Plusieurs cas pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$:
   a) $v_{\mathrm{T}}(t) < 0, R_{\mathrm{T}}(t) = \mu mg$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$

$$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = a + \mu mg \implies \mathsf{m}v_{\mathrm{T}}(t) = (a + \mu mg)t + C \tag{9}$$

$$C = -(a + \mu mgt_*) \tag{10}$$

$$mv_{\mathrm{T}}(t) = (a + \mu mg)(t - t_*) \tag{11}$$

   $mv_{\mathrm{T}}(t) > 0$ pour $t > t_*$ Contradiction.
   b) $v_{\mathrm{T}}(t) > 0, R_{\mathrm{T}}(t) = -\mu mg$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$

$$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = a - \mu mg \implies \mathsf{m}v_{\mathrm{T}}(t) = (a - \mu mg)t + C \tag{12}$$

$$C = -(a - \mu mgt_*) \tag{13}$$

$$mv_{\mathrm{T}}(t) = (a - \mu mg)(t - t_*) \tag{14}$$

   $mv_{\mathrm{T}}(t) < 0$ pour $t > t_*$ puisque $(a - \mu mg) < 0$. Contradiction.
   c) $v_{\mathrm{T}}(t) = 0, R_{\mathrm{T}}(t) = 0$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$

$$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = a \implies \mathsf{m}v_{\mathrm{T}}(t) = a(t - t_*) \tag{15}$$

   $mv_{\mathrm{T}}(t) > 0$ pour $t > t_*$ Contradiction.
   Conclusion : une solution en glissement permanent mais pas de solution si il y a non glissement.

5. Pour $F(t) = t$ et $q_{\mathrm{T}}(0) = 0, v_{\mathrm{T}}(0) = 0$, calculer le mouvement du bloc. Plusieurs cas : a) $v_{\mathrm{T}}(t) > 0, R_{\mathrm{T}}(t) = -\mu mg \implies m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = t - \mu mg$.

$$mv_{\mathrm{T}}(t) = t(\frac{t}{2} - \mu mg) \tag{16}$$

Pour $0 < \frac{t}{2} < \mu mg$, $v_{\mathrm{T}}(t) < 0$. Contradiction.
b) $v_{\mathrm{T}}(t) < 0, R_{\mathrm{T}}(t) = \mu mg \implies m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = t + \mu mg$.

$$m v_{\mathrm{T}}(t) = t(\frac{t}{2} + \mu mg) \tag{17}$$

$v_{\mathrm{T}}(t) > 0$, pour $t > 0$. contradiction
c) $v_{\mathrm{T}}(t) = 0, R_{\mathrm{T}}(t) = 0 \implies m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = t$.

$$m v_{\mathrm{T}}(t) = t(\frac{t}{2}) \tag{18}$$

$v_{\mathrm{T}}(t) > 0$, pour $t > 0$. Contradiction
Conclusion : pas de solution au probleme.

Modèle de Coulomb de frottement sans glissement

Le modèle de frottement de Coulomb en cas de non glissement s'exprime :

$$\text{si } v_{\mathrm{T}} = 0, \quad |R_{\mathrm{T}}| \leqslant \mu R_{\mathrm{N}}. \tag{19}$$

1. Représenter le graphe du modèle de frottement R_{T} en fonction de v_{T}.
2. Pour $F(t) = a > 0$ et $q_{\mathrm{T}}(0) = 0, v_{\mathrm{T}}(0) = v_0 > 0$, calculer le mouvement du bloc. Comme $v_0 > 0$, on suppose que $v_{\mathrm{T}}(t) > 0, R_{\mathrm{T}}(t) = -\mu mg$ pour $t \in [t, t_*]$. cela implique $m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = a - \mu mg$.

$$m v_{\mathrm{T}}(t) = (a - \mu mg)t + m v_0 \tag{20}$$

Si $(a - \mu mg) \geqslant 0$, $v_t(t) > v_0 > 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Glissement permanent
Si $(a - \mu mg) < 0$, il existe t_* tel que

$$m v_{\mathrm{T}}(t_*) = 0 = (a - \mu mg)t + m v_0 \implies t_* = \frac{-m v_0}{a - \mu mg} > 0 \tag{21}$$

