Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

Contenu du Chapitre 1

Notations

On notera $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine de $\mathbb{R}^n$. Un élément $x \in \Omega$ peut être représenté par ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ notées :

$$x = (x_i)_{i=1\ldots n}. \tag{1.0.1}$$

Chaque coordonnée sera considérée comme une variable indépendante. On appellera d'ailleurs les x_i les variables indépendantes d'un problème.

Si le temps intervient, on notera explicitement une des variables t. On notera par I un intervalle de temps. Lorsque le problème est bi-dimensionnelle, $n = 2$, on notera plus communément les variables indépendantes x et y.

L'inconnue sera le plus souvent une fonction de ces variables indépendantes que l'on notera :

$$\begin{aligned} u : \Omega \subset \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^m && (1.0.2)\\ x &\mapsto u(x), && (1.0.3) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} u : I \times \Omega \subset \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R}^m && (1.0.4)\\ t, x &\mapsto u(t, x), && (1.0.5) \end{aligned}$$

si le temps intervient. On parle aussi de variables dépendantes du problème pour les coordonées $u_j, j = 1 \ldots m$.

Dans le cas où l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$, i.e., $m = 1$, on parle alors du "cas scalaire". On notera alors les dérivées partielles de u par rapport à x_i $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, ou plus simplement, u_{x_i}, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Le gradient ∇u est le vecteur colonne rassemblant les u_{x_i} c'est à dire

$$\nabla u = [u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}]^T .$$

Dans le "cas vectoriel", on notera alors les dérivées partielles de u_j par rapport à x_i $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}$, ou plus simplement, u_{j,x_i}. La matrice jacobienne rassemble alors les dérivées partielles, c'est à dire

$$\nabla u^T = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right].$$

1.1 Définitions générales

Envisageons, tout d'abord le cas scalaire $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

Définition 1.1.1 Une équation différentielle est une relation entre les dérivées (partielles) d'une fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ qui peut formellement se mettre sous la forme :

$$F(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}, \ldots) = 0 \tag{1.1.1}$$

❏

Si la relation ne fait pas intervenir les dérivées (partielles) de u, on parle d'équation algébrique.

Une équation différentielle peut être caractérisée par les définitions suivantes.

Définition 1.1.2 On définit l'*ordre d'une équation différentielle* comme l'ordre de dérivation le plus grand des dérivées (partielles) apparaissant dans la relation (1.1.1).

❏

Définition 1.1.3 Si la relation (1.1.1) peut se mettre sous la forme d'un polynôme, on définit le *degré d'une équation différentielle* comme le degré du polynôme formé par les dérivées partielles d'ordre le plus élevé.

❏

Enfin, on peut définir les notions de linéarité et de quasi-linéarité des équations différentielles.

Définition 1.1.4 On dit qu'une équation différentielle est quasi-linéaire si elle est de degré 1.

❏

De façon équivalente, on dit aussi qu'une équation différentielle est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé.

Définition 1.1.5 On dit qu'une équation différentielle est linéaire si la relation (1.1.1) peut se mettre sous la forme d'un polynôme de degré 1 dont les coefficients ne dépendent que des variables indépendantes x :

$$a(x) + b(x)\,u + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(x)\,u_{x_i x_j} + \ldots = 0 \tag{1.1.2}$$

Lorsque les coefficients du polynôme ne dépendent plus de x, on parle alors d'équation différentielle linéaire à coefficients constants.

❏

Afin de préciser une propriété fondamentale des équations linéaires, le principe de superposition, on définit la notion d'homogénéité d'une équation.

Définition 1.1.6 On dit qu'une équation différentielle linéaire est homogène si elle ne contient pas de terme indépendant de u et de ses dérivées. Elle peut se mettre sous la forme :

$$b(x)\,u + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,u_{x_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(x)\,u_{x_i x_j} + \ldots = 0 \tag{1.1.3}$$

❏

En d'autre termes, une équation différentielle linéaire homogène ne contient ni termes constants, ni termes dépendant seulement de x.

