Jean Jacques Moreau
Un fondateur de la dynamique non–lisse en Mécanique.

Conférence–débats de l'Académie des sciences
15 Juin 2021

Vincent Acary, Inria

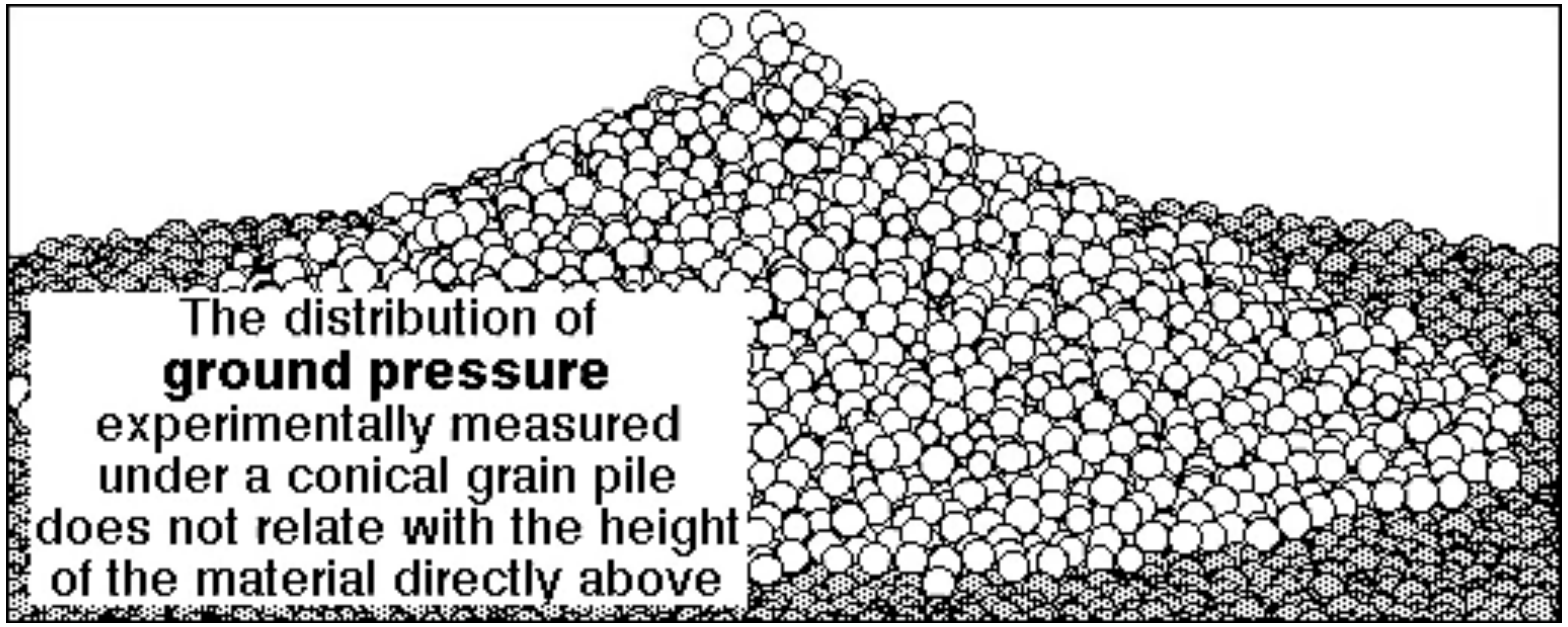
Inria - Centre de Grenoble Rhône–Alpes - Laboratoire Jean Kuntzmann - Université Grenoble Alpes

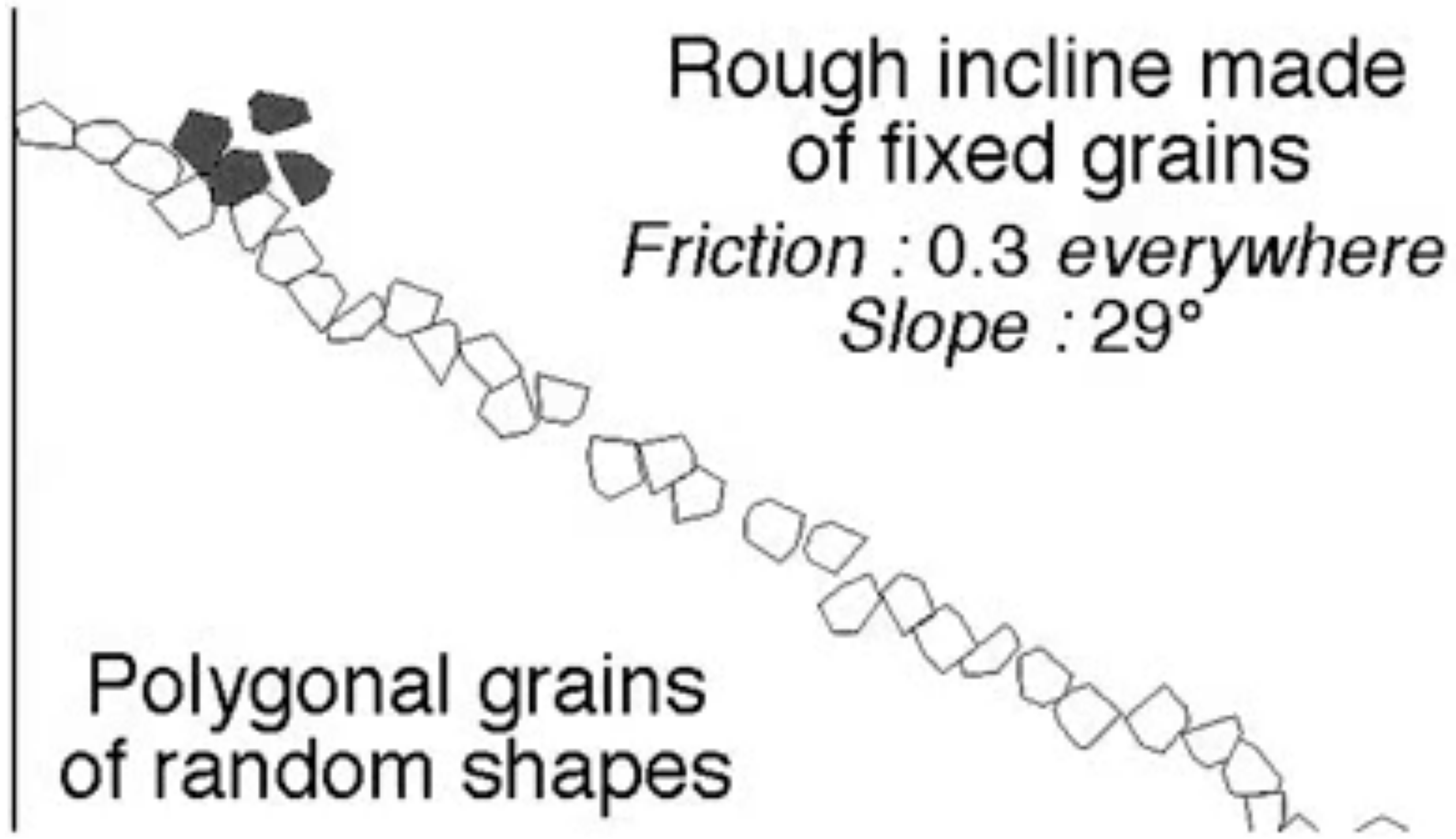
Illustrations

Mécanique unilatérale (One–sided Mechanics)

Dynamique non–lisse (Nonsmooth Dynamics)

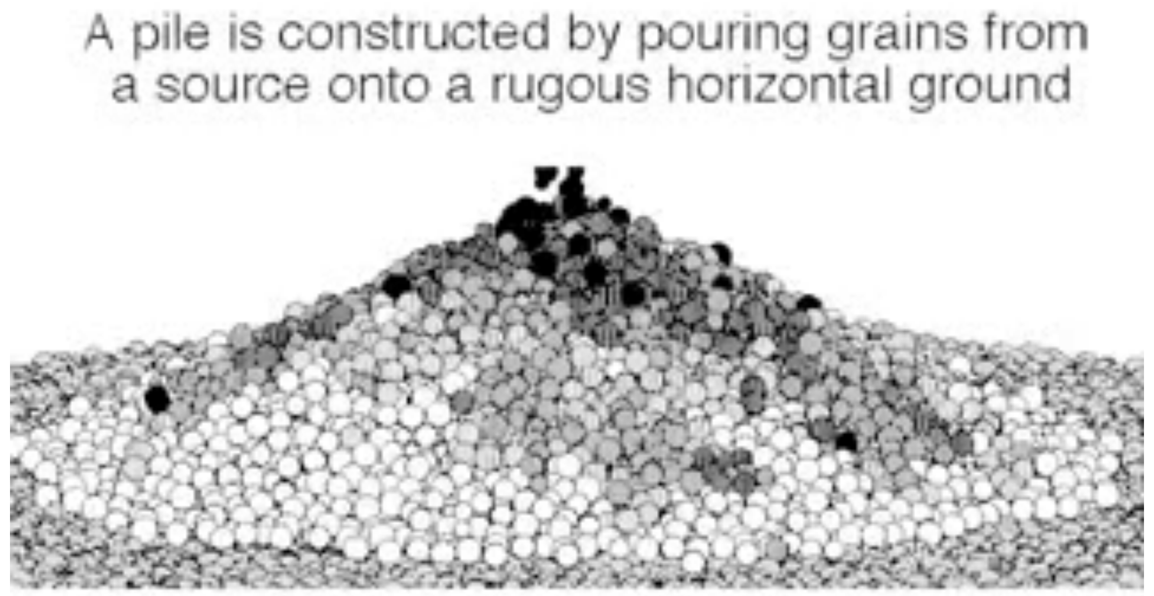
Commentaires personnels en guise de conclusion

