

# Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

`vincent.acary@inrialpes.fr`

JNRR '09. 04-06 Novembre,2009

INSTITUT NATIONAL  
DE RECHERCHE  
EN INFORMATIQUE  
ET EN AUTOMATIQUE



centre de recherche  
**GRENOBLE - RHÔNE-ALPES**

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

`vincent.acary@inrialpes.fr`

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

# Applications

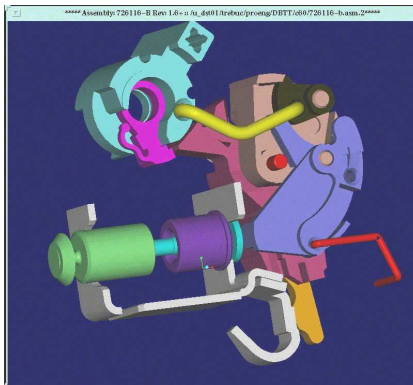
Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

## Systèmes mécaniques multi-corps avec du contact, du frottement et des impacts

Simulation d'un disjoncteur (INRIA/Schneider Electric)



Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

# Applications

## Systèmes mécaniques multi-corps avec du contact, du frottement et des impacts

### Robot bipède BIP



Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

[vincent.acary@inrialpes.fr](mailto:vincent.acary@inrialpes.fr)

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

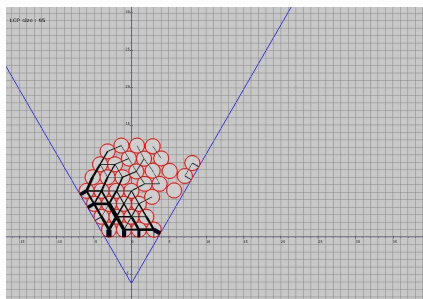
Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Systèmes mécaniques multi-corps avec du contact, du frottement et des impacts

### Empilement de billes avec interaction



Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

# Plan de l'exposé

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

[vincent.acary@inrialpes.fr](mailto:vincent.acary@inrialpes.fr)

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Formulation générique des équations du mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = T(t, q)v, \\ M(q)\dot{v} = F(t, q, v, u), \\ \dot{u} = d(t, q, v, u), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1a) \\ (1b) \\ (1c) \end{array}$$

- $q(t) \in \mathbf{R}^{n_q}$ , jeu de coordonnées
- $v(t) \in \mathbf{R}^{n_v}$ ,  $n_v \leq n_q$ , vitesse
- $T \in \mathbf{R}^{n_q \times n_v}$  opérateur de paramétrage (des rotations)
- $M \in \mathbf{R}^{n_v \times n_v}$  matrice d'inertie symétrique et positive (semi-)définie
- $F \in \mathbf{R}^{n_v}$  efforts appliqués au système et des effets gyroscopiques
- $u \in \mathbf{R}^{n_u}$  vecteur de commandes donné par une dynamique  $d$

→ **Équations Différentielles Ordinaires (EDO)**

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

# Formulation de la Dynamique régulière.

## Liaisons holonomes

$$g(t, q) = 0, \quad (2)$$

où  $g \in \mathbf{R}^{n_g}$  suffisamment régulière et dont la matrice Jacobienne,

$$G(t, q) = J_g(t, q) = \nabla_q^\top g(t, q) \in \mathbf{R}^{n_g \times n_q}, \quad (3)$$

est supposée de rang plein (on a au moins  $n_g \leq n_q$ ).

## Multiplicateurs de Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = T(t, q)v, \end{array} \right. \quad (4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(q)\dot{v} = F(t, q, v, u) - T^\top(t, q)G^\top(t, q)\lambda, \end{array} \right. \quad (4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = d(t, q, v, u, \lambda), \end{array} \right. \quad (4c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(t, q) = 0. \end{array} \right. \quad (4d)$$

•  $\lambda \in \mathbf{R}^{n_g}$  Multiplicateur de Lagrange

→ Équation Différentielle Algébrique (EDA)

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

# Formulation de la Dynamique régulière.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

## Reformulation des liaisons en vitesse

$$\dot{g}(t, q) = G(t, q)T(t, q)v + g_t(t, q) = 0, \quad (5)$$

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

## Reformulation des liaisons en accélération

$$\begin{aligned} \ddot{g}(t, q) &= G(t, q)T(t, q)\dot{v} \\ &+ \left[ \frac{d}{dt}(G(t, q)T(t, q)) + \frac{\partial}{\partial t}(G(t, q))T(t, q) \right] v + g_{tt}(t, q) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références



Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Formulation de la dynamique  
régulière.

Les Équations Différentielles  
Algébriques (EDA) et leur  
index

Intégration numérique en  
temps de la dynamique  
régulière

La dynamique non-régulière  
du contact frottant avec  
impacts

Intégration en temps  
spécifiques de la dynamique  
non-régulière

Un exemple dans Siconos :  
poursuite de trajectoires avec  
contact et impact

Références

## Formulation générale

$$\begin{cases} a) & \dot{q} = T(t, q)v, \\ b) & M(q)\dot{v} = F(t, q, v) - T^\top(t, q)G^\top(t, q)\lambda, \\ d) & g(t, q) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

## Propriétés

- Ouvrages classiques [BRENAN *et al.*, 1989 ; ASCHER & PETZOLD, 1998 ; GRIEPENTROG & MÄRZ, 1986 ; HAIRER & WANNER, 1996].
- Notion d'index différentiel :  
Nombre de fois ou l'on doit dériver la contrainte pour obtenir une système d'EDO pour les variables  $q, v$  et le multiplicateur  $\lambda$ .
- index 0  $\leftrightarrow$  EDO
- Plus l'index est élevé ( $\geq 2$ ), plus la simulation numérique est difficile :
  - Consistance des conditions initiales
  - ordre et précision des intégrateur

## Index par défaut des systèmes mécaniques

Dans le système (7), il convient de dériver trois fois la contrainte si la matrice

$$\begin{bmatrix} M(q) & T^\top(t, q)G^\top(t, q) \\ G(t, q)T(t, q) & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

est inversible pour presque tout  $t$  et  $q$  au voisinage de la solution.