Le *principe de superposition* découle directement de la structure linéaire des équations et de l'homogénéité. Il peut s'énoncer ainsi : si u_1 et u_2 vérifient (1.1.3) alors $\alpha u_1 + \beta u_2$ vérifie aussi (1.1.3) , $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

1.1.1 **NOTE DE RÉDACTION**

Notion de multi-indice et de partie principale, cf RENARDY & ROGERS (1993). Notation de Schwartz

1.2 Classement des équations différentielles usuelles

Sur les équations différentielles non linéaires générales, on ne sait à peu prés rien dire. Il convient de préciser leurs formes afin d'en exhiber des propriétés intéressantes. Pour cela, on propose dans cette partie de définir les grandes classes d'équations différentielles.

1.2.1 Equation Différentielle Ordinaire (EDO)

Lorsque la fonction u ne dépend que d'une variable indépendante, que l'on peut noter t, la dérivée de u par rapport à t, notée $u'(t)$ est une dérivée totale. L'équation (1.1.1) devient alors une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) que l'on peut définir de la façon suivante :

Définition 1.2.1 Une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) scalaire est une équation mettant en jeu une fonction d'une variable scalaire $u(t) : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $m > 1$, :

$$F(t, u, u', u'', \dots, u^{(m)}) = 0 \tag{1.2.1}$$

où $u^{(m)}$ représente la dérivée d'ordre m de u par rapport à t et F est une fonction suffisamment régulière de $I \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$.

❏

L'ordre d'une EDO, défini comme le plus grand ordre de dérivation présent dans lt'équation, est donc égal à m dans ce cas.

Nous ne rentrerons pas plus dans les détails des EDO ici en renvoyant au Chapitre 2 pour une étude de leurs propriétés les plus usuelles.

1.2.2 Equation aux Dérivées Partielles (EDP)

Une *équation aux dérivées partielles* est tout simplement une équation différentielle faisant intervenir une fonction d'au moins *deux* variables indépendantes. On note usuellement ces deux variables x et y lorsqu'elles représentent des variables d'espace et x et t lorsque le temps intervient.

L'équation différentielle bi-dimensionnelle du premier ordre quasi-linéaire est l'une des EDP les plus simples :

$$a(x, y, u)\, u_x(x, y) + b(x, y, u)\, u_y(x, y) = c(x, y, u), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{1.2.2}$$

Elle est linéaire si a,b et c ne dépendent que x et y. La forme la plus générale d'équation linéaire du premier ordre est donc :

$$a(x, y)\, u_x(x, y) + b(x, y)\, u_y(x, y) + c(x, y)u(x, y) = d(x, y), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{1.2.3}$$

Elle modélise la plupart du temps un phénomène de transport. Le chapitre 7 est consacré à son étude.

1.2.3 Classement des EDP scalaires du second ordre quasi-linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Les EDP du second ordre quasi-linéaires conduisent à des comportements variés. Afin de séparer les principaux types de comportements, il existe une classification basée sur le classement des coniques (ellipse, hyperbole, parabole). De la même manière que pour les coniques, on introduit une forme canonique qui permet une étude plus systématique.

Les calculs effectués dans la suite au moins les changements de variables sont valables pour type d'EDP du second ordre quasi-linéaires. Nous verrons cependant que ce classement prend tout son intérêt dans le cas linéaire et qu'il est très efficace dans le cas linéaire à coefficients constants.

Considérons donc le cas le plus général d'EDP linéaire du second ordre :

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + d = 0 \tag{1.2.4}$$

où a, b, c et d sont de fonctions de x, y, u_x et u_y seulement.

Changement de variables De même que pour les coniques, on cherche à éliminer les termes croisés, $2bu_{xy}$. Pour cela, on introduit un changement de variables suffisamment régulier ($\mathcal{C}^1$-difféomorphisme),

$$X = \eta(x,y), \quad Y = \xi(x,y) \tag{1.2.5}$$

permettant de passer de (1.2.4) à une forme canonique du type :

$$Au_{XX} + Cu_{YY} + D = 0 \tag{1.2.6}$$

On note les gradients de ce changement de variables de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{\partial\eta(x,y)}{\partial x}, \beta = \frac{\partial\eta(x,y)}{\partial y}, \gamma = \frac{\partial\xi(x,y)}{\partial x}, \delta = \frac{\partial\xi(x,y)}{\partial y} \tag{1.2.7}$$

La matrice jacobienne du changement de variables devient alors :

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \tag{1.2.8}$$

On suppose que ce changement de variables n'est pas dégénéré, c'est à dire que

$$\det J = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \quad \forall(x,y) \in \Omega \in \mathbb{R}^2 \tag{1.2.9}$$

