Systèmes dynamiques non lisses. Feuille 2

V. Acary.
vincent.acary@inria.fr

25 novembre 2019

Exercice 1. Oscillateur avec Frottement de Coulomb

On considère le système dynamique suivant pour $x(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]$

$$\begin{cases} -(\dot{x}_2 + x_1) \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \\ \dot{x}_1 = x_2 \end{cases} \tag{1}$$

avec $\alpha \geqslant 0$ la condition initiale $x(0) = x_0$ et la fonction signe multivaluée

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ [-1, 1] & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Ce système dynamique représente un oscillateur mécanique avec frottement adimensionnalisé.

1. Que peut on dire des solutions (existence, unicité, régularité) ?
   Mettre le système sous forme d'une inclusion différentielle.

$$-\left(\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}\right) \in \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$-\left(\dot{x}(t) + f(x(t))\right) \in T(x) \tag{4}$$

avec

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \text{ et } T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \end{bmatrix} \tag{5}$$

f est linéaire et donc Lipschitz
T est maximal monotone avec $\Phi(x) = \alpha|x_2|$ et $T(x) = \partial\Phi(x)$
On peut aussi tester les cas pour $(\bar{x} - x)^T(\bar{y} - y) = (\bar{x}_2 - x_2)(\bar{y}_2 - y_2) \geqslant 0$

— $\bar{x}_2 > 0, x_2 > 0 \implies (\bar{x}_2 - x_2)(\bar{y}_2 - y_2) = 0$
— $\bar{x}_2 < 0, x_2 < 0 \implies (\bar{x}_2 - x_2)(y'_2 - y_2) = 0$
— $\bar{x}_2 > 0 > x_2 \implies (\bar{x}_2 - x_2)(\bar{y}_2 - y_2) = (x'_2 - x_2)(\alpha + \alpha) \geqslant 0$
— $\bar{x}_2 < 0 < x_2 \implies (\bar{x}_2 - x_2)(\bar{y}_2 - y_2) = (\bar{x}_2 - x_2)(-\alpha - \alpha) \geqslant 0$
— $\bar{x}_2 = 0 < x_2 \implies (\bar{x}_2 - x_2)(\bar{y}_2 - y_2) = -x_2(\bar{y}_2 - \alpha) \geqslant 0$ for $\bar{y}_2 \in [-\alpha, \alpha]$
— $\bar{x}_2 < 0 = x_2 \implies (\bar{x}_2 - x_2)(\bar{y}_2 - y_2) = -x_2(-\alpha - y_2) \geqslant 0$
— ...

Inclusion différentielle maximale monotone avec $D(T) = \mathbb{R}^2$. Théorème de Brézis : il existe une solution absolument continue unique pour toute condition initiale.

2. Calculer les points d'équilibre du système (1).
   On cherche $\tilde{x}$ tel que

$$-f(\tilde{x}) \in T(\tilde{x}) \tag{6}$$

cela implique

$$\tilde{x}_2 = 0 \tag{7}$$

et

$$-\tilde{x}_1 \in \alpha \operatorname{sgn}(\tilde{x}_2) \implies \tilde{x}_1 \in [-\alpha, \alpha] \tag{8}$$

L'ensemble des points d'équilibre est donc défini par :

$$E = \{x \mid x_2 = 0, x_1 \in [-\alpha, \alpha]\} \tag{9}$$

Pour un point d'équilibre $\tilde{x}$, on définit la fonction suivante $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$V(x) = \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|^2 \tag{10}$$

3. Représenter les courbes de niveaux de V Les courbes de niveau de V sont des cercles centrés sur $\tilde{x}$.
4. Montrer que le point d'équilibre $\tilde{x}$ est stable au sens de Lyapunov en utilisant V ?
   La fonction V admet un minimum stricte en $\tilde{x}$ car

$$V(x) = \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|^2 > V(\tilde{x}) = 0, \text{ pour tout } x \neq \tilde{x} \tag{11}$$

   $D(T) = \mathbb{R}^2$ donc $\tilde{x} \in \mathring{D(T)}$.
   Le fonction V est $\mathcal{C}^1$ et x est absolument continue. La composition $\mathcal{V}(t) = V(x(t))$ est donc absolument continue. Sa dérivée existe presque partout et on a

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \frac{d}{ds} V(x(s))ds \tag{12}$$

   On peut donc appliquer les résultats classiques de la stabilité de Lyapunov

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\mathcal{V}(t) &= \nabla_x V(x(t))\dot{x}(t) \\
&= \nabla_x V(x(t))(-f(x(t)) + \lambda(t)) \text{ avec } -\lambda(t) \in T(x(t)) \\
&= (x - \tilde{x})^T(-\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}) \text{ avec } -\lambda_1 = 0 \text{ et } \lambda_2 \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \\
&= (x_1 - \tilde{x}_1)(x_2) + (x_2 - \tilde{x}_2)(-x_1 + \lambda_2) \text{ avec } \lambda_2 \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \\
&= x_1x_2 - \tilde{x}_1x_2 - x_2x_1 + x_2\lambda_2 \\
&= x_2(\lambda_2 - \tilde{x}_1)
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\lambda_2(t) \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \implies x_2\lambda_2(t) = \alpha|x_2| \tag{14}$$

$$\tfrac{d}{dt}\mathcal{V}(t) = \alpha|x_2| - x_2\tilde{x}_1 \tag{15}$$

   — $x_2 > 0$, $\frac{d}{dt}\mathcal{V}(t) = x_2(\alpha - \tilde{x}_1) \leqslant 0$
   — $x_2 < 0$, $\frac{d}{dt}\mathcal{V}(t) = -x_2(\alpha + \tilde{x}_1) \leqslant 0$
   — $x_2 = 0$, $\frac{d}{dt}\mathcal{V}(t) = 0$