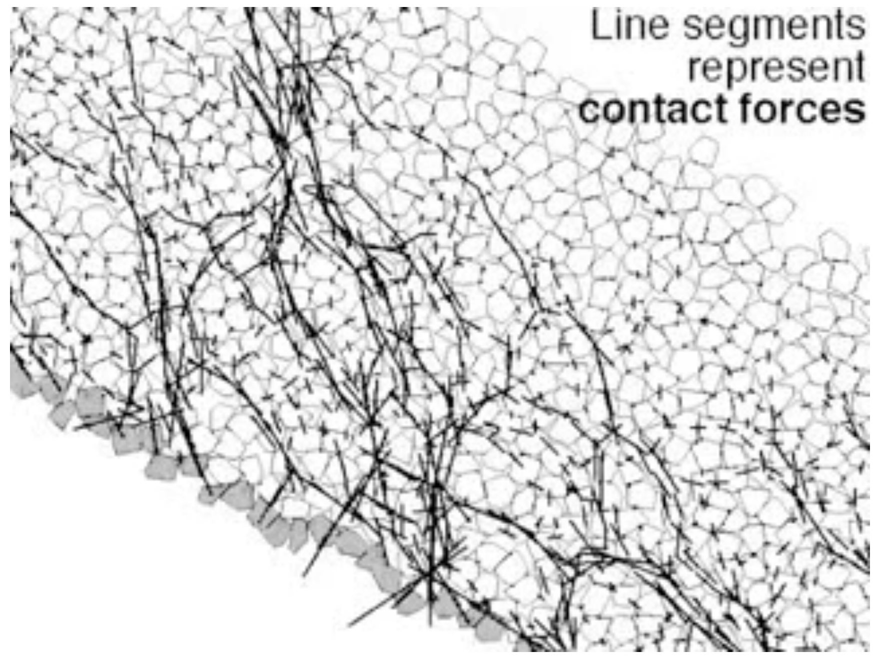


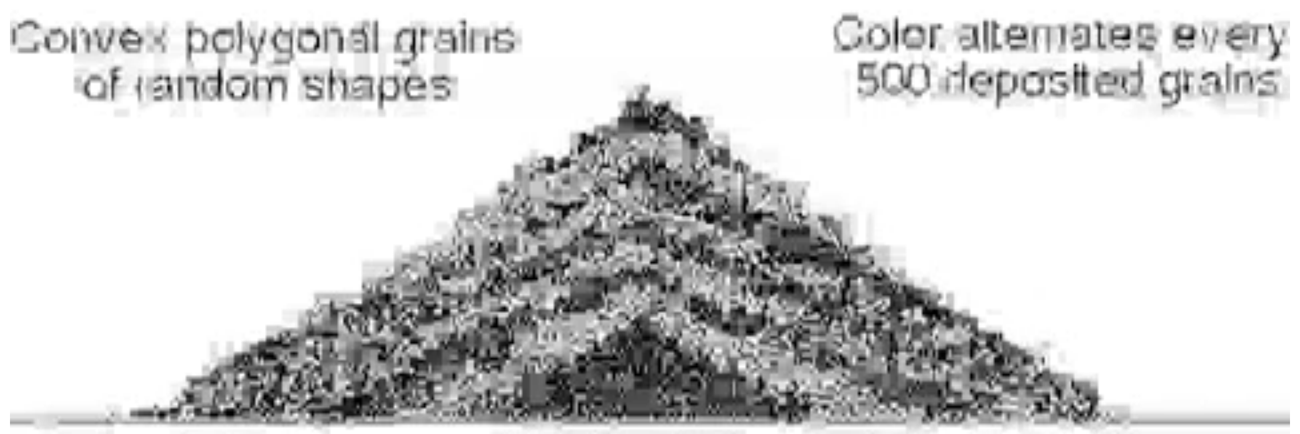


Vidéos et présentations réalisées par J.J. Moreau dans les années 1990

Matériaux granulaires: contact, frottement, impact et dynamique

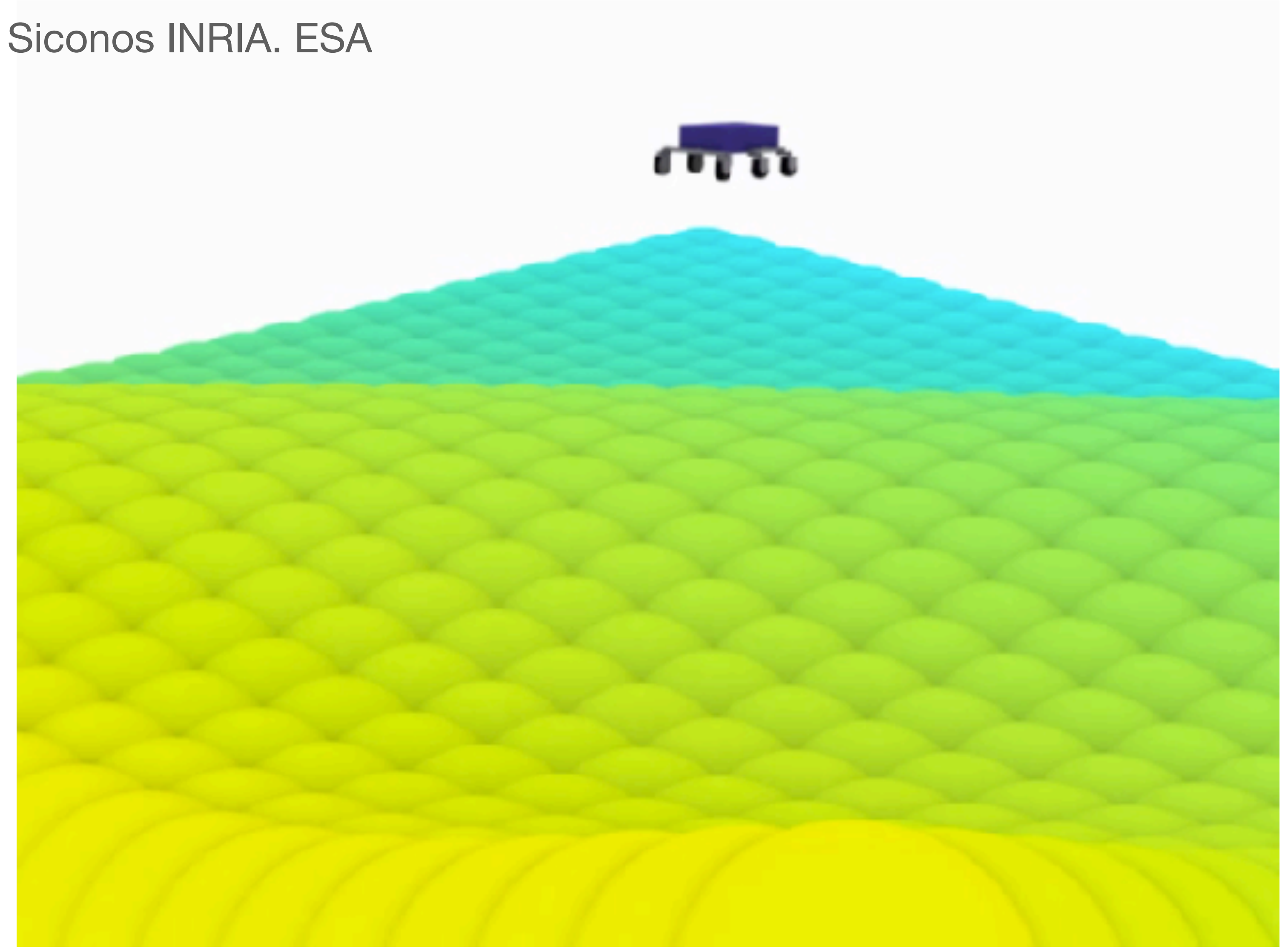


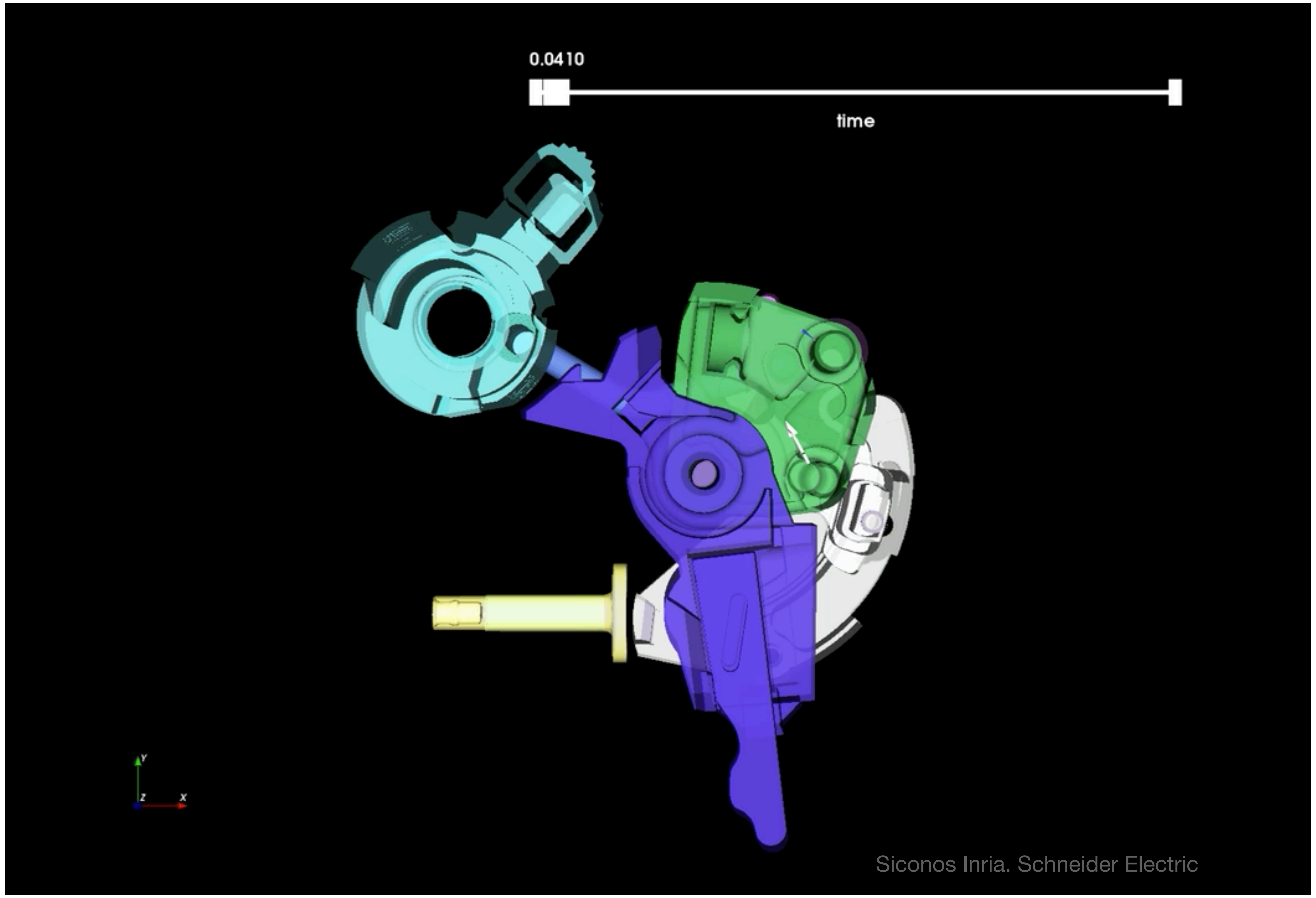


