

Systèmes dynamiques non lisses. Feuille 2

V. Acary.

vincent.acary@inria.fr

2018–2019

Exercice 1. Oscillateur avec Frottement de Coulomb

On considère le système dynamique suivant pour $x(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]$

$$\begin{cases} -(\dot{x}_2 + x_1) \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \quad (1)$$

avec $\alpha \geq 0$ la condition initiale $x(0) = x_0$ et la fonction signe multivaluée

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ce système dynamique représente un oscillateur mécanique avec frottement adimensionnalisé.

1. Que peut-on dire des solutions (existence, unicité, régularité) ?
2. Calculer les points d'équilibre du système (1).

Pour un point d'équilibre \tilde{x} , on définit la fonction suivante $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(x) = \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|^2 \quad (3)$$

3. Représenter les courbes de niveaux de V
4. Montrer que le point d'équilibre \tilde{x} est stable au sens de Lyapunov en utilisant V ?
5. Peut on montrer que les points d'équilibre sont asymptotiquement stable ?
6. Que peut on dire du comportement asymptotique des trajectoires ?

On souhaite commander le système pour le stabiliser en $x = 0$ par l'introduction d'une commande par mode glissant $-u = \operatorname{sgn}(x_1)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} -(\dot{x}_2 + x_1) \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) - u \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \quad (4)$$

On définit la fonction suivante $V_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$V_u(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2 + |x_1| \quad (5)$$

6. Que peut-on dire des solutions (existence, unicité, régularité) ?
7. Montrer que le point d'équilibre $\tilde{x} = 0$ est stable au sens de Lyapunov en utilisant V ? a-t-on la stabilité asymptotique ?
8. (subsidaire) Atteint on l'équilibre en temps fini ?

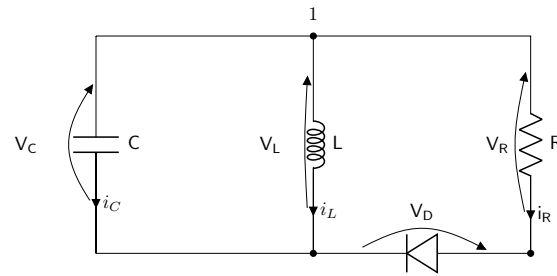


FIGURE 1 – CircuitRLCD

Exercice 1. Stabilité d'un circuit passif

On considère le circuit RLCD sur la Figure 1 dont on rappelle les équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i_D \quad (6)$$

$$x = \begin{bmatrix} v_L \\ i_L \end{bmatrix}, \quad \lambda = i_D, \quad y = -v_D \quad (7)$$

$$y = -v_D = [-1 \quad 0] x + [R] \lambda, \quad (8)$$

qui peuvent se formuler comme un problème de complémentarité linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\lambda \\ y = Cx + D\lambda \\ 0 \leq y \perp \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

1. Calculer les points d'équilibre du système.
2. En exhibant une fonction de Lyapunov, pouvez-vous conclure que le circuit est passif?
3. Quelle est la stabilité des points d'équilibre?