   Le fonction V est donc bien une fonction de Lyapunov et l'équilibre $\tilde{x}$ est stable au sens de Lyapunov.
5. Peut on montrer que les points d'équilibre sont asymptotiquement stable ? A priori, on ne peut pas utiliser directement V pour montrer la stabilité asymptotique. On peut remarquer que dans tout voisinage d'un point d'équilibre $\tilde{x}$, il existe au moins un autre point d'équilibre $\bar{x}$. Une trajectoire $\gamma^+(\bar{x})$ ne peut donc pas converger asymptotiquement vers $\tilde{x}$. On a donc pas stabilité asymptotique du point $\tilde{x}$.
6. Que peut on dire du comportement asymptotique des trajectoires ? Le théorème d'invariance de Lasalle peut étre appliqué en considérant

$$V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \tag{16}$$

   Dans ce cas on obtient :

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\mathcal{V}(t) &= \nabla_x V_0(x(t))\dot{x}(t) \\
&= -\alpha|x_2|
\end{aligned} \tag{17}$$

   On obtient alors

$$\begin{aligned}
S &= \{x \mid \dot{\mathcal{V}(t)} = \dot{V}_o(x(t)) = 0\} \\
&= \{x_2 = 0\}
\end{aligned} \tag{18}$$

   Les solutions $\gamma^+(x_0)$ sont bornées dans le ensembles de niveaux de V_0 qui sont des compacts.
   Pour le plus grand ensemble invariant M dans S, on remarque $E \subset S$ et donc

$$E \subset M \tag{19}$$

Il reste a montrer que E est la plus grand invariant contenu dans S. Pour cela, on considère une condition initiale telle que (x_1^0, x_2^0) tel que $x_2^0 = 0, |x_1^0| > \alpha$. La solution étant absolument continue, on a $|x_1(t)| > \alpha$ pour un intervalle $[t_0, t_0 + \varepsilon], \varepsilon > 0$. En utilisant la dynamique (1), on obtient

$$\dot{x}_2(t) = \lambda_2(t) - x_1(t) \text{ avec } -\lambda_2(t) \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \tag{20}$$

puisque $|x_1(t)| > \alpha$ et $|\lambda_2(t)| \leqslant \alpha$, on obtient que $|\dot{x}_2(t)| > 0$ presque partout et $|x_2(t)| > 0, t \in]t_0, t_0+\varepsilon[$. On conclut que (x_1^0, x_2^0) n'est pas inclus dans un ensemble invariant contenu dans S. $E = M$ est donc le plus grand ensemble invariant. Par le théorème d'invariance de Lasalle, on a

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(x(t, x_0), M) = 0 \tag{21}$$

On souhaite commander le système pour le stabiliser en $x = 0$ par l'introduction d'une commande par mode glissant $-u = \operatorname{sgn}(x_1)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} -(\dot{x}_2 + x_1) \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \\ \dot{x}_1 = x_2 - u \end{cases} \tag{22}$$

On définit la fonction suivante $V_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$V_u(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \tag{23}$$

6. Que peut on dire des solutions (existence, unicité, régularité) ? Considérons l'inclusion différentielle suivante :

$$-\left(\dot{x}(t) + f(x(t))\right) \in T(x) \tag{24}$$

avec

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \text{ et } T(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(x_1) \\ \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \end{bmatrix} \tag{25}$$

En considérant la fonction $\phi(x) = \alpha|x_2| + |x_1|$, on voit que $T(x) = \partial\Phi(x)$, l'opérateur est donc maximal monotone et le théorème de Brézis s'applique.

7. Montrer que le point d'équilibre $\tilde{x} = 0$ est stable au sens de Lyapunov en utilisant V ? a-t-on la stabilité asymptotique ? On peut commencer par calculer les points d'équilibre du système

$$\tilde{x}_2 = \operatorname{sgn}(x_1), -\tilde{x}_1 \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \tag{26}$$

Supposons $\tilde{x}_1 > 0$, on obtient $\tilde{x}_2 = 1$ et donc une contradiction car $-\tilde{x}_1 = 1$. Supposons $\tilde{x}_1 < 0$, on obtient $-\tilde{x}_2 = 1$ et donc encore une contradiction La seule solution est $x_1 = 0, x_2 = 0$. $D(T) = \mathbb{R}^2$ donc $\tilde{x} \in \mathring{D}(T)$.
Le fonction V_u est $\mathcal{C}^1$ et x est absolument continue. La composition $\mathcal{V}(t) = V(x(t))$ est donc absolument continue. Sa dérivée existe presque partout et on a

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \frac{d}{ds} V(x(s)) ds \tag{27}$$

On peut donc appliquer les résultats classiques de la stabilité de Lyapunov On a

$$\nabla_x(V(x)) = x + \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{sgn}(x_1) \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{V}_u(t) &= \nabla_x V_u(x(t))\dot{x}(t) \\ &= \nabla_x V_u(x(t))(-f(x(t)) + \lambda(t)) \text{ avec } -\lambda(t) \in T(x(t)) \\ &= (x_1)(x_2 + \lambda_1) + (x_2)(-x_1 + \lambda_2) \text{ avec } \lambda_2 \in \alpha \operatorname{sgn}(x_2) \text{et } -\lambda_1 \in \operatorname{sgn}(x_1) \\ &= -\alpha|x_2| - |x_1| < 0 \text{ pour } x \neq \tilde{x} \end{aligned} \tag{29}$$

Le fonction V_u est donc bien une fonction de Lyapunov et l'équilibre $\tilde{x}$ est stable au sens de Lyapunov. Comme la décroissance est stricte, on a stabilité asymptotique.

8. (subsidiaire) Atteint on l'équilibre en temps fini ?