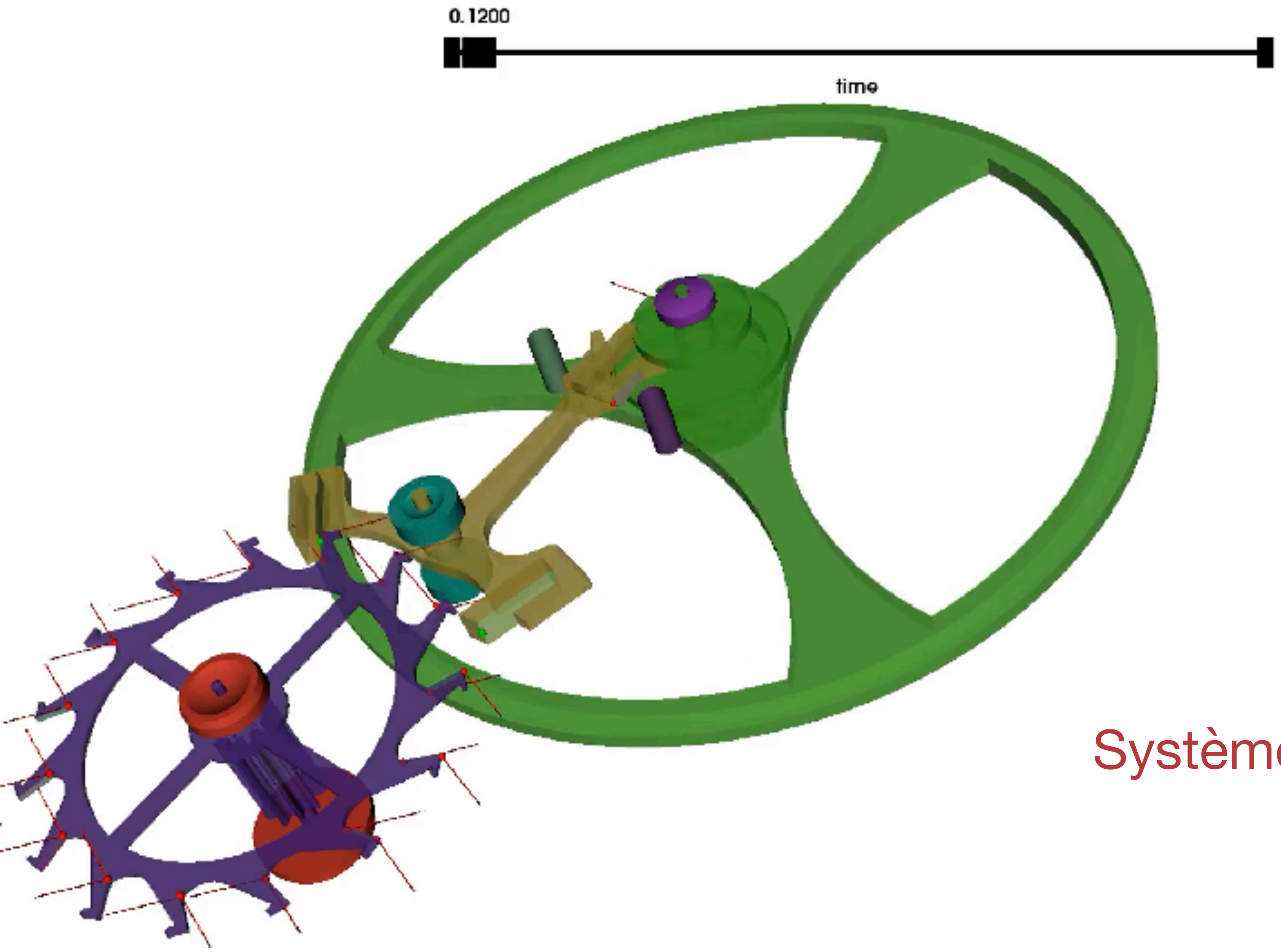


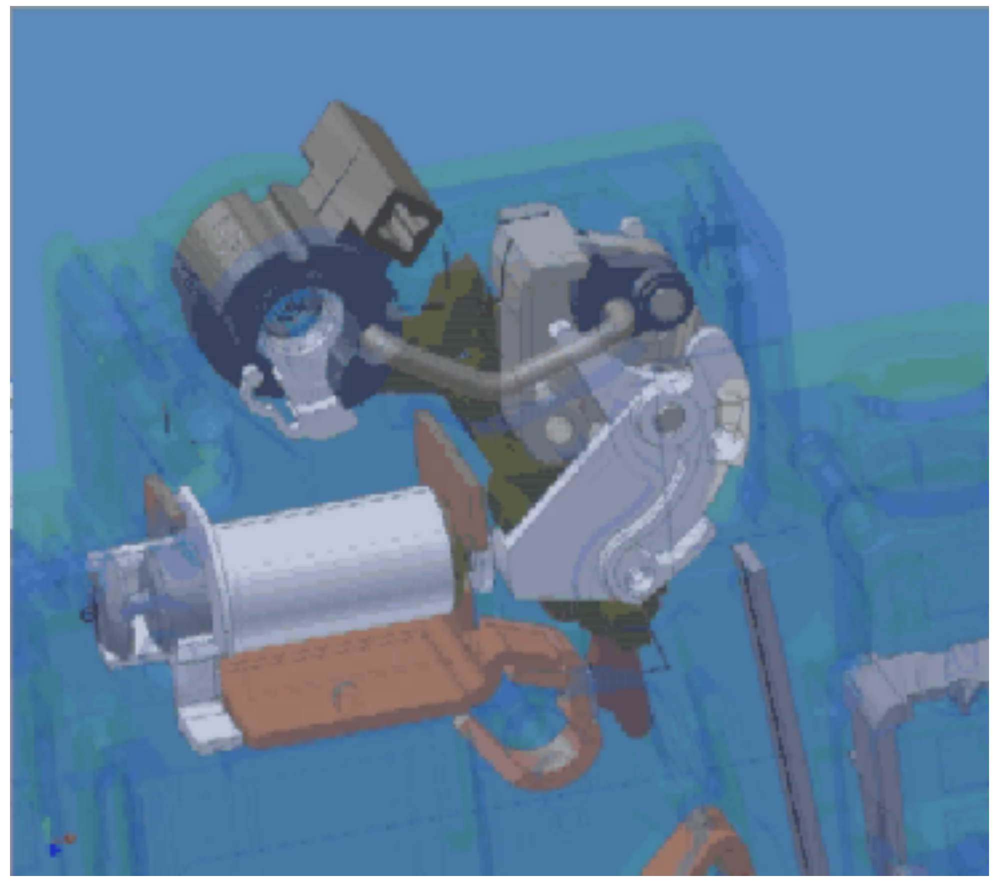

Project Chrono.
Lire (k)
0:00 / 0:35

Siconos INRIA. ESA



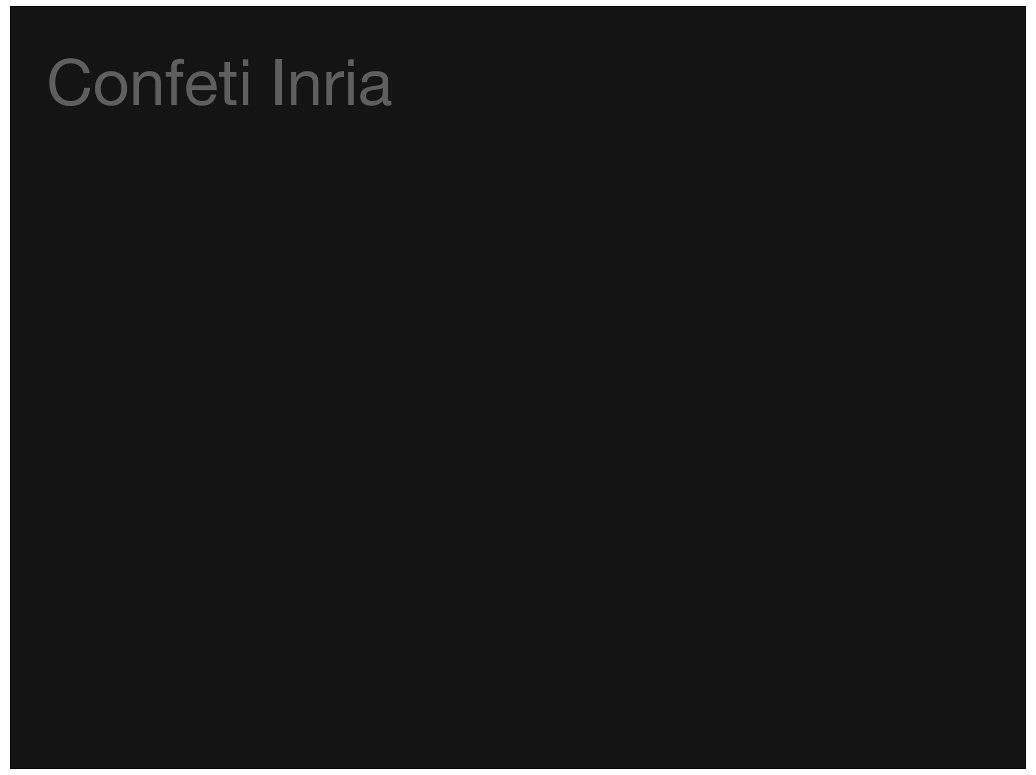


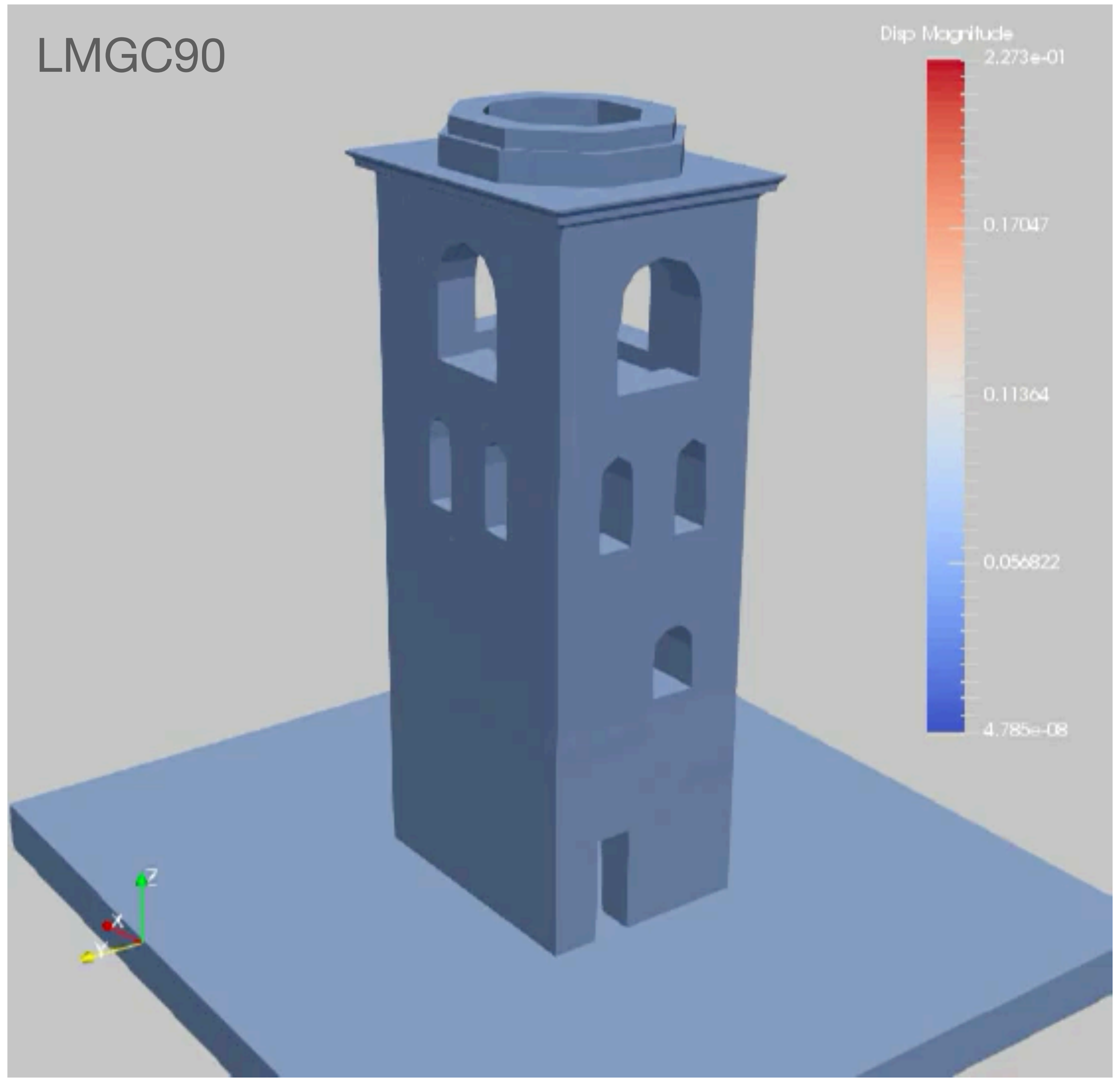




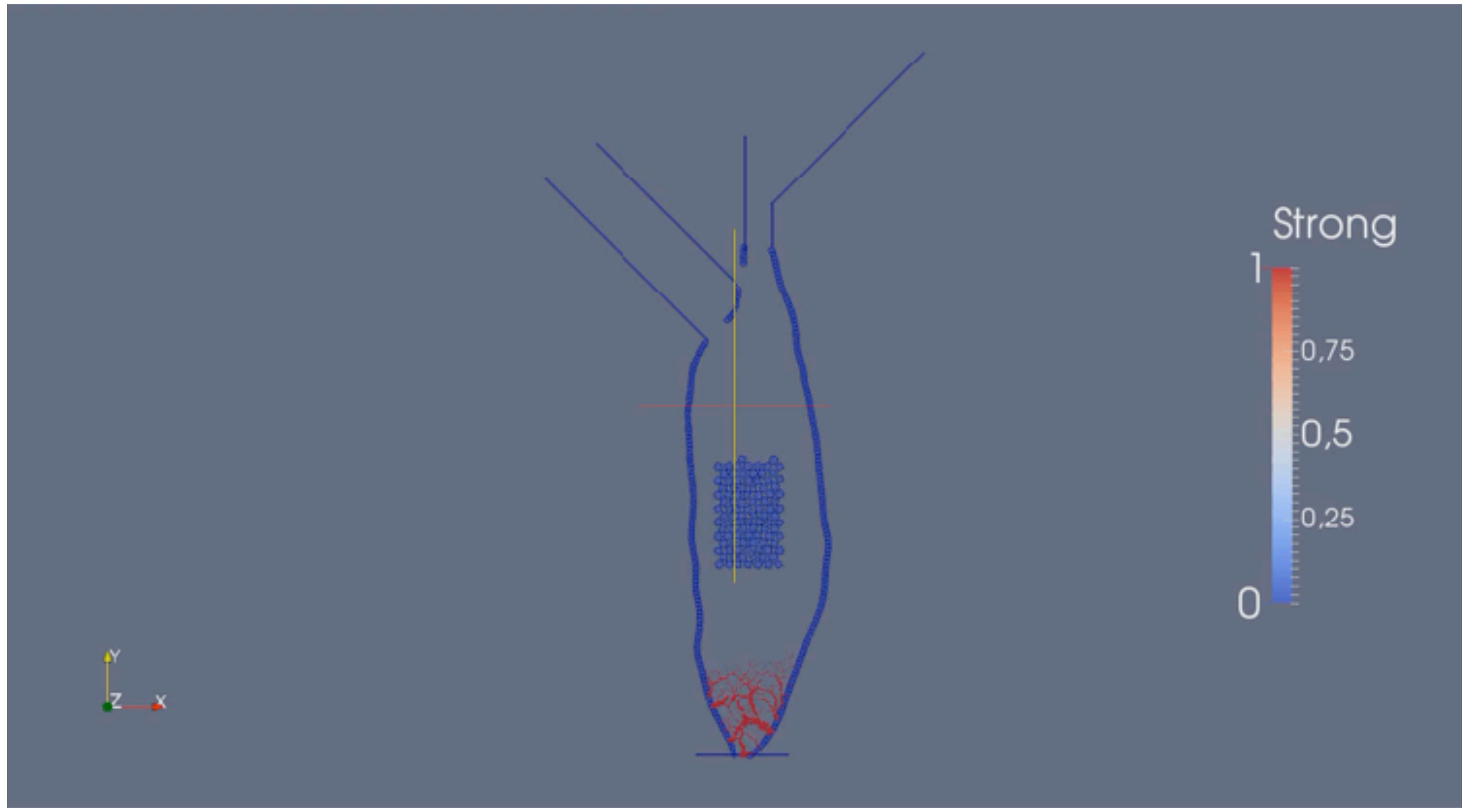
Systèmes multi-corps rigides. contact, frottement et jeux

