Systèmes dynamiques non lisses. Feuille 3

V. Acary.
vincent.acary@inria.fr

1er décembre 2021

Exercice 1. Oscillateur avec Frottement de Coulomb

On considère le système dynamique suivant pour $x(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]$

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\dot{x}_2 + x_1) \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{array} \right. \tag{1}$$

avec $\alpha \geqslant 0$ la condition initiale $x(0) = x_0$ et la fonction signe multivaluée

$$\operatorname{sgn}(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -1 & \text{si} & x < 0 \\ 1 & \text{si} & x > 0 \\ [-1, 1] & \text{si} & x = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Ce système dynamique représente un oscillateur mécanique avec frottement adimensionnalisé.

1. Que peut-on dire des solutions (existence, unicité, régularité) ?
2. Calculer les points d'équilibre du système (1).

Pour un point d'équilibre $\tilde{x}$, on définit la fonction suivante $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$V(x) = \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|^2 \tag{3}$$

3. Représenter les courbes de niveaux de V
4. Montrer que le point d'équilibre $\tilde{x}$ est stable au sens de Lyapunov en utilisant V ?
5. Peut on montrer que les points d'équilibre sont asymptotiquement stable ?
6. Que peut on dire du comportement asymptotique des trajectoires ?

On souhaite commander le système pour le stabiliser en $x = 0$ par l'introduction d'une commande par mode glissant $-u \in \operatorname{sgn}(x_1)$ de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\dot{x}_2 + x_1) \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \\ \dot{x}_1 = x_2 + u \end{array} \right. \tag{4}$$

On définit la fonction suivante $V_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$V_u(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \tag{5}$$

7. Que peut-on dire des solutions (existence, unicité, régularité) ?
8. Montrer que le point d'équilibre $\tilde{x} = 0$ est stable au sens de Lyapunov en utilisant V ? a-t-on la stabilité asymptotique ?
9. (subsidiaire) Atteint on l'équilibre en temps fini ?

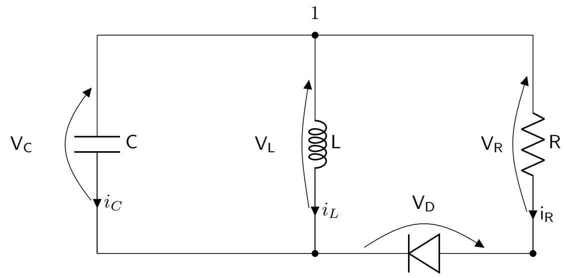

Figure 1 – CircuitRLCD

Exercice 1. Stabilité d'un circuit passif

On considère le circuit RLCD sur la Figure 1 dont on rappelle les équations :

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i_D \tag{6}$$

$$x = \begin{bmatrix} v_L \\ i_L \end{bmatrix}, \qquad \lambda = i_D, \qquad y = -v_D \tag{7}$$

$$y = -v_D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \lambda, \tag{8}$$

qui peuvent se formuler comme un problème de complémentarité linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\lambda \\ y = Cx + D\lambda \\ 0 \leqslant y \perp \lambda \geqslant 0 \end{cases} \tag{9}$$

1. Calculer les points d'équilibre du système.
2. En exhibant une fonction de Lyapunov, pouvez-vous conclure que le circuit est passif ?
3. Quelle est la stabilité des points d'équilibre ?