Plusieurs cas pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$:
a) $v_{\mathrm{T}}(t) < 0, R_{\mathrm{T}}(t) = \mu mg$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$

$$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = a + \mu mg \implies \mathsf{m} v_{\mathrm{T}}(t) = (a + \mu mg)t + C \tag{22}$$

$$C = -(a + \mu mg t_*) \tag{23}$$

$$m v_{\mathrm{T}}(t) = (a + \mu mg)(t - t_*) \tag{24}$$

$m v_{\mathrm{T}}(t) > 0$ pour $t > t_*$ Contradiction.
b) $v_{\mathrm{T}}(t) > 0, R_{\mathrm{T}}(t) = -\mu mg$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$

$$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = a - \mu mg \implies \mathsf{m} v_{\mathrm{T}}(t) = (a - \mu mg)t + C \tag{25}$$

$$C = -(a - \mu mg t_*) \tag{26}$$

$$m v_{\mathrm{T}}(t) = (a - \mu mg)(t - t_*) \tag{27}$$

$m v_{\mathrm{T}}(t) < 0$ pour $t > t_*$ puisque $(a - \mu mg) < 0$. Contradiction.
c) $v_{\mathrm{T}}(t) = 0, |R_{\mathrm{T}}(t)| = \mu mg$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$

$$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = a + R_{\mathrm{T}} \tag{28}$$

Puisque $v_{\mathrm{T}}(t) = 0$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$, $m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = 0 \implies R_{\mathrm{T}} = -a$
Puisque $(a - \mu mg) < 0, |R_{\mathrm{T}}| = a < \mu mg$, il n'y a pas de contradiction
Solution : $m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = 0$, $R_{\mathrm{T}}(t) = -a$ pour $t \in [t_*, +\infty]$

3. Pour $F(t) = t$ et $q_{\mathrm{T}}(0) = 0, v_{\mathrm{T}}(0) = 0$, calculer le mouvement du bloc. Plusieurs cas : a) $v_{\mathrm{T}}(t) > 0, R_{\mathrm{T}}(t) = -\mu mg \implies m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = t - \mu mg$.

$$mv_{\mathrm{T}}(t) = t(\frac{t}{2} - \mu mg) \tag{29}$$

Pour $0 < \frac{t}{2} < \mu mg$, $v_{\mathrm{T}}(t) < 0$. Contradiction.
b) $v_{\mathrm{T}}(t) < 0, R_{\mathrm{T}}(t) = \mu mg \implies m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = t + \mu mg$.

$$mv_{\mathrm{T}}(t) = t(\frac{t}{2} + \mu mg) \tag{30}$$

$v_{\mathrm{T}}(t) > 0$, pour $t > 0$. contradiction
c) $v_{\mathrm{T}}(t) = 0, |R_{\mathrm{T}}(t)| = \mu mg \implies m\ddot{q}_{\mathrm{T}}(t) = t + R_{\mathrm{T}}$
Puisque $v_{\mathrm{T}}(t) = 0$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$, $m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = 0 \implies R_{\mathrm{T}}(t) = -t$
La condition $|R_{\mathrm{T}}(t)| \leqslant \mu mg$ implique $t_* = \mu mg$
Plusieurs cas ensuite :
a) $v_{\mathrm{T}}(t) = 0, |R_{\mathrm{T}}(t)| \leqslant \mu mg$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$

$$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = 0 \implies R_{\mathrm{T}}(t) = -t \text{ pour } t > t_* = \mu mg. \tag{31}$$

Contradiction
b) $v_{\mathrm{T}}(t) < 0, R_{\mathrm{T}}(t) = \mu mg$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$
$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = t + \mu mg \implies mv_{\mathrm{T}}(t) = t(t/2 + \mu mg) + t_*(t_*/2 + \mu mg)$

$$\begin{aligned} m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) &= \frac{1}{2}(t^2 - t_*^2) + \mu mg(t - t_*) \\ &= (t - t_*)(\frac{1}{2}(t + t_*) + \mu mg) > 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Contradiction.
c) $v_{\mathrm{T}}(t) > 0, R_{\mathrm{T}}(t) = -\mu mg$ pour $t \in [t_*, t_* + \varepsilon]$
$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = t - \mu mg \implies mv_{\mathrm{T}}(t) = t(t/2 - \mu mg) + t_*(t_*/2 - \mu mg)$

$$\begin{aligned} m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) &= \frac{1}{2}(t^2 - t_*^2) - \mu mg(t - t_*) \\ &= (t - t_*)(\frac{1}{2}(t + t_*) - \mu mg) \\ &= \frac{1}{2}(t - t_*)(t - \mu mg) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{33}$$

Solution possible.