Siconos INRIA. O. Bonnefon, M. Brémond, O. Huber, F. Pérignon, S.Sinclair,

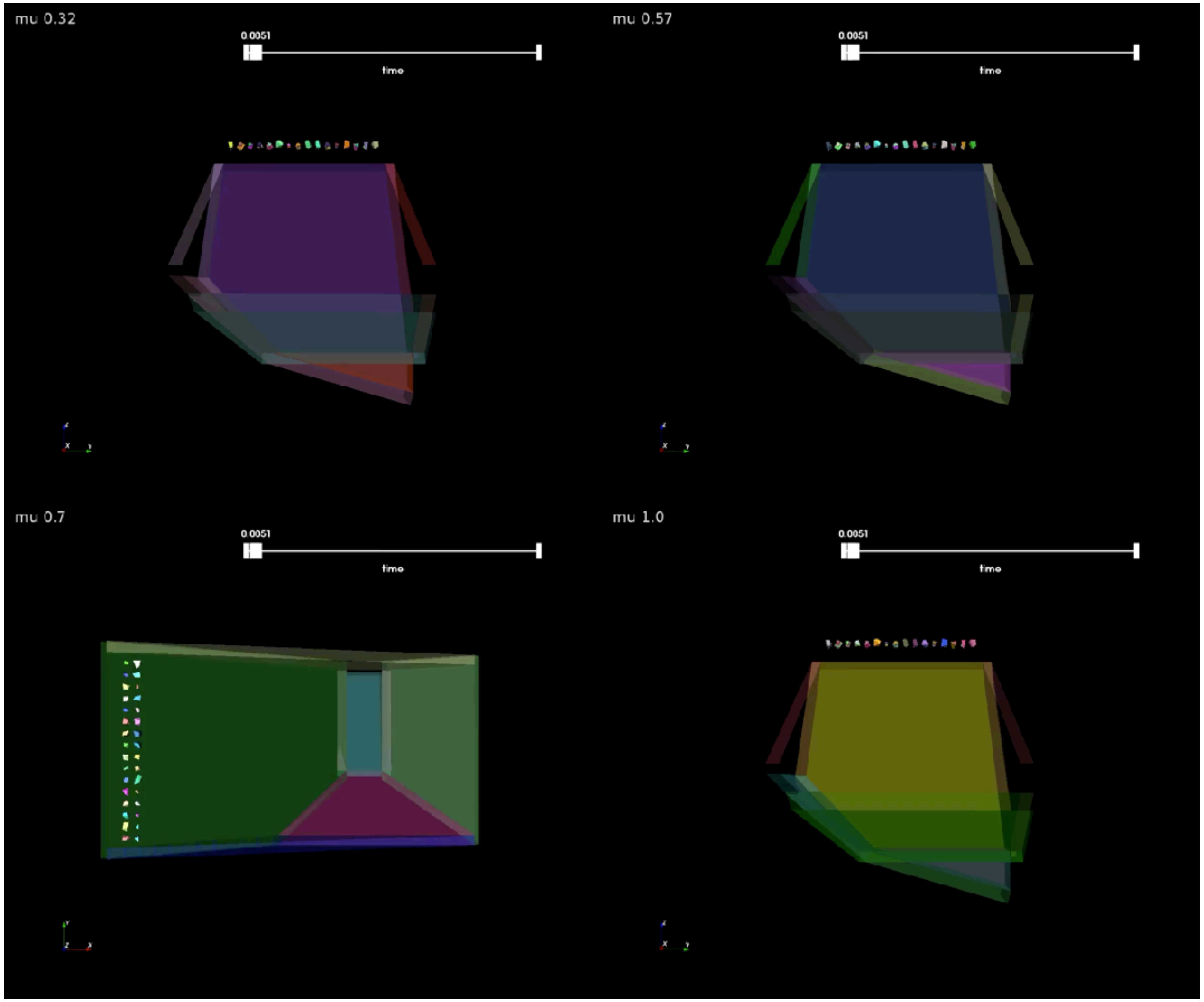


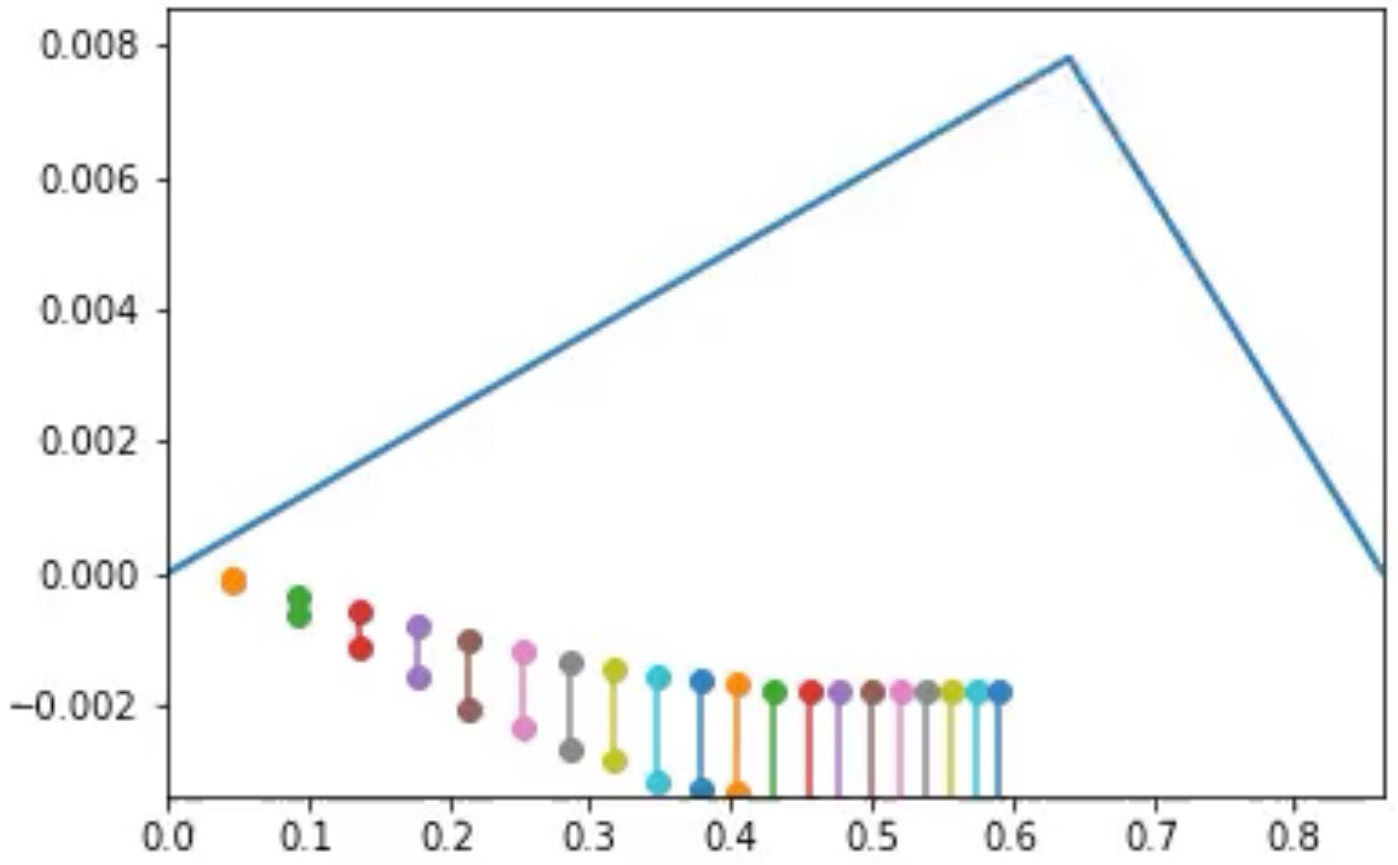


LMGC90. U. Montpellier CNRS LMGC: F. Dubois, M. Jean, R. Mozul, M. Renouf et al.