Cherchons maintenant ce que devient l'équation (1.2.4) avec le changement de variables (1.2.5) :

$$u_{xx} = \alpha^2 u_{XX} + 2\alpha\gamma u_{XY} + \gamma^2 u_{YY} + [\ldots] \tag{1.2.10}$$

$$u_{xy} = \alpha\beta u_{XX} + (\alpha\delta + \beta\gamma)u_{XY} + \gamma\delta u_{YY} + [\ldots] \tag{1.2.11}$$

$$u_{yy} = \beta^2 u_{XX} + 2\beta\delta u_{XY} + \delta^2 u_{YY} + [\ldots] \tag{1.2.12}$$

où les termes entre crochets ne font intervenir que des dérivées d'ordre inférieure strictement à deux. En reportant ces expressions dans l'équation (1.2.4), on obtient la nouvelle équation linéaire :

$$Au_{XX} + 2Bu_{XY} + Cu_{YY} + D = 0 \tag{1.2.13}$$

avec

$$A = a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2 \tag{1.2.14}$$

$$B = a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta \tag{1.2.15}$$

$$C = a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2 \tag{1.2.16}$$

Discriminant De même que pour les coniques, on peut remarquer le propriété d'invariance suivante par changement de variables :

$$B^2 - AC = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(b^2 - ac) \tag{1.2.17}$$

Le signe du discriminant $b^2 - ac$ est invariant par changement de variables non dégénéré. Il va donc nous permettre de classer les EDP (quasi-)linéaires du second ordre suivant le signe de ce discriminant.

Réduction à une forme canonique Comme pour le coniques, il est toujours possible de choisir un changement de variables particulier qui annule B. Choisissons une simple rotation des axes autour de l'origine pour η et ξ :

$$X = \eta(x,y) = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{1.2.18}$$
$$Y = \xi(x,y) = -x\sin\theta + y\cos\theta \tag{1.2.19}$$

On obtient alors pour α, β, γ et δ :

$$\alpha = \cos\theta, \quad \beta = \sin\theta \tag{1.2.20}$$
$$\gamma = -\sin\theta, \quad \delta = \cos\theta \tag{1.2.21}$$

Naturellement avec ce choix particulier de changement de variables, $\det J = \alpha\delta - \beta\gamma = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ et donc $B^2 - AC = (b^2 - ac)$. Les relations (1.2.14) deviennent alors :

$$A = a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta \tag{1.2.22}$$
$$B = -a\cos\theta\sin\theta + b(\cos^2\theta - \sin\theta^2) + c\sin\theta\cos\theta \tag{1.2.23}$$
$$C = a\sin\theta^2 - 2bsin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta \tag{1.2.24}$$

En introduisant deux nouvelles variables $p = (a+c)/2$ et $q = (a-c)/2$, et en considérant les relations trigonométriques avec les angles doubles ($\cos 2\theta = \cos^2\theta - sin^2\theta, \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$), on obtient les relations simplifiées :

$$A = p + q\cos 2\theta + 2b\sin 2\theta \tag{1.2.25}$$
$$B = -q\sin 2\theta + b\cos 2\theta \tag{1.2.26}$$
$$C = p - q\cos 2\theta - 2b\sin 2\theta xsxs \tag{1.2.27}$$

Pour annuler B, il suffit de choisir

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2b}{a-c}\right) + k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.2.28}$$

Dans le cas $a = c$, on trouve $\theta = \frac{\pi}{4}$. Le terme $k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ indique juste la rotation peut être définie à $\frac{\pi}{2}$ prés, ce qui semble cohérent avec une rotation d'axes.

Dans le cas où $B = 0$, on trouve $-AC = b^2 - ac$. On peut classer les formes canoniques simplement suivant le signe de AC.

On remarque de plus que A et C ne peuvent pas être nuls tous les deux si l'EDP est effectivement du second ordre. En effet, $A = C = 0$ impliquerait que $c = -a$ et $a\cos 2\theta + \beta\sin 2\theta$. La condition $B = 0$ implique alors $a\cos 2\theta - \beta\sin 2\theta = 0$. On obtient alors que $a = b = c = 0$ ce qui est faux par hypothèse.