## Réduction d'index

- Formulation en vitesse : index 2

$$\begin{cases} a) & \dot{q} = T(t, q)v, \\ b) & M(q)\dot{v} = F(t, q, v) - T^\top(t, q)G^\top(t, q)\lambda, \\ d) & \dot{g}(t, q) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

- Formulation en accélération : index 1

$$\begin{cases} a) & \dot{q} = T(t, q)v, \\ b) & M(q)\dot{v} = F(t, q, v) - T^\top(t, q)G^\top(t, q)\lambda, \\ d) & \ddot{g}(t, q) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

## Principes généraux de l'intégration des EDA

- Extensions non triviales des méthodes standards d'intégration des équations différentielles ordinaires raides BRENNAN *et al.* [1989] ; HAIRER *et al.* [1987] ; HAIRER & WANNER [1996] et ARNOLD [2008] pour une synthèse.
- Méthodes à un pas. Méthodes implicites de Runge–Kutta (IRK) et méthodes d'extrapolation
- Méthodes multi-pas et BDF(Backward differentiation formulas)
- Stabilisation et élimination de la violation des contraintes
- Améliorations pour la mécanique des systèmes multi-corps flexibles

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Méthodes à un pas. Résumé des propriétés

- Index 1 (contraintes en accélération).
  - Conservation de l'ordre (IRK) pour les variables différentielles
  - réduction de l'ordre pour les multiplicateurs [HAIRER *et al.*, 1987].
- Index 2 (contraintes en vitesse).
  - Réduction de l'ordre pour les variables différentielles et les multiplicateurs pour les méthodes génériques IRK [HAIRER *et al.*, 1987 ; BRENNAN & PETZOLD, 1989 ; HAIRER & WANNER, 1996 ; HAIRER & JAY, 1993 ; JAY, 1993].
  - Conservation de l'ordre pour les variables différentielles pour les méthodes IRK dites "stiffly accurate".
  - Pour les méthodes génériques, introduction des méthodes de RK projetées [ASCHER & PETZOLD, 1991] et partitionnées [MURUA, 1997] et spécialisées [JAY, 2006].
- Index 3 (contraintes en position).
  - Réduction de l'ordre en général HAIRER *et al.* [1987] due principalement à la propagation des erreurs sur les multiplicateurs.

## Codes

- ④ RADAU5 [HAIRER & WANNER, 1996] et le code HEM5 [BRASEY, 1994] pour une version adaptée aux systèmes mécaniques.
- ④ le code MEXX [LUBICH, 1991 ; LUBICH *et al.*, 1992] : extension des méthodes d'extrapolation dans le contexte de EDA

## Méthodes multi-pas et BDF. Résumé des propriétés

- Index 1 (contraintes en accélération). Introduites par Gear [GEAR, 1971]. Convergence à l'ordre élevé.
- Index 2 (contraintes en vitesse). Convergence jusqu'à l'ordre 6 [GRIEPENTROG & MÄRZ, 1986 ; LÖTSTEDT & PETZOLD, 1986] et [PETZOLD & LÖTSTEDT, 1986].
- Index 3 (contraintes en position). Convergence jusqu'à l'ordre 6 pour un pas de temps fixe [BRENNAN & ENGQUIST, 1988 ; LÖTSTEDT & PETZOLD, 1986].

## Remarques

- Résultats portent généralement sur les variables différentielles du système et non sur les multiplicateurs.
- "stabilized index-2 or GGL method" [GEAR *et al.*, 1985] et des méthodes équivalentes d'index 1 [GEAR, 1988].

## Codes

- DASSL et leurs améliorations DASRT, DASPK, DASOPT [PETZOLD, 1982].

## Résolution directe du cas d'index 3

- erreurs dans les multiplicateurs en position, en vitesse et en accélération se propagent respectivement à l'ordre  $\mathcal{O}(h^{-1})$ ,  $\mathcal{O}(h^{-2})$  et  $\mathcal{O}(h^{-3})$  [ARNOLD, 1995].
- Nécessité d'une résolution de ces contraintes extrêmement précise, sinon propagation des erreurs → chute de l'ordre apparent de la méthode.
- Méthode de changement d'échelle (“rescaling”) [PETZOLD & LÖTSTEDT, 1986] [BOTTASSO *et al.*, 2007] pour atténuer le problème.



## Dérive des contraintes

Formulation d'index réduit : les contraintes en position et voire en vitesses ne sont pas vérifiées en temps discret par la méthode numérique.

## Stabilisation et élimination de la violation des contraintes

- Quelques remèdes (voir [BAUCHAU & LAULUSA, 2008] pour une synthèse)
  - *Les méthodes de stabilisation* issues de la technique originale de Baumgarte [BAUMGARTE, 1972]
  - *Les méthodes de pénalisation* sont basées sur la régularisation de la contrainte  $g(t, q)$  en ajoutant dans le lagrangien un terme de la forme  $1/2p^2g^\top(t, q)g(t, q)$ .
  - *Les méthodes d'élimination par projections* sont basées sur une projection à chaque pas de temps du résultat de l'intégration numérique sur la variété invariante définie par les contraintes en position et en vitesse.