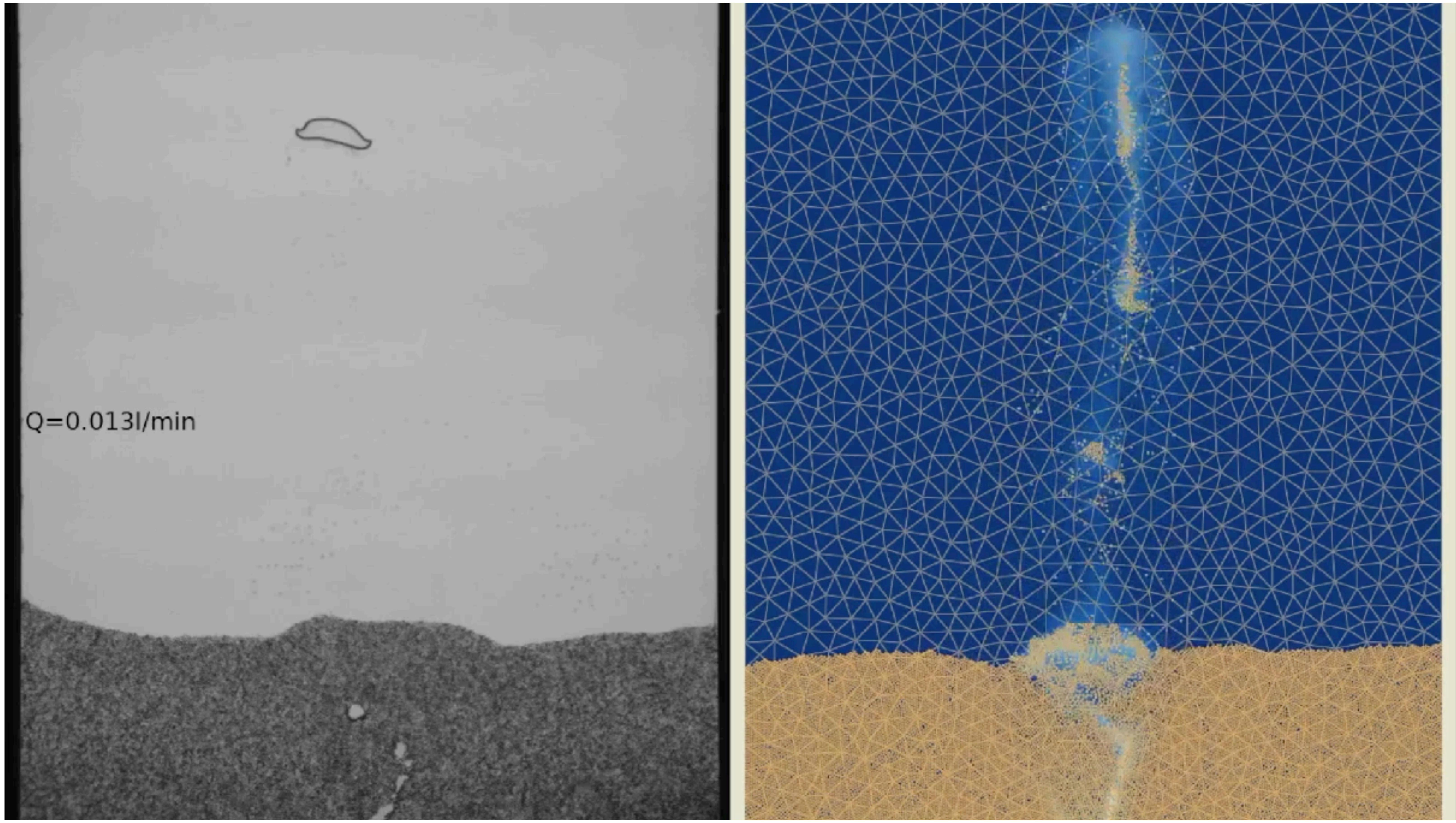
Siconos Inria Chile. Mineria proyectos



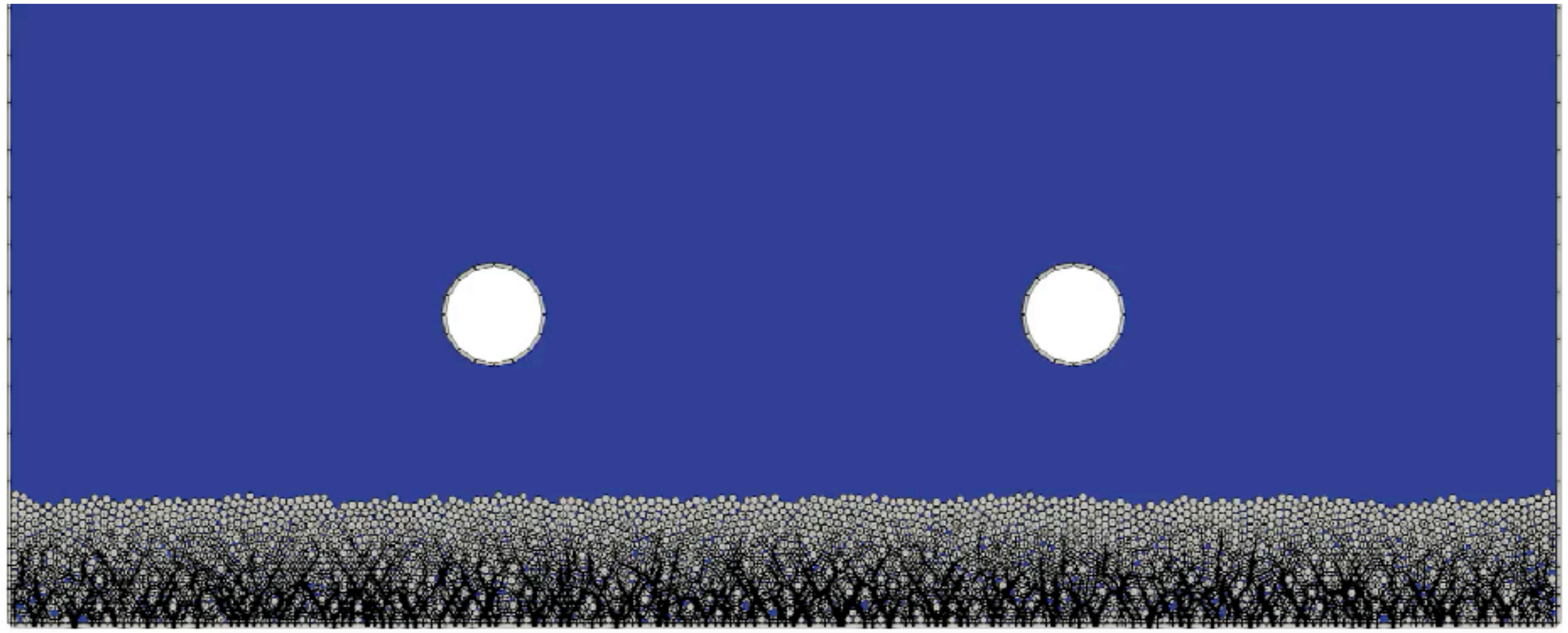


Siconos Inria. Instruments à corde
Collaboration with IJLRD UPMC

LMGC90



MigFlow. U. Montpellier, LMGC
and U. Catholique de Louvain



Illustrations

Mécanique unilatérale (One–sided Mechanics)

Dynamique non–lisse (Nonsmooth Dynamics)

Commentaires personnels en guise de conclusion

I - Mécanique unilatérale (One–sided Mechanics)

Contributions/Fondations de J.J. Moreau

- Formulation des phénomènes unilatéraux et à seuil :
  - domaines admissibles (faisables) pour l'état, contraintes d'inégalités
- Par dualité, introduction des lois de forces (de réaction), multiplicateurs :
  - potentiel à valeurs dans la droite réelle achevée $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$
  - lois multi-valuées dérivant d'un potentiel convexe grâce aux sous-gradients
  - inclusion dans des cônes normaux ou des inégalités variationnelles, complémentarité
- Pseudo–potentiel de dissipation. Principe de dissipation maximum pour le frottement. Principes énergétiques duaux [Moreau, 1968, 1974]
- Principe de Gauss avec contraintes unilatérales [Moreau, 1963, 1966]

L'analyse convexe, la programmation mathématique et l'optimisation
ont été les outils adaptés, motivés pour certains par la Mécanique théorique,
et qui ont donné lieu ensuite, à des méthodes numériques efficaces.

≪ Jean Jacques Moreau voulait appliquer la mécanique aux mathématiques. ≫

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E.)

ON UNILATERAL CONSTRAINTS, FRICTION AND PLASTICITY

JEAN JACQUES MOREAU

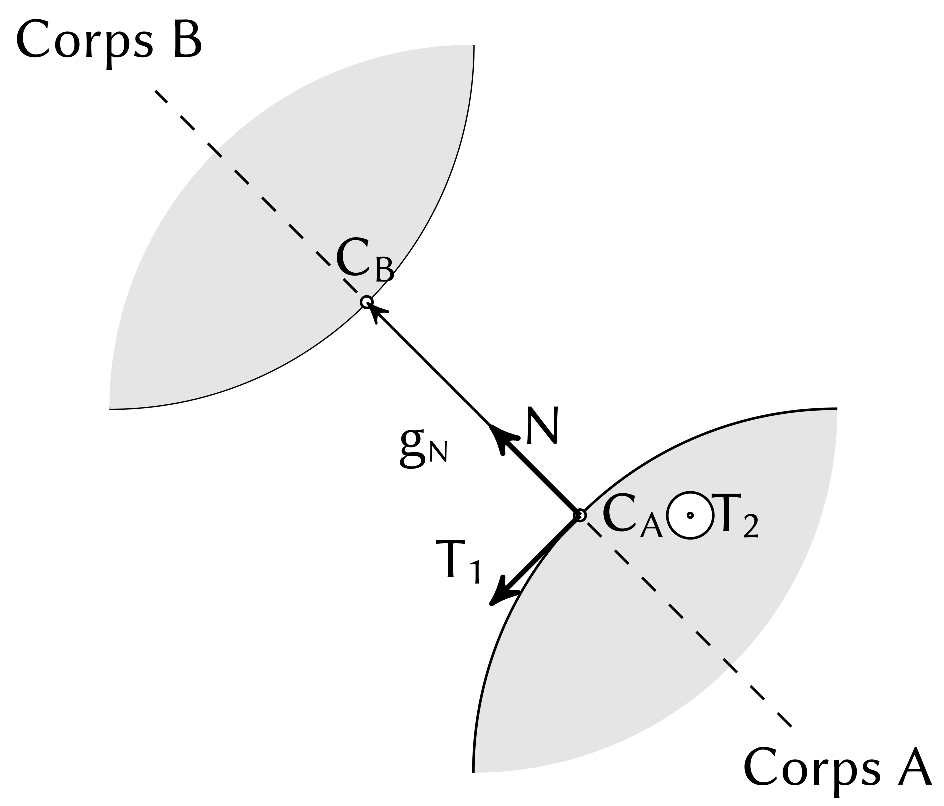
Corso tenuto a Bressanone dal 17 al 26 giugno 1973

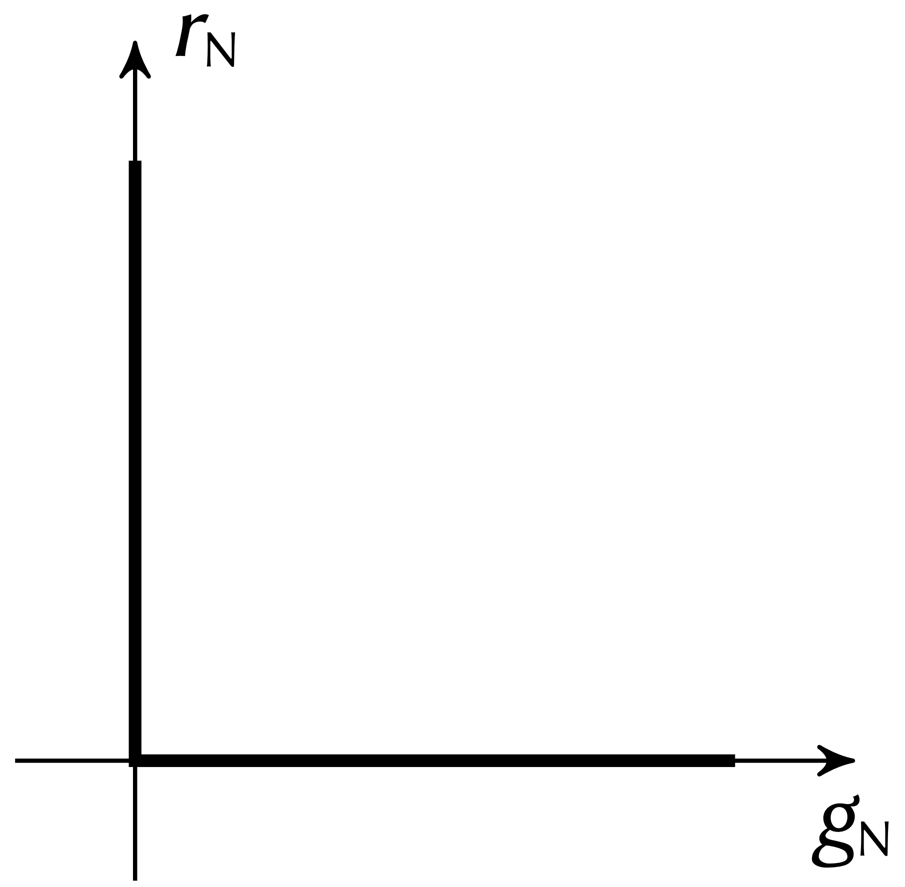
ON UNILATERAL CONSTRAINTS, FRICTION AND PLASTICITY

J. J. MOREAU

CONTENTS

Contact unilatéral et frottement de Coulomb





- Condition de Signorini en interstice

$$0 \leq g_N \perp r_N \geq 0 \Leftrightarrow -r_N \in N_{\mathbb{R}_+}(g_N)$$

- Condition de Signorini en vitesse

$$\begin{cases} 0 \leq u_N \perp r_N \geq 0 & \text{si } g_N \leq 0 \\ r_N = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \Leftrightarrow -\mathbf{r}_N \in N_{T_{\mathbb{R}_+}(g_N)}(u_N)$$

- Frottement de Coulomb $K = \{r \in \mathbb{R}^3 \mid \|r_T\| \leq \mu r_n\}$
  • caractère non–associé (perte de la monotonie) [De Saxcé, 1992]

$$-\hat{u} = -(u + \mu \|u_T\| \mathsf{N}) \in N_K(r)$$

  • complémentarité sur des cônes du second ordre

$$K^\star \ni \hat{u} \perp r \in K$$

Théorème d'existence [A. V., F. Cadoux, C. Lemaréchal, J. Malick, 2011].