EDP elliptique $b^2 - ac = -AC < 0$, A et C sont de même signe. Si $b^2 - ac = -AC < 0$, les coefficients A et C sont de même signe. On parle alors d'EDP elliptique que l'on écrit sous la forme générique suivante :

$$Au_{XX} + Cu_{YY} + D = 0, AC > 0 \quad \text{EDP elliptique} \tag{1.2.29}$$

L'étude de ce type d'équations fera l' objet du chapitre 4.

EDP hyperbolique $-AC = b^2 - ac > 0$**,** A **et** C **sont de signes opposés.** Dans le cas contraire, si $-AC = b^2 - ac > 0$, A et C sont alors de signes opposés. On parle d'EDP hyperbolique que l'on écrit sous la forme générique suivante :

$$Au_{XX} + Cu_{YY} + D = 0, AC < 0 \quad \text{EDP hyperbolique} \tag{1.2.30}$$

Les EDP hyperboliques impliquent généralement une notion de propagation. L'étude de ce type d'équations fera l' objet du chapitre 6.

EDP parabolique $b^2 - ac = 0$**,** A **ou** C **est nul** Quitte à changer θ en $\theta + \frac{\pi}{4}$, on peut toujours supposer que C s'annule. On parle alors d'EDP parabolique, qui peut, de la même façon, se mettre sous la forme :

$$Au_{XX} + D = 0, \quad \text{EDP parabolique} \tag{1.2.31}$$

1.2.4 Classement des EDP scalaires du second ordre linéaires à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

Elimination des termes du premier ordre Exprimons de nouveau les termes d'ordre inférieure dans leur forme complète pour une équation elliptique adimensionnée par un changement d'échelle de longueur :

$$u_{XX} + u_{YY} + Du_X + Eu_Y + Fu + G = 0 \tag{1.2.32}$$

On peut montrer facilement qu'il est possible de supprimer les termes du premier ordre u_X et u_Y. Effectuons pour cela un changement d'inconnue en posant :

$$u(X,Y) = \exp(\rho X).v(X,Y), \quad \rho \in \mathbb{R} \tag{1.2.33}$$

qui nous donne

$$u_X = \exp(\rho X)(v_X + \rho v), \quad u_{XX} = \exp(aX)(v_{XX} + 2\rho v_X + \rho^2 v) \tag{1.2.34}$$

Il vient alors pour l'EDP (1.2.32)

$$v_{XX} + v_{YY} + (2\rho + D)v_X + Ev_Y + (\rho^2 + D\rho + F)v + G = 0 \tag{1.2.35}$$

En choisissant $\rho = -\frac{D}{2}$, on peut faire disparaître le terme en v_X.

Si au lieu de (1.2.33), on pose

$$u(X,Y) = exp(\rho X + \tau Y).v(X,Y), \quad \rho, \tau \in \mathbb{R} \tag{1.2.36}$$

en choisissant $\rho = -\frac{D}{2}$ et $\tau = -\frac{E}{2}$, on peut éliminer à la fois v_X et v_Y et l' on obtient une forme "ramassée" de la forme :

$$v_{XX} + v_{YY} + Fv + G = 0 \tag{1.2.37}$$

On peut effectuer exactement le même calcul avec une équation hyperbolique adimensionnelle pour obtenir :

$$v_{XX} - v_{YY} + Fv + G = 0 \tag{1.2.38}$$

En ce qui concerne l'équation parabolique adimensionnelle, il n'est plus possible d'utiliser le second changement d'inconnue (1.2.36). On obtient une forme ramassée ou u_Y reste présente :

$$v_{XX} + Ev_Y + Fv + G = 0 \tag{1.2.39}$$

1.2.5 Résumé du classement des EDP linéaire du second ordre dans $\mathbb{R}^2$ et remarques

Résumé des trois formes canoniques pour les EDP quasi-linéaires Pour les EDP quasi-linéaires, les trois formes canoniques sont :

$$Av_{XX} + Cv_{YY} + D = 0, \quad AC > 0 \qquad \text{EDP elliptique} \tag{1.2.40}$$
$$Av_{XX} + Cv_{YY} + D = 0, \quad AC < 0 \qquad \text{EDP hyperbolique} \tag{1.2.41}$$
$$Av_{XX} + D = 0, \qquad \text{EDP parabolique} \tag{1.2.42}$$

où K et G sont des fonctions de u_X, u_Y, X, Y.