## Les améliorations pour la mécanique des systèmes multi-corps flexibles

- Les méthodes à un pas (IRK) et les méthodes multi-pas d'ordre élevé sont très coûteuses pour les grands systèmes ( $\geq 1000$  d.d.I.)
- Dynamique des structures flexibles : Méthode de Newmark [NEWMARK, 1959], méthode HHT [HILBER *et al.*, 1977 ; HUGHES & HULBERT, 1988] et  $\alpha$ -schémas généralisés [CHUNG & HULBERT, 1993] sont incontournables (robustesse et amortissement ajustable).
- Extension par GÉRADIN & CARDONA [2001] ; BRÜLS *et al.* [2008] convergence par [LUNK & SIMEON, 2006 ; JAY & NEGRUT, 2007] (index 2) et par ARNOLD & BRÜLS [2007] ; BRÜLS & ARNOLD [2008] ; BRÜLS & GOLINVAL [2008] (index 3). Comparaison BDF et les méthodes de Newmark et HHT. NEGRUT *et al.* [2009].

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Formulation lagrangienne régulière des contraintes unilatérales

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = v, \end{array} \right. \quad (11a)$$

$$M(q)\dot{v} + F(t, q, v, u) = G^T(t, q)\lambda, \quad (11b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = d(t, q, v, u, \lambda), \end{array} \right. \quad (11c)$$

$$g_k(t, q) = 0, \quad k \in \mathcal{E} \quad (11d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_k(t, q) \geq 0, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \lambda_k g_k(t, q) = 0 \quad k \in \mathcal{I}. \end{array} \right. \quad (11e)$$

- $\mathcal{E} \subset \mathbf{N}$  et  $\mathcal{I} \subset \mathbf{N}$  représentent respectivement les ensembles d'indices des contraintes bilatérales et unilatérales.

# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Condition de complémentarité. Condition de Signorini

$$\begin{aligned} g_k(t, q) \geq 0, \quad \lambda_k \geq 0, \quad \lambda_k g_k(t, q) = 0 \\ \Downarrow \\ 0 \leq g_k(t, q) \perp \lambda_k \geq 0 \\ \Downarrow \\ -\lambda_k \in N_{\mathbf{R}^+}(g_k(t, q)). \end{aligned} \tag{12}$$

- $N_K$  cône normal à un ensemble  $K$  (pour le cas convexe voir [MOREAU, 1967 ; ROCKAFELLAR, 1970]).

# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Équations de Lagrange → Inclusion Différentielle (ID)

$$- [M(q)\dot{v} + F(t, q, v, u)] \in N_{\Phi(t)}(q). \quad (13)$$

- Ensemble admissible

$$\Phi(t) = \{q \mid g_k(t, q) = 0, k \in \mathcal{E}, \quad g_k(t, q) \geq 0, k \in \mathcal{I}\}, \quad (14)$$

- Forces généralisées

$$- G^T(t, q)\lambda \in N_{\Phi(t)}(q) \quad (15)$$

# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

Dynamique généralement non régulière Présence d'impacts, sauts dans les vitesses → Nouveau cadre mathématique

## Cadre non régulier [MOREAU, 1988a]

- les vitesses → fonctions à variations bornées en temps
- l'accélération → mesure différentielle, notée  $dv$  associée à la vitesse  $v$
- les multiplicateurs → mesure d'impulsion  $di$
- Contrainte unilatérale sous forme d'inclusion conduit à

$$-G^\top(q) di \in N_\Phi(q). \quad (16)$$

- Introduction d'une loi d'impact (Newton)

$$v^+(t) = -ev^-(t), \text{ pour tout } t \text{ tel que } g(q) = 0. \quad (17)$$

où  $e$  est le coefficient de restitution.

# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

## Processus de rafle de Moreau

$$- [M(q)dv + F(t, q, v^+)dt] \in N_{T_\Phi(q)}(v^+ + ev^-). \quad (18)$$

- Inclusion Différentielles à Mesures (IDM)

## En complémentarité ...

$$\left\{ \begin{array}{l} - [M(q)dv + F(t, q, v^+)dt] = -G^\top(q) di, \end{array} \right. \quad (19a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = G(q)v, \end{array} \right. \quad (19b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } g(q) \leq 0, \text{ alors } 0 \leq U^+ + eU^- \perp di \geq 0. \end{array} \right. \quad (19c)$$

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références



# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Décomposition des mesures différentielles

$$\begin{aligned} dv &= \gamma dt + (v^+ - v^-)d\nu, \\ dr &= \lambda dt + pd\nu, \end{aligned} \tag{20}$$

- Omission des mesures continues singulières
- $\gamma(t) = \dot{v}(t) dt$  p.p. accélération classique
- $\lambda(t)$  multiplicateur classique
- $d\nu = \sum_i \delta_{t_i}$  est une somme de mesures de Dirac supportées aux instants  $t_i$ .
- $pd\nu = \sum_i p_i \delta_{t_i}$ .

# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

## Décomposition de la dynamique

- les équations d'impact aux instants  $t_i$ ,

$$\begin{cases} M(q(t_i))(v^+(t_i) - v^-(t_i)) = G^\top(q(t_i))p_i, \\ U^+(t_i) = G(q(t_i))v^+(t_i), \quad U^-(t_i) = G(q(t_i))v^-(t_i), \\ 0 \leq U^+(t_i) + eU^-(t_i) \perp p_i \geq 0, \end{cases} \quad (21)$$

- et les équations du mouvement régulier entre les impacts pour  $t \in ]t_i, t_{i+1}[$

$$\begin{cases} M(q)\gamma + F(t, q, v) = G^\top(q) \lambda, \\ U = G(q)v, \\ \text{si } g(q) \leq 0, \text{ alors } 0 \leq U \perp \lambda \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

## Lois de forces plus complexes

- Introduction d'un repère local au contact :  $C$  noté  $(C, n, t_1, t_2)$

effort de contact :  $R = R_N n + R_T$  avec  $R_T = R_{T_1} t_1 + R_{T_2} t_2$

vitesse locale :  $U = U_N n + U_T$

- Relations cinématiques et sthéniques

$$U = G(t, q)\dot{q} + j(t), \quad r = G^\top(t, q)R \quad (23)$$

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Frottement de Coulomb

$\mathbf{C} = \{R, \|R_T\| \leq \mu R_N\}$  cône de frottement où  $\mu$  est le coefficient de frottement.

$$\text{si } g_N \leq 0, \begin{cases} \text{Si } U_T = 0 & \text{alors } R \in \mathbf{C} \\ \text{Si } U_T \neq 0 & \text{alors } R \in \partial\mathbf{C} \text{ et } \exists a \geq 0 \text{ tel que } R_T = -aU_T \end{cases} \quad (24)$$

# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

En complémentarité sur un cône. [ACARY & BROGLIATO, 2008 ; ACARY & CADOUX, 2009 ; CADOUX, 2009]...

$$\begin{aligned} -\hat{U} \triangleq - \begin{bmatrix} U_N + \mu \|U_T\| \\ U_T \end{bmatrix} \in N_C(R) \\ \Downarrow \\ \mathbf{C}^* \ni \hat{U} \perp R \in \mathbf{C} \\ \Downarrow \\ -R \in N_{\mathbf{C}^*}(\hat{U}) \end{aligned} \quad (25)$$

où  $\mathbf{C}^*$  est le cône dual de  $\mathbf{C}$  (voir [ROCKAFELLAR, 1970]).

# La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

**La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts**

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Inclusion différentielle à mesure avec frottement

$$\left\{ \begin{array}{l} M(q)dv + F(t, q, v^+)dt = T^\top(t, q)G^\top(t, q)dl \\ U^+ = G(t, q)T(t, q)v^+ + j(t), \quad U^- = G(t, q)T(t, q)v^- + j(t) \\ \text{Si } g(q) \leq 0 \text{ alors } -dl \in N_{C^*}(\hat{U}^+ + eU_N^-n) \text{ sinon } dl = 0 \end{array} \right. \quad (26)$$

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Deux grandes classes d'intégrateurs

- 1 les schémas à détection d'évènements (event-driven schemes)  
Principe : On intègre la dynamique régulière (22) avec un intégrateurs standards pour DAE entre deux évènements et l'on résout les équations d'impact à l'instant de l'évènement.
- 2 les schémas à capture d'évènements (time-stepping schemes).  
Principe : Intégration directe de l'inclusion différentielle à mesures

## Schémas à détection d'évènements (event-driven schemes)

- ⊕ Ordre de précision élevé sur les phases régulières
- ⊖ Pas de preuve de convergence
- ⊖ Extrême sensibilité aux seuils numériques de détection d'évènements et de statuts des contacts
- ⊖ Réduction d'index coûteuse et difficile en particulier pour le contact avec frottement 3D.
- ⊖ Problème aux accumulations d'évènements en temps fini

Adapté pour :

- nombre d'évènements faible et évènements bien séparés

Références : [PFEIFFER & GLOCKER, 1996 ; ABADIE, 2000], [ACARY & BROGLIATO, 2008, Chapitre 8].

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références



# Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Schémas à capture d'évènements (time-stepping schemes).

- ⊕ Preuve de convergence [MONTEIRO MARQUES, 1993 ; PAOLI & SCHATZMAN, 2002a,b ; PAOLI, 2005].
- ⊕ Robustesse et stabilité sur des problèmes de grandes tailles
- ⊕ Intégration des problèmes avec accumulations d'événements en temps fini
- ⊖ Ordre de précision faible ( $\leq 1$ )

Adapté pour :

- Nombre d'évènements élevé voire infini
- Applications complexes comme les matériaux granulaires, les chaînes cinématiques avec jeu dans les liaisons, etc..

Références : [MOREAU, 1988b, 1994, 1999 ; JEAN, 1999 ; PAOLI & SCHATZMAN, 2002a,b], [ACARY & BROGLIATO, 2008, Chapitre 10].

# Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Le schéma à capture d'événements de Moreau

$$\left\{ \begin{array}{l} M(\mathbf{q}_{k+\theta})(\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k) - h\tilde{\mathbf{F}}_{k+\theta} = \mathbf{G}^\top(\mathbf{q}_{k+\theta})\mathbf{P}_{k+1}, \\ \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + h\mathbf{v}_{k+\theta}, \\ \mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{G}(\mathbf{q}_{k+\theta})\mathbf{v}_{k+1} \\ -\mathbf{P}_{k+1} \in N_{T_{\mathbb{R}_+^m}(\tilde{\mathbf{g}}_{N,k+\gamma})}(\mathbf{U}_{k+1} + \mathbf{e}\mathbf{U}_k), \\ \tilde{\mathbf{g}}_{N,k+\gamma} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_k) + h\gamma\mathbf{U}_k, \quad \gamma \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (27a) \\ (27b) \\ (27c) \\ (27d) \\ (27e) \end{array}$$

- $\theta \in [0, 1], \gamma \geq 0$   $\mathbf{x}_{k+\theta} = (1 - \theta)\mathbf{x}_{k+1} + \theta\mathbf{x}_k$ .
- $\tilde{\mathbf{g}}_{N,k+\gamma}$  est une prédiction des contraintes actives.
- $\tilde{\mathbf{F}}_{k+\theta}$  discrétisation consistante des efforts appliqués au système

## Pourquoi cela marche ?

- Traitement entièrement implicite des contraintes au niveau des vitesses
- Ecriture du schéma en vitesse/impulsion.
- Approximation non pas de  $\lambda$  mais de l'impulsion

$$P_{k+1} \approx \int_{]t_k, t_{k+1}] } dl. \quad (28)$$

→ Consistance lors des impacts

## Applications

Effacité sur de nombreuses applications de grandes tailles ( $10^3$ –  $10^6$  d.d.l.) (voir par exemple MOREAU [1994] ; RADJAI & WOLF [1998] ; BRATBERG *et al.* [2002] ; RADJAI & ROUX [2002] ; ZERVOS *et al.* [2000] ; RENOUF *et al.* [2004] ; RENOUF & ALART [2004] ; SAUSSINE *et al.* [2006] ; ACARY & JEAN [1998, 2000] ; JEAN *et al.* [2001] ; ACARY & MONERIE [2006])

## Résolution du problème discret

- Méthodes de Newton généralisées ALART & CURNIER [1991] ; CHRISTENSEN & PANG [1998]
- Méthodes de projection/splitting pour les inéquations variationnelles FACCHINEI & PANG [2003] ; DE SAXCÉ & FENG [1991, 1998] ; JOURDAN *et al.* [1998]
- Méthodes de point fixe sur le seuil de frottement JEAN & TOUZOT [1988] ; HASLINGER [1984] ; HASLINGER *et al.* [1996]
- Méthodes sur la minimisation d'une fonctionnelle CADOUX [2009]

Une revue des méthodes de résolution de ce problème peut être trouvée dans ACARY & BROGLIATO [2008] ; WRIGGERS [2006] ; T.A. [2003] et STUDER [2009].

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

**Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière**

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

# Un exemple de mise en œuvre et d'application dans Siconos

## La plateforme Siconos

Une liste non exhaustive des fonctionnalités peut être dressée :

- SICONOS/NUMERICS C, F77
  - Solveurs de complémentarité linéaire et non linéaire
  - Solveurs de problème de frottement 3D avec impact par différentes techniques
  - Méthodes de Newton généralisées
- SICONOS/KERNEL C++
  - Modélisation des systèmes mécaniques lagrangiens et de Newton-Euler
  - Modélisation des systèmes du premier ordre non réguliers (Système de Filippov, de complémentarité linéaire et non linéaire)
  - Simulation par schémas à capture d'évènements et détection d'évènements.
  - Gestion des entrées/Sorties pour la commande (Actionneurs et Capteurs)
- SICONOS/FRONTEND
  - Interface Python auto-générée
  - Interface partielle pour Matlab et Scilab
- SICONOS/EXAMPLES
  - Exemples de Mécanique
  - Exemples de Robotique (robot bipède, bras manipulateurs, Yo-Yo)
  - Exemples d'Automatique (commande par modes glissants, Observateur)
  - Exemples d'Électronique (convertisseurs de puissance)
- SICONOS/CONTROL et SICONOS/MULTIBODY

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

# Un exemple de mise en œuvre et d'application dans Siconos

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## La plateforme Siconos

- Logiciel open-source distribué sous licence GPL.
- informations et téléchargement <http://siconos.gforge.inria.fr>.
- Pour une présentation plus détaillée de la plate-forme, on renvoie à [ACARY & PÉRIGNON, 2007] et [ACARY & BROGLIATO, 2008].

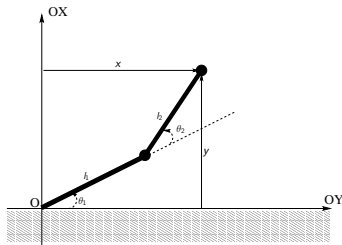
# Un exemple de mise en œuvre et d'application dans Siconos

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

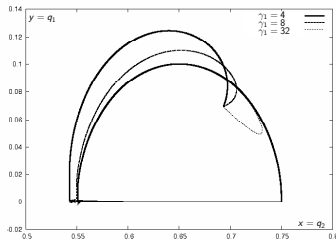
Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

## Poursuite de trajectoires avec contact et impact



(a) Manipulateur planaire à deux degrés de liberté



(b) Simulation de la poursuite de la trajectoire en fonction d'un gain de la commande  $\gamma_1$ .

Référence pour la commande :

[BOURGEOT & BROGLIATO, 2005 ; MORARESCU & BROGLIATO, in press*b*,i].