Condition de Signorini et frottement de Coulomb

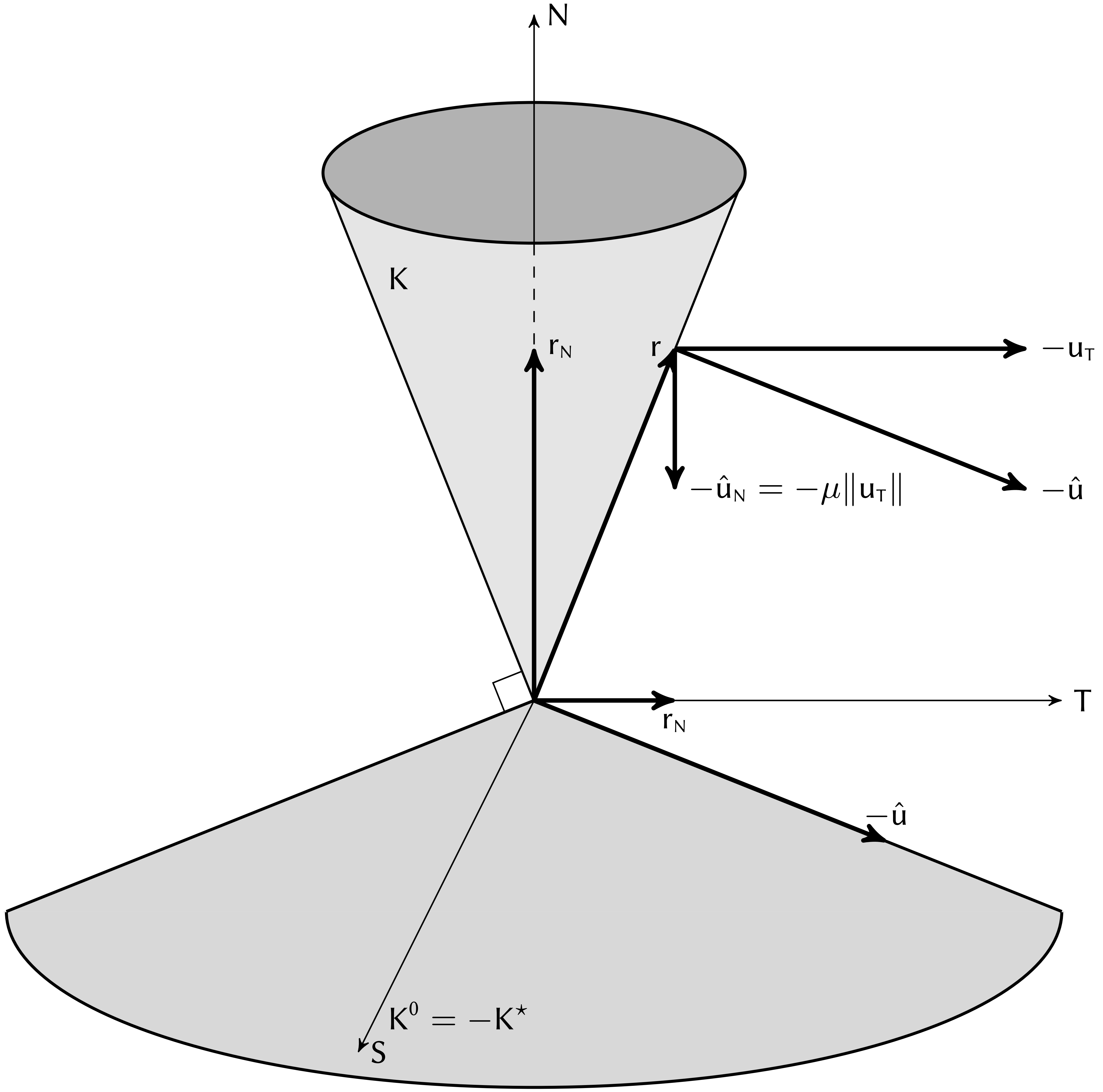


FIGURE – Frottement de Coulomb et vitesse relative modifiée $\hat{u}$. Cas du glissement.

Applications de la Mécanique unilatérale

Les travaux pionniers de J.J. Moreau …

- Contact unilatéral et frottement de Coulomb
  [Moreau, 1963, 1966, 1988, 1998, 1999, 2003, 2006]
- Cavitation dans les fluides [Moreau, 1964]
  La pression doit être positive ou supérieure à la pression de saturation
- Plasticité [Moreau, 1974, 1976] (en parallèle des travaux de G. Maier)
  Les contraintes et les variables d'écrouissage appartiennent à un ensemble convexe
- Matériaux discrets [Moreau, 1997, 2001]
  Définition des contraintes dans un granulaire ou un mélange (correction de la formule de Weber)

…qui inspirent toujours des recherches actuelles.

Illustrations

Mécanique unilatérale (One–sided Mechanics)

Dynamique non–lisse (Nonsmooth Dynamics)

Commentaires personnels en guise de conclusion

II - Dynamique non–lisse (Nonsmooth Dynamics)

non–lisse ? Késako ?

Manque de régularité mathématique des fonctions
Tout ce qui n'est pas partout différentiable

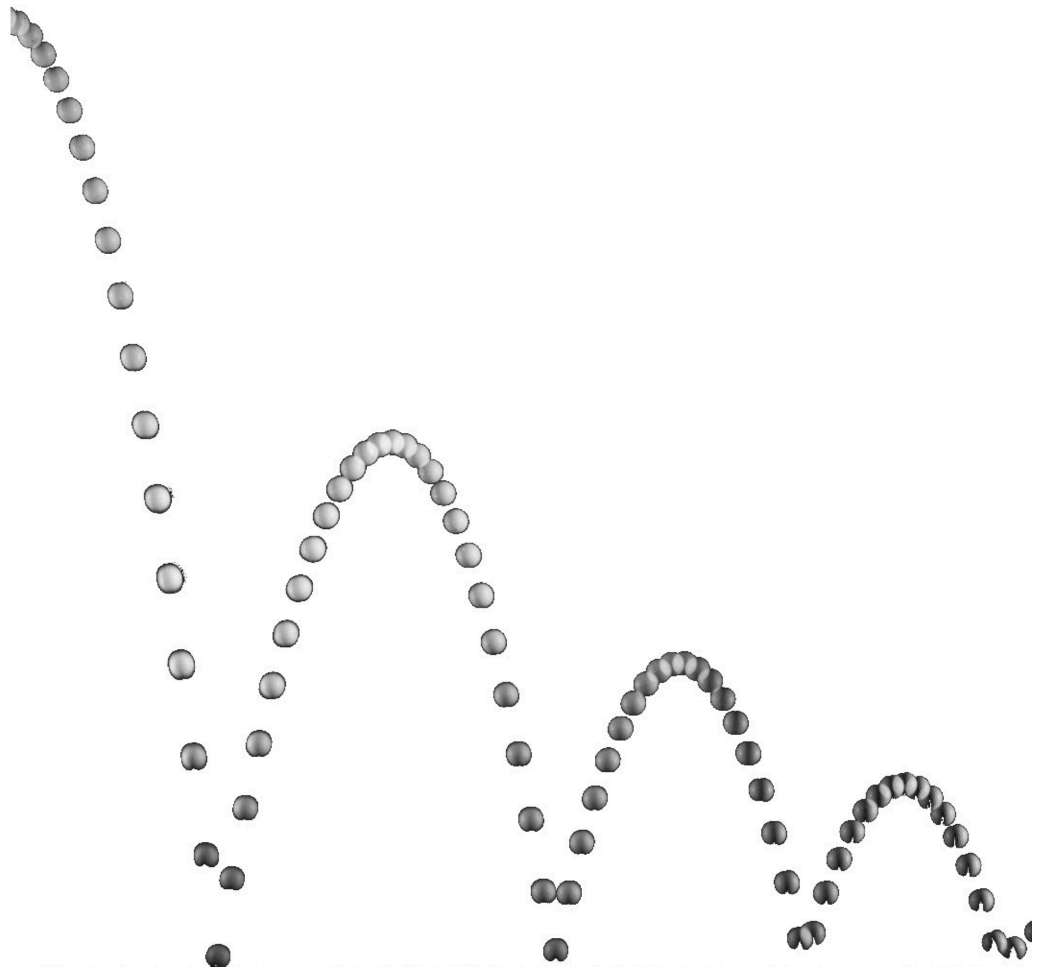
en Mécanique :

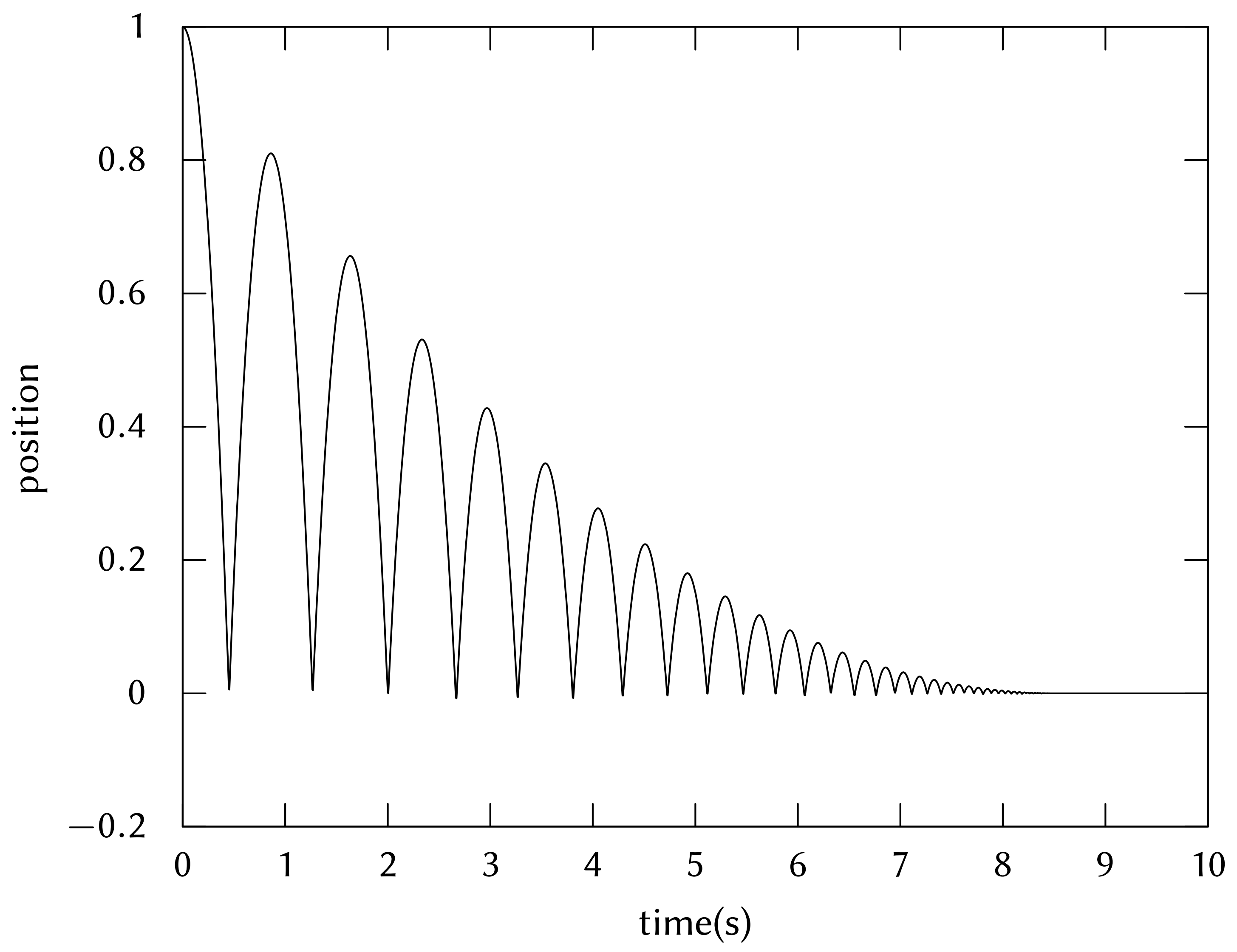
Une formulation non–lisse des lois de comportement (fonction multi-valuées, inégalités, complémentarité),