Résumé des trois formes canoniques pour les EDP linéaires à coefficients constants

$$v_{XX} + v_{YY} + Fv + G = 0, \qquad \text{EDP elliptique} \tag{1.2.43}$$
$$v_{XX} - v_{YY} + Fv + G = 0, \qquad \text{EDP hyperbolique} \tag{1.2.44}$$
$$v_{XX} + Ev_Y + Fv + G = 0, \qquad \text{EDP parabolique} \tag{1.2.45}$$

1.2.6 Remarques sur l'intérêt et la validité du classement

Intérêt du classement Le classement des EDP linéaire du second ordre dans $\mathbb{R}^2$ est intéressant car il reflète un ensemble de caractéristiques communes tant sur le plan qualitatif de part les phénomènes physiques représentés que sur le plan mathématique (Condition aux limites, problème bien posé, existence et unicité, ...).

Toutes ces raisons font que l'on a cherché très tôt à l'étendre à d'autres cas (vectoriel, n-dimensions). Nous verrons cependant que pour assurer une cohérence des résultats et des propriétés, le classement devient beaucoup plus restrictif.

Forme adimensionnelle et système d'unités Nous avons vu dans le paragraphe 1.2.4 que l'on pouvait adimensionner l'équation (1.2.6) pour obtenir une équation du type (1.2.43). Cette procédé est quasi-systématique dans les ouvrages mathématiques. Il doit pourtant être réalisé avec précaution si l'on souhaite conserver le sens physique donné aux variables en les reliant à une unité.

Lorsque le temps entre en jeu dans l'une des deux variables, par exemple, on préfère réintroduire explicitement une vitesse c de la manière suivante $Y = ct$. L'équation hyperbolique devient alors :

$$v_{XX} - \frac{1}{c^2}v_{tt} + Fv + G = 0, \tag{1.2.46}$$

On introduit ainsi un sens physique à l'échelle de temps qui fait apparaître la célérité des ondes.

Validité du classement pour les équations linéaires et quasi-linéaires Il est important de noter que même dans le cas linéaire les coefficients des formes canoniques (1.2.40) dépendent des variables indépendantes x et y. Ce qui veut dire que le comportement des équations peut changer suivant la région de $\mathbb{R}^2$ où l'on se situe. L'équation de Tricomi, qui est un modèle linéaire grossier d'écoulements de fluides transsoniques en est un exemple caractéristique. Cette équation qui peut s'écrire :

$$u_{yy} = yu_{xx} \tag{1.2.47}$$

est hyperbolique pour $y > 0$ et elliptique pour $y < 0$. En général, la connaissance des frontières où le comportement physique d'une équation change est très important dans la pratique.

Dans le cas quasi-linéaire, comme on l'a dit précédemment les changements de variables (1.2.5) et (1.2.18) restent valables et donc le classement l'est aussi. Seul l'élimination des termes du premier ordre n'est plus aussi générale. Le classement des EDP dans le cas quasi-linéaire est cependant dangereux car il dépend non seulement de la région de Ω ou nous sommes placés (dépendance en x et y) mais aussi des valeurs des dérivées du premier ordre de l'inconnu, u_x et u_y.

Pour terminer cette remarque, on peut donner l'exemple d'un modèle d'écoulements de fluides transsoniques quasi-linéaire :

$$u_x u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.2.48}$$

Fondamentalement non-linéaire, cette équation exhibe pour une solution donnée un comportement "elliptique" là où u_x est positif (en subsonique) et un comportement "hyperbolique" là où u_x est négatif (en supersonique).

D'une manière plus générale, il est toujours hasardeux de se raccrocher à ce classement pour des EDP non-linéaires.

Importance des termes d'ordre supérieur `à terminer`

1.2.7 Classement des EDP scalaires du second ordre (quasi-)linéaire dans $\mathbb{R}^n$

On considère toujours le cas scalaire ou l'on a une seule fonction inconnue u et n variables indépendantes, $x_1, \ldots x_n$. Une EDP du second ordre (quasi-)linéaire dans $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous la forme suivante

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + [\ldots] = 0 \tag{1.2.49}$$

où les termes entres crochets ne comporte pas de dérivées secondes. Du fait du rôle symétrique de x_i et x_j, il est toujours possible de se ramener à une matrice $Q = [a_{ij}]$ qui est symétrique. On peut donc dès lors envisager les valeurs propre réelles de la matrice Q.