Référence pour la mise en œuvre numérique [ACARY *et al.*, 2008]

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références



# Un exemple de mise en œuvre et d'application dans Siconos

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

## Poursuite de trajectoires avec contact et impact

$h \backslash e_N$	$10^{-3}s$	$10^{-4}s$	$10^{-5}s$	$10^{-6}s$
0.2	$n_i = 3$	$n_i = 5$	$n_i = 6$	$n_i = 8$
0.5	$n_i = 6$	$n_i = 9$	$n_i = 12$	$n_i = 16$
0.7	$n_i = 9$	$n_i = 16$	$n_i = 23$	$n_i = 29$
0.9	$n_i = 23$	$n_i = 40$	$n_i = 64$	$n_i = 81$
0.95	$n_i = 32$	$n_i = 67$	$n_i = 108$	$n_i = 161$

**TAB.:** Nombre d'impact simulé en fonction du pas de temps et du coefficient de restitution

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

## Ecole de printemps

Mécanique non régulière. Modélisation et simulation  
Aussois, 14–18 Juin 2010.

[http://www.inrialpes.fr/bipop/NonSmoothMechanicsSeminars  
/BipopSpringSchool2010/index.html](http://www.inrialpes.fr/bipop/NonSmoothMechanicsSeminars/BipopSpringSchool2010/index.html)

Merci de votre attention.

Méthodes numériques pour  
la simulation des systèmes  
multi-corps en présence de  
contact, de frottement et  
d'impacts.

Vincent Acary

[vincent.acary@inrialpes.fr](mailto:vincent.acary@inrialpes.fr)

Formulation de la dynamique  
régulière.

Les Équations Différentielles  
Algébriques (EDA) et leur  
index

Intégration numérique en  
temps de la dynamique  
régulière

La dynamique non-régulière  
du contact frottant avec  
impacts

Intégration en temps  
spécifiques de la dynamique  
non-régulière

Un exemple dans Siconos :  
poursuite de trajectoires avec  
contact et impact

Références

M. ABADIE. Dynamic simulation of rigid bodies : Modelling of frictional contact. B. BROGLIATO, editor, *Impacts in Mechanical Systems : Analysis and Modelling*, volume 551 of *Lecture Notes in Physics (LNP)*, pp. 61–144. Springer, 2000.

V. ACARY & B. BROGLIATO. *Numerical Methods for Nonsmooth Dynamical Systems : Applications in Mechanics and Electronics*, volume 35 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag, 2008.

V. ACARY & F. CADOUX. *5th Contact Mechanics International Symposium CMIS2009*, chapter Applications of an existence result for the Coulomb friction problem. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag, 2009.

V. ACARY & M. JEAN. Numerical simulation of monuments by the contacts dynamics method. DGEMN-LNEC-JRC, editor, *Monument-98, Workshop on seismic performance of monuments*, pp. 69–78. Laboratório Nacional de engenharia Civil (LNEC), November 12-14 1998.

V. ACARY & M. JEAN. Numerical modeling of three dimensional divided structures by the non smooth contact dynamics method : Application to masonry structure. B.H.V. TOPPING, editor, *The Fifth international Conference on Computational Structures Technology 2000*, pp. 211–222. Civil-Comp Press, 6-8 September 2000.

V. ACARY & Y. MONERIE. Nonsmooth fracture dynamics using a cohesive zone approach. Research Report RR-6032, INRIA, 2006.

V. ACARY, C.I. MORARESCU, F. PÉRIGNON & B. BROGLIATO. Numerical simulation of nonsmooth systems and switching control with the siconos/control toolbox. *6th Euromech Nonlinear Dynamics Conference, ENOC 2008*, St Petersburg., 29 June 2008.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

- V. ACARY & F. PÉRIGNON. An introduction to Siconos. Technical Report TR-0340, INRIA, <http://hal.inria.fr/inria-00162911/en/>, 2007.
- P. ALART & A. CURNIER. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3), pp. 353–375, 1991.
- M. ARNOLD. A perturbation analysis for the dynamical simulation of mechanical multibody systems. *Appl. Numer. Math.*, 18, pp. 37–56, 1995.
- M. ARNOLD. Numerical methods for simulation in applied dynamics. In ARNOLD & SCHIEHLEN [2008], pp. 191–246.
- M. ARNOLD & O. BRÜLS. Convergence of the generalized- $\alpha$  scheme for constrained mechanical systems. *Multibody System Dynamics*, 18(2), pp. 185–202, 2007.
- M. ARNOLD & W. SCHIEHLEN, editors. *Simulation Techniques in Applied Dynamics*, volume 507 of *CISM Courses and Lectures*. Springer, 2008.
- U. ASCHER & L. R. PETZOLD. Projected implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations. *Siam J. Numer. Anal.*, 28, pp. 1097–1120, 1991.
- U.M. ASCHER & L.R. PETZOLD. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential–Algebraic Equations*. SIAM, 1998.
- O.A. BAUCHAU & A. LAULUSA. Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(1), page 011005, 2008.
- J. BAUMGARTE. Stabilization of constraints and integral of motion for nonpenetrating rigid bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1, pp. 1–16, 1972.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

[vincent.acary@inrialpes.fr](mailto:vincent.acary@inrialpes.fr)

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

C.L. BOTTASSO, O. BAUCHAU & A. CARDONA. Time-step-size-independent conditioning and sensitivity to perturbations in the numerical solution of index three differential algebraic equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2007.

J.-M. BOURGEOT & B. BROGLIATO. Tracking control of complementary lagrangian systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15 (6), pp. 1839–1866, 2005.

V. BRASEY. HEM5 users's guide. Technical report, Université de Genève, Suisse, 1994.

I. BRATBERG, F. RADJAI & A. HANSEN. Dynamic rearrangements and packing regimes in randomly deposited two-dimensional granular beds. *Physical Review E, Stat. Nonlin. Soft Matter Phys.*, 66(3), page (3 Pt 1) :031303, 2002.