Modèle de Coulomb de frottement régularisé

On suppose un modèle de Coulomb régularisé, continu et simplement valué est donné par :

$$\begin{aligned} &\text{si } |R_{\mathrm{T}}| \leqslant \mu R_{\mathrm{N}}, R_{\mathrm{T}} = -cv_{\mathrm{T}}, \\ &\text{sinon} \quad |R_{\mathrm{T}}| = \mu R_{\mathrm{N}}, \quad \frac{R_{\mathrm{T}}}{|R_t|} = -\frac{v_{\mathrm{T}}}{|v_{\mathrm{T}}|} \end{aligned} \tag{34}$$

1. Représenter le graphe du modèle de frottement régularisé R_{T} en fonction de v_{T}.
2. Pour $F(t) = t$ et $q_{\mathrm{T}}(0) = 0, v_{\mathrm{T}}(0) = 0$, calculer le mouvement du bloc.
Pour $v_{\mathrm{T}}(0) = 0$, on suppose que le frottement vaut $R_{\mathrm{T}}(t) = -cv_{\mathrm{T}}(t)$ pour $t \in [0, t_*]$. Intégration de la dynamique :

$$m\dot{v}_{\mathrm{T}}(t) = t - cv_{\mathrm{T}}(t) \tag{35}$$

Equation homogene

$$\dot{v}^0_{\mathrm{T}}(t) = -\frac{c}{m}v^0_{\mathrm{T}}(t) \implies v^0_{\mathrm{T}}(t) = \exp(-\frac{c}{m}t) \tag{36}$$

Variation de la constante : $v_{\mathrm{T}}(t) = a(t)\dot{v}^0_{\mathrm{T}}(t)$.

$$\dot{a}(t)\exp(-\frac{c}{m}t) - \frac{c}{m}a(t)\exp(-\frac{c}{m}t) = \frac{t}{m} - \frac{c}{m}a(t)\exp(-\frac{c}{m}t) \tag{37}$$

en simplifiant
$$\dot{a}(t) = \frac{t}{m}\exp(\frac{c}{m}t) \tag{38}$$

Intégration par parties $\displaystyle\int f'g = [fg] - \int fg'$

$$\begin{aligned} a(t) &= a(0) + \int_0^t \frac{s}{m}\exp(\frac{c}{m}s)ds \\ &= a(0) + \left[\frac{s}{m}\frac{m}{c}\exp(\frac{c}{m}s)\right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{m}\frac{m}{c}\exp(\frac{c}{m}s)ds \\ &= a(0) + \frac{t}{c}\exp(\frac{c}{m}t) - \left[\frac{1}{c}\frac{m}{c}\exp(\frac{c}{m}s)\right]_0^t \\ &= a(0) + \frac{t}{c}\exp(\frac{c}{m}t) - \frac{m}{c^2}(\exp(\frac{c}{m}t) - 1) \\ &= a(0) + \frac{m}{c^2} + \frac{1}{c^2}\exp(\frac{c}{m}t)(ct - m) \end{aligned} \tag{39}$$

Vérification

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{c^2}(c\exp(\frac{c}{m}t) + (ct-m)\frac{c}{m}\exp(\frac{c}{m}t)) = \frac{t}{m}\exp(\frac{c}{m}t) \tag{40}$$