Le classement réalisé dans les § précédents peut se généraliser de la façon suivante :

– Si toutes les valeurs propres de la matrice $Q = [a_{ij}]$ sont non nulles et de même signe, alors l'équation est dite elliptique. La forme canonique la plus simple d'EDP elliptique dans $\mathbb{R}^n$ est la suivante :

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n} = 0 \tag{1.2.50}$$

– Si toutes les valeurs propres de la matrice Q sont non nulles et que une seule d'entre elles est de signe opposé, alors l'équation est dite hyperbolique. La forme canonique la plus simple d'EDP hyperbolique dans $\mathbb{R}^n$ est la suivante :

$$-u_{tt} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n} = 0 \tag{1.2.51}$$

On dit aussi que l'équation est ultra-hyperbolique si on a au moins deux valeurs propres de chaque signe.

– Si au moins une des valeurs propres de la matrice Q est nulle ($\det Q = 0$), alors l'équation est dite parabolique. La forme canonique la plus simple d'EDP parabolique dans $\mathbb{R}^n$ est la suivante :

$$u_t = u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n} \tag{1.2.52}$$

1.2.8 EDP d'ordre supérieur et systèmes d'EDP (vectorielles)

1.2.1 **NOTE DE RÉDACTION**

`A ajouter, cf` RENARDY & ROGERS `(1993)`

1.2.9 Méthodes des caractéristiques

1.2.2 **NOTE DE RÉDACTION**

Presentation générale des caractéristiques? Est ce bien nécessaire?, cf RENARDY & ROGERS (1993) ; EVANS (1997) ; SHOWALTER (1997)

1.3 Conditions aux limites classiques.

Nous nous plaçons dans le cas où une EDP est définie sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ de frontière, $\partial\Omega$ suffisamment régulière. On notera par $\vec{n}$ sa normale extérieure.

1.3.1 Condition aux bords de Dirichlet

La *condition de Dirichlet* aux bords peut se définir comme la donnée d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sur une partie Γ de la frontière de Ω, ce qui peut se noter :

$$u(x) = f(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega \tag{1.3.1}$$

ou

$$u(t,x) = f(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega(t). \tag{1.3.2}$$

La fonction f est une donnée du problème.

En particulier, en mécanique des milieux continus, ces conditions de Dirichlet reviennent à imposer une vitesse ou un déplacement sur le bord du milieu.

1.3.2 Condition aux bords de Neumann

La *condition de Neumann* aux bords peut se définir comme la donnée de la dérivée de la fonction u : $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ par rapport à $\vec{n}$ sur une partie Γ de la frontière de Ω, ce qui peut se noter

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}} = g(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega \tag{1.3.3}$$

ou

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial \vec{n}} = g(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega(t) \tag{1.3.4}$$

La fonction g est une donnée du problème.

1.3.3 Condition mixte de Robin

Il y a plusieurs façon d'obtenir des conditions mixtes de Neumann-Dirichlet. Le première est d'imposer des conditions de Dirichlet dans certaines directions et de conditions de Neumann d'en autres au même point du bord. La seconde façon est imposer une moyenne pondérée des deux types de conditions sur un partie du bord de Ω :

$$\alpha(x)u(x) + \beta(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}} = f(x), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega \tag{1.3.5}$$

On parle alors de la *condition mixte de Robin* aux bords.

1.3.4 Condition initiale ou condition de Cauchy

1.3.5 Le cas des EDO

Dans le cas des EDO, on rappelle que l'on a seulement une seule variable indépendante que l'on note t. L'intervalle de définition de la fonction inconnue $u(t)$ est donc un intervalle $I = [t_0, T] \subset \mathbb{R}, T \in]t_0, +\infty]$. La condition de Cauchy est simplement la donnée de la valeur de $u(t)$ en t_0, soit

$$u(t_0) = u_0, u_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.3.6}$$

1.3.6 Le cas des EDP

Rappeler ce que peut être une condition de Cauchy pour une EDP, dans le cas par exemple de EDP parabolique.