K.E. BRENAN, S. CAMPBELL & L.R. PETZOLD. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. North-holland, 1989.

K.E. BRENAN & B.E. ENQUIST. Backward differentiation approximations of nonlinear differential/algebraic systems. *Mathematics of Computation*, 51(184), pp. 659–676, 1988.

K.E. BRENAN & L.R. PETZOLD. The numerical solution of higher index differential/algebraic equations by implicit methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26(4), pp. 976–996, 1989.

O. BRÜLS & M. ARNOLD. The generalized-alpha scheme as a linear multistep integrator : Toward a general mechatronic simulator. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 3(4), 2008.

O. BRÜLS, A. CARDONA & M. GÉRADIN. Modeling, simulation and control of flexible multibody systems. In ARNOLD & SCHIEHLEN [2008], pp. 21–74. 

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

- O. BRÜLS & J.C. GOLINVAL. On the numerical damping of time integrators for coupled mechatronic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6–7), pp. 577–588, 2008.
- F. CADOUX. *Analyse convexe et optimisation pour la dynamique non-régulière*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble I, 2009.
- P.W. CHRISTENSEN & J.S. PANG. Frictional contact algorithms based on semismooth newton methods. M. FUKUSHIMA & L. QI, editor, *Reformulation - Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods*, pp. 81–116, Dordrecht, 1998. Kluwer Academic Publishers.
- J. CHUNG & G.M. HULBERT. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized- $\alpha$  method. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E.*, 60, pp. 371–375, 1993.
- G. DE SAXCÉ & Z.-Q. FENG. The bipotential method : A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4), pp. 225–245, 1998.
- G. DE SAXCÉ & Z.-Q. FENG. New inequality and functional for contact with friction : The implicit standard material approach. *Mech. Struct. & Mach.*, 19, pp. 301–325, 1991.
- F. FACCHINEI & J. S. PANG. *Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, volume I & II of *Springer Series in Operations Research*. Springer Verlag NY. Inc., 2003.
- C.W. GEAR. *Numerical Initial Value Problems of Ordinary Differential Equations*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1971.
- C.W. GEAR. Differential–algebraic equation index transformations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 9(1), 1988.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

- C.W. GEAR, B. LEIMKUHLER & G.K. GUPTA. Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12–13, pp. 77–90, 1985.
- E. GRIEPENTROG & R. MÄRZ. *Differential–Algebraic Equations and their Numerical Treatment*. Teubner, Leipzig, 1986.
- M. GÉRARDIN & A. CARDONA. *Flexible Multibody Dynamics : A finite element Approach*. J. Wiley & Sons, New York, 2001.
- E. HAIRER & L. JAY. *Contributions in numerical mathematics*, chapter Implicit Runge–Kutta methods for higher index differential-algebraic systems, pp. 213–224. Number 2 in World Sci. Ser. Appl. Anal. Springer, 1993.
- E. HAIRER, CH. LUBICH & M. ROCHE. *The Numerical Solution of Differential–Algebraic Systems by Runge–Kutta Methods*. Springer–Verlag, 1987.
- E. HAIRER & G. WANNER. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer, 1996.
- J. HASLINGER. Least square method for solving contact problems with friction obeying coulomb's law. *Applications of mathematics*, 29(3), pp. 212–224, 1984.
- J. HASLINGER, I. HLAVÁČEK & J. NEČAS. Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics. P.G. CIARLET & J.L. LIONS, editors, *Handbook of Numerical Analysis*, volume IV, Part 2, pp. 313–485, Amsterdam, 1996, 1996. North-Holland.
- H.M. HILBER, T.J.R. HUGHES & R.L. TAYLOR. Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, 5, pp. 283–292, 1977.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

- T.J.R. HUGHES & M. HULBERT. Space-time finite element for elastodynamics : Formulation and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66, pp. 339–363, 1988.
- L. JAY. Convergence of a class of Runge-Kutta methods for differential-algebraic systems of index 2. *BIT*, 33(1), pp. 137–150, 1993.
- L. JAY. Specialized Runge-Kutta methods for index 2 differential algebraic equations. *Math. Comput.*, 75, pp. 641–654, 2006.
- L. JAY & D. NEGRUT. Extensions of the HHT–method to differential-algebraic equations in mechanics. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 26, pp. 190–208, 2007.
- M. JEAN. The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177, pp. 235–257, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.
- M. JEAN, V. ACARY & Y. MONERIE. Non-smooth contact dynamics approach of cohesive materials. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1789), pp. 2497–2518, 15 December 2001. Non-smooth Mechanics, A Theme Issue compiled and edited by F.G. Pfeiffer.
- M. JEAN & G. TOUZOT. Implementation of unilateral contact and dry friction in computer codes dealing with large deformations problems. *J. Méc. Théor. Appl.*, 7(1), pp. 145–160, 1988.
- F. JOURDAN, P. ALART & M. JEAN. A Gauss-Seidel like algorithm to solve frictional contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155, pp. 31–47, 1998.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références