Solution de l'équation :

$$\begin{aligned} v_{\text{T}}(t) &= (C + \frac{1}{c^2}\exp(\frac{c}{m}t)(ct-m))\exp(-\frac{c}{m}t) \\ &= C\exp(-\frac{c}{m}t) + \frac{1}{c^2}(ct-m) \end{aligned} \tag{41}$$

$$v_{\text{T}}(0) = 0 \implies C = \frac{m}{c^2} \tag{42}$$

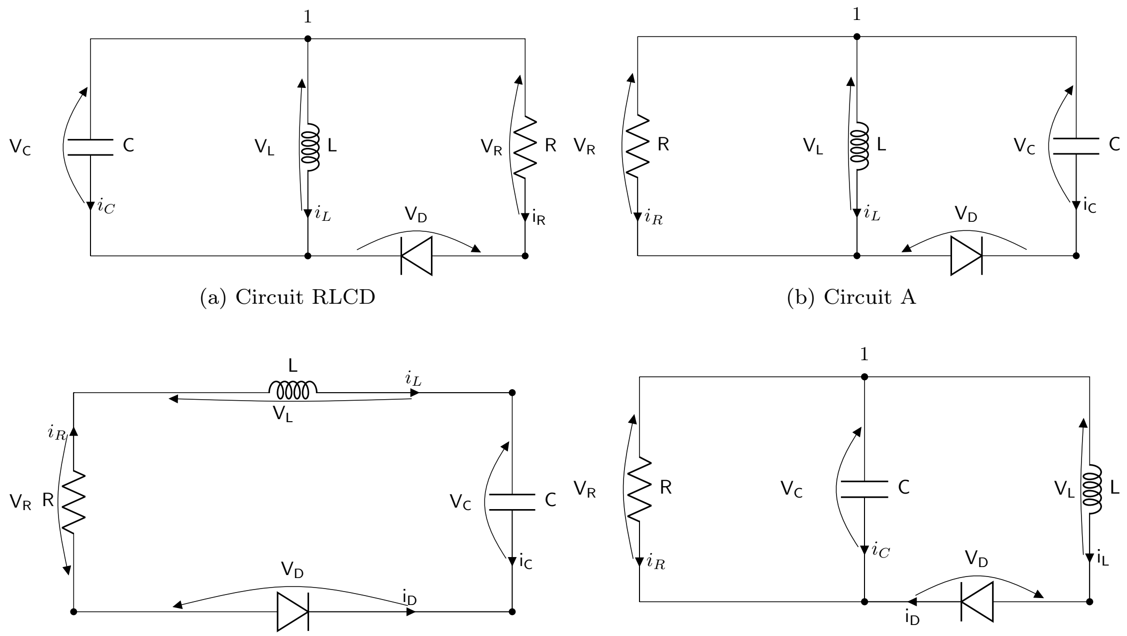
$$v_{\text{T}}(t) = \frac{m}{c^2}(\exp(-\frac{c}{m}t) - 1) + \frac{1}{c}t \tag{43}$$

pour $t = 0 + \varepsilon$, $v_{\text{T}}(\varepsilon) > 0$ (Comment le montrer ? on a $v_{\text{T}}(t) \neq 0$)

$R_{\text{T}}(t_*) = -cv_{\text{T}}(t_*) = -\mu mg \implies v_{\text{T}}(t_*) = \frac{m}{c^2}\exp(-\frac{c}{m}t_*) + \frac{1}{c^2}(ct_* - m) = -\frac{\mu mg}{c}$

A retenir :
- La présence de discontinuités oblige a traiter les cas un pas un. Le formulisme de complementarité et d'inclusion évite l'enumération de tous les modes.
- L'existence de solution n'est pas garantie pour des second membres discontinus
- L'existence des solutions repose sur le caractére maximal monotone des inclusions.

Exercice 2. Circuits avec une diode



(a) Circuit RLCD (b) Circuit A

(c) Circuit C (d) Circuit D

Figure 2 – Circuits simples avec une diode

Circuit A

1. Mettre sous forme de LCS les équations du Circuit A.
2. Quelles sont les conditions initiales admissibles ?
3. Quelle est la nature des solutions du problème de Cauchy (régularité, existence, unicité) ?

Circuit C

1. Mettre sous forme de LCS les équations du Circuit C.
2. Quelles sont les conditions initiales admissibles ?
3. Quelle est la nature des solutions du problème de Cauchy (régularité, existence, unicité) ?

Circuit D

1. Mettre sous forme de LCS les équations du Circuit D.
2. Quelles sont les conditions initiales admissibles ?
3. Quelle est la nature des solutions du problème de Cauchy (régularité, existence, unicité) ?