à terminer

1.4 Rappels sur les opérateurs différentiels les plus usuels.

1.4.1 Fonctions à valeurs réelles

On rappelle dans ce paragraphe les principales définitions des opérateurs différentiels les plus usuels pour une fonction à valeurs réelles, $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

Gradient d'une fonction ∇u. Le gradient d'une fonction u noté ∇u, est défini par :

$$\nabla u = \begin{bmatrix} u_{x_1} \\ u_{x_2} \\ \vdots \\ u_{x_n} \end{bmatrix} \tag{1.4.1}$$

On considérera l'opérateur gradient $\nabla(.)$ que l'on définit par

$$\nabla = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{1.4.2}$$

Laplacien Δu. Le laplacien d'une fonction u noté Δu, est défini par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} \tag{1.4.3}$$

En utilisant l'opérateur gradient $\nabla(.)$, les notations suivantes peuvent être rencontrées :

$$\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^T \nabla u \tag{1.4.4}$$

1.4.2 Fonctions à valeurs vectorielles

Considérons dans ce paragraphe une fonction à valeurs vectorielles, $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, les fonctions coordonnées de u sont notées :

$$u(x) = \begin{bmatrix} u_1(x_1, \ldots, x_n) \\ u_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ u_m(x_1, \ldots, x_n) \end{bmatrix} \tag{1.4.5}$$

Jacobien de U $Jac(u)$ ou $\nabla^T u$. Le Jacobien ou encore la matrice Jacobienne d'une fonction u se définit par :

$$Jac(u) = \nabla^T u(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \ddots & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{1.4.6}$$

Il faut faire attention à l'utilisation du symbole ∇ à la fois pour le gradient et pour le Jacobien car dans le cas $m = 1$, on obtient un vecteur ligne et non pas un vecteur colonne.

Laplacien Δu. Le laplacien d'une fonction u noté Δu, est définit par

$$\Delta u = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n u_{1,x_i x_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n u_{j,x_i x_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n u_{m,x_i x_i} \end{bmatrix} \tag{1.4.7}$$

Divergence $\operatorname{div} u$, $m = n$ La divergence d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, noté $\operatorname{div} u$, est définit par

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = tr(\nabla u) \tag{1.4.8}$$

Rotationnel $\operatorname{rot} u$, $m = n = 3$ Le rotationnel d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, noté $\operatorname{rot} u$, est défini par

$$\operatorname{rot} u = \nabla \wedge u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \tag{1.4.9}$$

1.4.3 Formules Gradient-Divergence-Rotationnel

On considère une fonction $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ avec $n = 3$ lorsque le rotationnel est concerné par les relations.

Théorème 1.4.1

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) = \nabla(\operatorname{div} u) - \Delta u \tag{1.4.10}$$

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u \tag{1.4.11}$$

$$\operatorname{rot}(\nabla u) = 0 \tag{1.4.12}$$

❏

Preuve : En exercice.

❏

1.4.4 Théorème de Stokes, de la divergence (Ostrogradski) et les formules de Green.

Théorème 1.4.2 (Théorème de Stokes) Considérons une $n-1$ forme différentielle, ω de classe $\mathcal{C}^1$ sur une variété différentielle M de classe $\mathcal{C}^2$. Le théorème de Stokes peut s'énoncer ainsi :

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{1.4.13}$$

$$\tag{1.4.14}$$

où ∂M est le bord orienté de M.

❏

Ce théorème est le théorème le plus général de l'intégration par parties. Il permet de retrouver l'ensemble des formules usuelles d'intégration par parties dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ que nous donnons dans la suite. D'une manière plus générale, toutes ces formules s'obtiennent a partir de l'application de théorèmes de calcul différentiel sur les formes différentielles, voir pour cela (CARTAN, 1977).

Théorème 1.4.3 (Théorème de Kelvin-Stokes) Le théorème de Kelvin-Stokes pour $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ et S est une surface dans $\mathbb{R}^3$ peut s'énoncer ainsi :

$$\int_S \operatorname{rot} F \, ds = \int_{\partial S} F \, dl. \tag{1.4.15}$$

❑

Théorème 1.4.4 (Théorème de la divergence (Ostrogradski-Gauss)) Le théorème de la divergence pour $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ peut s'énoncer ainsi :

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F.n_x \, ds \tag{1.4.16}$$

où n_x est la normale sortante à Ω.