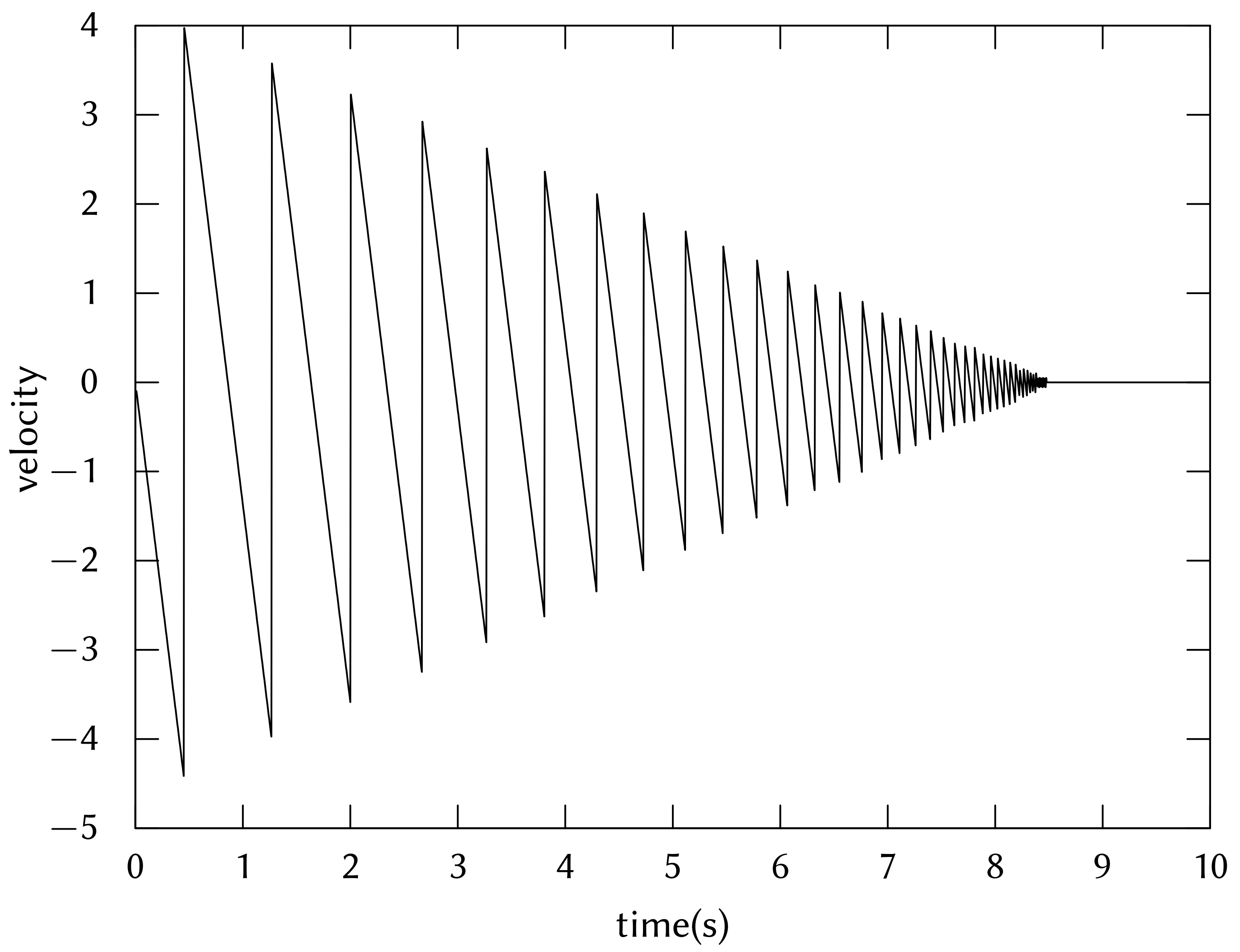
qui peut impliquer des solutions non–lisses en temps

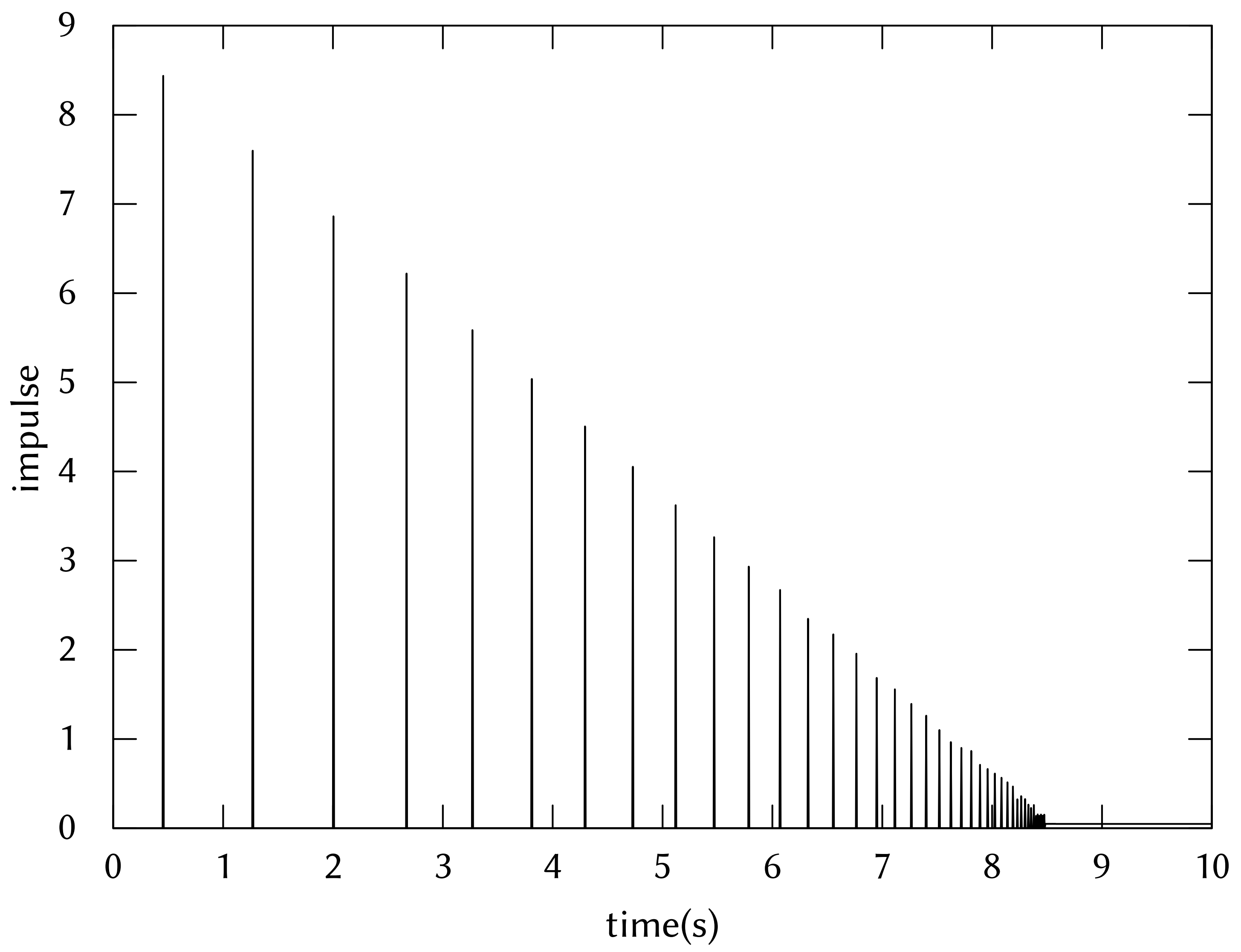
(points anguleux, sauts, mesures, distributions)

II - Dynamique non–lisse (Nonsmooth Dynamics)









II - Dynamique non–lisse (Nonsmooth Dynamics)

Contributions/Fondations de J.J. Moreau

- Écriture des évolutions quasi-statiques ou dynamiques sous forme d'inclusion différentielle (en parallèle des travaux de H. Brézis, M. Schatzman) :
  - Processus de balayage de Moreau (Moreau's sweeping process)
  - Inclusion différentielle à mesure
  - L'état peut vivre dans l'espace des fonctions à variations bornées,
    et ses dérivées sont des mesures différentielles
  - Processus de balayage de Moreau du second ordre
    Lois d'impact comme des inégalités variationnelles portant sur des mesures différentielles
  - Extension du théorème de l'énergie cinétique de Thomson–Tait
- Une nouvelle expression de la mécanique classique basée sur les courants de de Rham

II - Dynamique non–lisse (Nonsmooth Dynamics)

Contributions/Fondations de J.J. Moreau

- Schémas numériques d'intégration en temps de ces formulations
  - Schémas dit de ≪ Event-capturing time–stepping schemes ≫
  - Les variables discrètes sont les vitesses et les impulsions
  - Méthodes de résolution itératives à chaque pas de temps du problème variationel non–lisse et non-convexe.

Contact unilatéral comme une inclusion

Définition (Dynamique en présence de contraintes unilatérales parfaites [Moreau, 1988])

$$\begin{cases} \dot{q} = v \\ \\ M(q)\dfrac{dv}{dt} + F(q,v) = r \\ \\ -r \in N_{\mathcal{C}(t)}(q) \end{cases} \tag{1}$$

où r est la force de réaction généralisée.

- Extension des équations de Lagrange avec contraintes
- Inclusion différentielle du second ordre (degré relatif 2)
- Les contraintes sont dites parfaites car leur travail s'annule (loi de normalité en coordonnées)

Dynamique lagrangienne non–lisse

Hypothèses fondamentales

- La vitesse $v = \dot{q}$ est une fonction à variations bornées. L'inconnue des équations du mouvement est sa limite à droite
$$v^+ = \dot{q}^+ \tag{2}$$
- La coordonnée q est absolument continue par le théorème fondamental de l'intégration de Lebesgue
$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^{t} v^+(t)\, dt \tag{3}$$
- L'accélération ($\dot{v} = \ddot{q}$ au sens usuel) est une mesure différentielle dv associée à v telle que
$$dv(]a,b]) = \int_{]a,b]} dv = v^+(b) - v^+(a) \tag{4}$$

Dynamique lagrangienne non–lisse

Définition (Dynamique lagrangienne non–lisse [Moreau, 1988])

$$\begin{cases} M(q)dv + F(q, v^+)dt = \iota \\ \\ v^+ = \dot{q}^+ \end{cases} \tag{5}$$

où ι la mesure de réaction généralisée.

Intérêts

- La formulation permet de prendre en compte des comportements complexes comme les accumulations finies en temps (Phénomène de Zenon)
- La formulation est utile pour les analyses mathématiques [Schatzman, 1973, 1978, Monteiro Marques, 1993]
- La dynamique non–lisse contient à la fois les équations d'impact et les équations du mouvement continu

Équations d'impact et équations du mouvement

En utilisant les densités des mesures différentielles, par rapport à la mesure de Lebesgue et les mesure discrètes, on obtient

Définition (Equations d'impact partout)

$$M(q)(v^+ - v^-)d\nu = pd\nu, \quad avec\ p = \frac{d\iota}{d\nu} \tag{6}$$

ou, de manière équivalente,

$$M(q(t_i))(v^+(t_i) - v^-(t_i)) = p_i, \tag{7}$$

Définition (Dynamique continue presque partout)

$$M(q)\dot{v}dt + F(q,v)dt = fdt \quad avec\ f = \frac{d\iota}{dt} \tag{8}$$

ou, de manière équivalente,

$$M(q)\dot{v}^+ + F(q,v^+) \quad = \quad f^+ \quad [dt - a.e.] \tag{9}$$

Le processus de balayage de Moreau du second ordre

Définition (Moreau [1983, 1988])

La clé de voûte de la formulation est l'inclusion des mesures en termes de vitesse :

$$\begin{cases} M(q)dv + F(t, q, v^+)dt = \iota \\ \\ v^+ = \dot{q}^+ \\ \\ -\iota \in N_{T_C(q)}(v^+) \end{cases} \tag{10}$$

Commentaires

Une inclusion qui concerne les mesures

Un cadre unique pour la dynamique non–lisse avec chocs inélastiques.