- P. LÖTSTEDT & L.R. PETZOLD. Numerical solution of nonlinear algebraic equations with algebraic constraints : I - convergence results for backward differentiation formulas. *Mathematics of Computation*, 46 (174), pp. 491–516, 1986.
- CH. LUBICH. Extrapolation integrators for constrained multibody systems. *IMPACT Comp. Sci. Eng.*, 3, pp. 213–243, 1991.
- CH. LUBICH, U. NOWAK, U. PÖHLE & CH. ENGSTLER. MEXX – Numerical software for the integration of constrained mechanical multibody systems. Technical report, Konrad-Zuse-Zentrum für informationstechnik Berlin, Germany, 1992.
- CH. LUNK & B. SIMEON. Solving constrained mechanical systems by the family of Newmark and  $\alpha$ -methods. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 86(10), pp. 772–784, 2006.
- M.D.P. MONTEIRO MARQUES. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems. Shocks and Dry Friction*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol.9. Birkhauser, Basel, 1993.
- C.I. MORARESCU & B. BROGLIATO. Passivity-based switching control of flexible-joint complementarity mechanical systems. *Automatica*, in pressa.
- C.I. MORARESCU & B. BROGLIATO. Trajectory tracking control of multiconstraint complementarity lagrangian systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, in pressb.
- J.J. MOREAU. *Fonctionnelles Convexes*. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, subventionné par le CNRS, Collège de France, Paris., 1967.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

- J.J. MOREAU. Bounded variation in time. J.J. MOREAU, P.D. PANAGIOTOPOULOS & G. STRANG, editors, *Topics in Nonsmooth Mechanics*, pp. 1–74, Basel, 1988a. Birkhäuser.
- J.J. MOREAU. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. J.J. MOREAU & PANAGIOTOPOULOS P.D., editors, *Nonsmooth Mechanics and Applications*, number 302 in CISM, Courses and lectures, pp. 1–82. CISM 302, Springer Verlag, Wien- New York, 1988b.
- J.J. MOREAU. Some numerical methods in multibody dynamics : Application to granular materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, supp. (4), pp. 93–114, 1994.
- J.J. MOREAU. Numerical aspects of the sweeping process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177, pp. 329–349, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.
- A. MURUA. Partitioned half-explicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic systems of index 2. *Computing*, 59(1), pp. 43–61, 1997.
- D. NEGRUT, L.O. JAY & N. KHUDE. A discussion of low-order numerical integration formulas for rigid and flexible multibody dynamics. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 4, 2009.
- N.N. NEWMARK. A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 85(EM3), pp. 67–94, 1959.
- L. PAOLI. An existence result for non-smooth vibro-impact problems. *Journal of Differential Equations*, 211, pp. 247–281, 2005.
- L. PAOLI & M. SCHATZMAN. A numerical scheme for impact problems I : The one-dimensional case. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 40(2), pp. 702–733, 2002a.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

[vincent.acary@inrialpes.fr](mailto:vincent.acary@inrialpes.fr)

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

- L. PAOLI & M. SCHATZMAN. A numerical scheme for impact problems II : The multi-dimensional case. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 40(2), pp. 734–768, 2002b.
- L.R. PETZOLD. DASSL. A differential/algebraic system solver. Technical report, Lawrence Livermore National Lab., CA (United States), 1982.
- L.R. PETZOLD & P. LÖTSTEDT. Numerical solution of nonlinear algebraic equations with algebraic constraints : II - Practical implementation. *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, 7(3), pp. 720–733, 1986.
- F. PFEIFFER & C. GLOCKER. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. Non-linear Dynamics*. John Wiley & Sons, 1996.
- F. RADJAI & S. ROUX. Turbulentlike fluctuations in a quasistatic flow of granular media. *Physical Review Letters*, 89, page 064302, 2002.
- F. RADJAI & D.E. WOLF. Features of static pressure in dense granular media. *Granular Matter*, 1(1), pp. 3–8, 1998.
- M. RENOUF & P. ALART. Conjugate gradient type algorithms for frictional multicontact problems : applications to granular materials. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194(18-20), pp. 2019–2041, 2004.
- M. RENOUF, F. DUBOIS & P. ALART. A parallel version of the Non Smooth Contact Dynamics algorithm applied to the simulation of granular media. *J. Comput. Appl. Math.*, 168, pp. 375–38, 2004.
- R.T. ROCKAFELLAR. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- G. SAUSSINE, F. DUBOIS, C. BOHATIER, C. CHOLET, P.E. GAUTIER & J.J. MOREAU. Modelling ballast behaviour under dynamic loading, part 1 : a 2D polygonal discrete element method approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(19–22), pp. 2841–2859, 2006.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références

- C. STUDER. *Numerics of Unilateral Contacts and Friction*. – *Modeling and Numerical Time Integration in Non-Smooth Dynamics*, volume 47 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer Verlag, 2009.
- LAURSEN. T.A. *Computational Contact and Impact Mechanics – Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer Verlag, 2003. 1st ed. 2002. Corr. 2nd printing,.
- P. WRIGGERS. *Computational Contact Mechanics*. Springer Verlag, second edition, 2006. originally published by John Wiley & Sons Ltd., 2002.
- A. ZERVOS, I. VARDOLAKIS, M. JEAN & P. LERAT. Numerical investigation of granular interfaces kinematics. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 5(4), pp. 305–324, 2000.

Méthodes numériques pour la simulation des systèmes multi-corps en présence de contact, de frottement et d'impacts.

Vincent Acary

vincent.acary@inrialpes.fr

Formulation de la dynamique régulière.

Les Équations Différentielles Algébriques (EDA) et leur index

Intégration numérique en temps de la dynamique régulière

La dynamique non-régulière du contact frottant avec impacts

Intégration en temps spécifiques de la dynamique non-régulière

Un exemple dans Siconos : poursuite de trajectoires avec contact et impact

Références