➜ Fondations du schéma numérique de Moreau–Jean

Le processus de balayage de Moreau du second ordre

La loi d'impact de Newton-Moreau

$$-\iota \in N_{T_C(q(t))}(v^+ + ev^-) \tag{11}$$

où e est le coefficient de restitution ($v^+ = -ev^-$)

Lemme de viabilité de Moreau

$$\begin{array}{c} 0 \leq g_{\mathrm{N}} \perp r_{\mathrm{N}} \geq 0 \\ \Updownarrow \\ -\mathbf{r}_{\mathrm{N}} \in N_{\mathbb{R}^+}(g_{\mathrm{N}}) \\ \Uparrow \\ -\mathbf{r}_{\mathrm{N}} \in N_{T_{\mathbb{R}^+}(g_{\mathrm{N}})}(u_{\mathrm{N}}) \\ \Updownarrow \\ \text{si } g_{\mathrm{N}} \leq 0 \text{ alors } 0 \leq u_{\mathrm{N}} \perp r_{\mathrm{N}} \geq 0 \end{array} \tag{12}$$

Principes des schémas à capture d'événements

1. Une formulation unifiée

$$\begin{cases} -mdv + fdt = \iota \\ \dot{q} = v^+ \\ 0 \leq \iota \perp v^+ \geq 0 \text{ si } q \leq 0 \end{cases} \tag{13}$$

2. Une intégration consistante

$$\int_{]t_k,t_{k+1}]} mdv = \int_{]t_k,t_{k+1}]} m\,dv = m(v^+(t_{k+1}) - v^+(t_k)) \approx m(v_{k+1} - v_k) \tag{14}$$

3. Une approximation consistante de l'inclusion en mesure

$$0 \leq \iota \perp v^+ \geq 0 \text{ si } q \leq 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} p_{k+1} \approx \displaystyle\int_{]t_k,t_{k+1}]} \iota \\ 0 \leq p_{k+1} \perp v_{k+1} \geq 0 \quad \text{ si } \tilde{q}_k \leq 0 \end{cases} \tag{15}$$

Le schéma de Moreau-Jean

[Jean and Moreau, 1987, Moreau, 1988, Jean, 1999]

$$
\begin{cases}
M(q_{k+\theta})(v_{k+1} - v_k) - hF_{k+\theta} = p_{k+1} = G(q_{k+\theta})P_{k+1}, \\[1ex]
q_{k+1} = q_k + hv_{k+\theta}, \\[1ex]
u_{k+1} = G^T(q_{k+\theta})\, v_{k+1} \\[1ex]
\quad \begin{array}{ll} 0 \leq u^\alpha_{k+1} + eU^\alpha_k \perp P^\alpha_{k+1} \geq 0 & \text{if} \quad \bar{g}^\alpha_{k,\gamma} \leq 0 \\ P^\alpha_{k+1} = 0 & \text{sinon} \end{array}
\end{cases}
\tag{16}
$$

avec

- $G(q) = \nabla_q g(q)$
- $\theta \in [0, 1]$
- $x_{k+\theta} = (1 - \theta)x_{k+1} + \theta x_k$
- $F_{k+\theta} = F(t_{k+\theta}, q_{k+\theta}, v_{k+\theta})$
- $\bar{g}_{k,\gamma} = g_k + \gamma h U_k, , \gamma \geq 0$

Un problème d'optimisation est résolu à chaque pas de temps.

Le schéma de Moreau-Jean

Avantages

Un schéma consistant, stable (robustesse)
qui respecte les invariants : équilibre, énergie, dissipation, ...

Améliorations récentes

- Nonsmooth generalized$-\alpha$ schemes [Chen et al., 2013, Brüls et al., 2014]
- Time discontinuous Galerkin methods [Schindler and Acary, 2013, Schindler et al., 2015]
- Stabilized index-2 formulation [Acary, 2014, 2013]
- Stabilized index-1 formulation [Brüls et al., 2018]
- Discrete variational integrators, geometric and symplectic properties [Capobianco and R. Eugster, 2016, Capobianco and Eugster, 2018]

CISM COURSES AND LECTURES NO. 302
INTERNATIONAL CENTRE FOR MECHANICAL SCIENCES

NONSMOOTH MECHANICS AND APPLICATIONS

EDITED BY

J.J. MOREAU/P.D. PANAGIOTOPOULOS

SPRINGER-VERLAG
WIEN GMBH

CONTENTS

UNILATERAL CONTACT AND DRY FRICTION IN FINITE FREEDOM DYNAMICS

J.J. Moreau
Université des Sciences et Techniques du Languedoc
Montpellier, France

ABSTRACT
An approach to the dynamics of mechanical systems with a finite number of degrees of freedom, involving unilateral constraints, is developed. In the n-dimensional linear spaces of forces and velocities, some classical concepts of Convex Analysis are used, but no convexity assumption is made concerning the constraint inequalities. The velocity is not supposed to be a differentiable function of time, but only to have locally bounded variation, so the role of the acceleration is held by a n-dimensional measure on the considered time interval. Dynamics is then governed by measure differential inclusions, which treat possible velocity jumps on the same footing as smooth motions. Possible collisions are described as soft, thus dissipative. Friction is taken into account under a recently proposed expression of Coulomb's law. These formulations have the advantage of generating numerical algorithms of time-discretization, able to handle, in particular, the nonsmooth effects arising from unilaterality and from dry friction.

Quelques perspectives et travaux actuels

1. Mécanique théorique non–lisse.
   Approche géométrique, caractère bien posé des modèles.
2. Méthodes numériques de résolution pour le frottement et la plasticité.
   Technique de pivotage, méthodes de projection relaxées et accélérées (Gauss–Seidel), méthodes de Newton semilisses, méthodes de points intérieurs, relaxation par lagrangien augmenté et point proximal, ...
3. Modélisation de lois d'interface complexes. Frottement de roulement, modèle de zone cohésives, rupture, usure, ...
4. Travaux expérimentaux sur les granulaires et "Data–Driven modeling"
5. Fluides complexes
   - Fluides quasi-fragiles visco-plastique(Bingham, ...)
   - Fluides multi–phasiques,
6. Modélisation pour l'environnement
   - Laves torrentielles, avalanches, chute de blocs, fluides à seuil, rhéologie complexe
   - Protection contre la houle côtière, modélisation de la banquise.
7. ...

Quelques perspectives et travaux actuels

1. Électronique
2. Commande optimale avec contraintes sur l'état et commande par modes glissants
3. Modélisation ≪ système ≫ (hydraulique, génie chimique)
4. Systèmes cyberphysiques et analyse non standard
5. Bio-mathématique
6. Mathématiques pour l'économie
7. …

Jean Jacques Moreau : une inspiration pour de nombreux chercheurs en Mécanique

- Modélisation des plaques, des cables et de la cohésion : P.D. Panagiotopoulos
- Dynamique non–lisse des systèmes multi-corps : C. Glocker, F. Pfeiffer
- Plasticité : N.S Quoc Son, B. Nayrolles, O. Débordes, P. Suquet, G. de Saxcé
- Mécanique de la rupture : J.-J. Marigo
- Thermo-mécanique non–lisse des milieux continus : M. Frémond, G. Del Piero.
- Mécanique du contact et du frottement : M. Jean, P. Ballard, P. Alart
- Génie civil : F. Maceri
- Mécanique des matériaux granulaires : F. Radjai, S. Roux
- Théorie de la commande : B. Brogliato, B. Mordukhovich

Quelques commentaires personnels en guise de conclusion

- Une production scientifique majeure en Mécanique théorique fruit d'une créativité impressionnante et d'une rigueur mathématique exemplaire
- Un cadre ouvert qui permet des applications nombreuses en sciences de l'ingénierie
- Une volonté de proposer des approches fournissant des méthodes numériques à travers ses contributions en tant que professeur émérite

La collection presque complète des œuvres de J.J. Moreau est réunie dans une collection HaL, une archive ouverte pérenne (Merci à François Gibier U. Montpellier)

Pour ma part, J.J. Moreau est au Panthéon des mécaniciens français de l'après–guerre au même titre que de Paul Germain et Jean Mandel, et dans la lignée d'une longue tradition de mécaniciens théoriques comme J.V. Boussinesq, P. Appell, P. Painlevé, A. Boulanger, J. Pérès, et J. Leray.

V. Acary. Projected event-capturing time-stepping schemes for nonsmooth mechanical systems with unilateral contact and Coulomb's friction. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 256 :224 – 250, 2013. ISSN 0045-7825. doi : 10.1016/j.cma.2012.12.012. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782512003829.

V. Acary. Energy conservation and dissipation properties of time-integration methods for the nonsmooth elastodynamics with contact. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, submitted, 2014.

V. Acary, F. Cadoux, C. Lemaréchal, and J. Malick. A formulation of the linear discrete coulomb friction problem via convex optimization. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 91(2) :155–175, 2011. ISSN 1521-4001. doi : 10.1002/zamm.201000073. URL http://dx.doi.org/10.1002/zamm.201000073.

O. Brüls, V. Acary, and A. Cardona. Simultaneous enforcement of constraints at position and velocity levels in the nonsmooth generalized-α scheme. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 281 :131–161, Nov. 2014. doi : 10.1016/j.cma.2014.07.025. URL http://hal.inria.fr/hal-01059823.

O. Brüls, V. Acary, and A. Cardona. On the Constraints Formulation in the Nonsmooth Generalized-α Method. In S. I. Publishing, editor, Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics. Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics, pages 335–374. 2018. URL https://hal.inria.fr/hal-01878550.

G. Capobianco and S. R. Eugster. Time finite element based moreau-type integrators. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 114(3) :215–231, 2018.

G. Capobianco and S. R. Eugster. A moreau-type variational integrator. PAMM, 16(1) :941–944, 2016.

Q. Z. Chen, V. Acary, G. Virlez, and O. Brüls. A nonsmooth generalized-α scheme for flexible multibody systems with unilateral constraints. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 96(8) :487–511, 2013. ISSN 1097-0207. doi : 10.1002/nme.4563. URL http://dx.doi.org/10.1002/nme.4563.

G. De Saxcé. Une généralisation de l'inégalité de fenchel et ses applications aux lois constitutives. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t 314,série II :125–129, 1992.

M. Jean. The non smooth contact dynamics method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177 : 235–257, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.

M. Jean and J. Moreau. Dynamics in the presence of unilateral contacts and dry friction : a numerical approach. In G. Del Pietro and F. Maceri, editors, Unilateral problems in structural analysis. II, pages 151–196. CISM 304, Spinger Verlag, 1987.

M. Monteiro Marques. Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems. Shocks and Dry Friction. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol.9. Birkhauser, Basel, 1993.

J. Moreau. Quadratic programming in mechanics : dynamics of one sided constraints. SIAM Journal on control, 4(1) : 153–158, 1966.

J. Moreau. La notion de surpotentiel et les liaisons unilatérales en élastoplastique. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 267a :954–957, 1968.

J. Moreau. Applications of convex analysis to the treatment of elasto-plastic systems. In P. Germain and B. Nayroles, editors, Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics, volume 503 of Lecture Notes in Mathematics, pages 56–89, 1976.

J. Moreau. Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques. cras, 296 série II :1473–1476, 1983.

J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In J. Moreau and P. Panagiotopoulos, editors, Nonsmooth mechanics and applications, number 302 in CISM, Courses and lectures, pages 1–82. CISM 302, Spinger Verlag, Wien- New York, 1988. Formulation mathematiques tire du livre Contacts mechanics.

J. Moreau. Some basics of unilateral dynamics. In F. Pfeiffer, editor, IUTAM Symposium on Multibody dynamics. Kluwer, August 3-7 1998.

J. Moreau. Numerical aspects of the sweeping process. cmame, 177 :329–349, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.

J. Moreau. An introduction to unilateral dynamics. In M. Frémond and F. Maceri, editors, Novel Approaches in Civil Engineering, volume 14 of Series : Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer Verlag, 2003.

J. Moreau. Facing the plurality of solutions in nonsmooth mechanics. Proc. Nonsmooth/Nonconvex Mechanics with Applications in Engineering, Thessaloniki, pages 3–12, 2006.

J. J. Moreau. Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 256 :871–874, 1963. URL `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02117973`.

J. J. Moreau. Sur la naissance de la cavitation dans une conduite. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 259 :3948–3950, 1964. URL `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01868117`.

J. J. Moreau. On unilateral constraints, friction and plasticity. In G. Capriz and e. G. Stampacchia, editors, New Variational Techniques in Mathematical Physics (C.I.M.E. II ciclo 1973, Edizioni Cremonese, Roma, 1974), pages 173–322, 1974.

M. Schatzman. Sur une classe de problèmes hyperboliques non linéaires. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série A, 277 :671–674, 1973.

M. Schatzman. A class of nonlinear differential equations of second order in time. nla, 2(3) :355–373, 1978.

T. Schindler and V. Acary. Timestepping schemes for nonsmooth dynamics based on discontinuous galerkin methods : Definition and outlook. Mathematics and Computers in Simulation, 95 :180–199, 2013. ISSN 0378-4754. doi : 10.1016/j.matcom.2012.04.012. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475412001231`.

T. Schindler, S. Rezaei, J. Kursawe, and V. Acary. Half-explicit timestepping schemes on velocity level based on time-discontinuous galerkin methods. Computer methods in Applied Mechanics in Engineering, 290(15) :250–276, 2015.