❑

A partir du théorème de la divergence on peut déduire les formules de Green suivantes[1] :

Théorème 1.4.5 (Formules de Green) Considérons deux fonctions à valeur réelle, $u : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, $d = 2, 3$. Les formules de Green peuvent s'énoncer ainsi :

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u.\nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds \quad \text{(Première formule de Green)} \tag{1.4.17}$$

$$\int_\Omega u \, \Delta v - \Delta u \, v \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v \right) ds \quad \text{(Seconde formule de Green)} \tag{1.4.18}$$

❑

Théorème 1.4.6 (Variantes du théorème de la divergence) Considérons une fonction à valeur réelle, $u : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, $d = 1, 2, 3$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx = \int_{\partial\Omega} u \cos(e_k, n_x) \, ds \tag{1.4.19}$$

où e_k est un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et n_x est la normale sortante à Ω.

❑

Théorème 1.4.7 (Variantes des formules de Green) Considérons deux fonctions à valeur réelle, $u : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, et une fonction à valeur vectorielle $F : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. On a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} \, dx + \int_{\partial\Omega} u \, v \cos(e_k, n_x) \, ds \tag{1.4.20}$$

$$\int_\Omega u \operatorname{div} F \, dx = -\int_\Omega \nabla u.F \, dx + \int_{\partial\Omega} uF.n_x \, ds \tag{1.4.21}$$

❑

[1] Il suffit de considérer $F = u\nabla v$

On remarque la formule d'Ostrogradski est un cas particulier de (1.4.21) pour $u \equiv 1$. De la même manière pour $E \equiv [1,1,1]^T$, on obtient la formule du gradient :

Théorème 1.4.8 (Formule du gradient) La formule du gradient pour $u : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ peut s'énoncer ainsi :

$$\int_\Omega \nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} u.n_x \, ds \tag{1.4.22}$$

❏

Pour finir nous donnons la formule du rotationnel :

Théorème 1.4.9 (Formule du rotationel) La formule du rotationnel pour $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ peut s'énoncer ainsi :

$$\int_\Omega \operatorname{rot} F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \wedge n_x \, ds \tag{1.4.23}$$

❏

1.5 Exemples et exercices

1.5.1 Quelques exemples classiques

En exercices, on peut caractériser qualitativement les équations suivantes. On discutera les points suivants si cela est possible : nombre d'inconnues, nombre de variables indépendantes, ordre, degré, linéarité, homogénéité, classement canonique, ...

1. **Equation de Tricomi** (ZWILLINGER, 1998, p. 130) Ecoulement de fluide plan transsonique.

$$u_{yy} = y u_{xx} \tag{1.5.1}$$

2. **Equation de Benjamin-Bona-Mahony** (ZWILLINGER, 1998, p. 130–132) (Benjamin, T.B. ; Bona, J.L. ; and Mahony, J.J. "Model Equations for Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems." Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 272, 47-48, 1972) dans sa version simple

$$u_t + u_x + u u_x - u_{xxt} = 0 \tag{1.5.2}$$

ou dans sa version généralisée (Goldstein, J.A. and Wichnoski, B.J. "On the Benjamin-Bona-Mahony Equation in Higher Dimensions." Nonlinear Anal. 4, 665-675, 1980.)

$$u_t + \nabla^2 u_t + \mathrm{div}(\phi(u)) = 0 \tag{1.5.3}$$

3. **Equation biharmonique** Problème d'élasticité en contraintes et déformations planes sans efforts volumiques. Fonction d'Airy.

$$\nabla^4(u) = 0 \tag{1.5.4}$$

4. **Equation de Boussinesq** (Whitham, G.B. Linear and Nonlinear Waves. New York : Wiley, 1974. p 9) (ZWILLINGER, 1998, p. 129–130) Long waves in shallow water. The percolation of water in porous subsurface strata

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = \beta u_{xxtt} \tag{1.5.5}$$

Une version particulière :

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} + 3(u^2)_x x = 0 \tag{1.5.6}$$

5. **Equations de Cauchy-Riemann** Condition de dérivabilité complexe de la fonction de deux variables f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)(ZWILLINGER, 1998, p. 137)

$$u_x = v_y \tag{1.5.7}$$

$$v_x = -u_y \tag{1.5.8}$$

6. **Equation de Chaplygin** (ZWILLINGER, 1998, p. 129) Ecoulements de fluides compressibles (gaz).

$$u_{xx} + \frac{y^2}{1 - \dfrac{y^2}{c^2}} u_{yy} + y u_y = 0 \tag{1.5.9}$$

7. **Equation d'Euler-Darboux** (ZWILLINGER, 1998, p. 129)

$$u_{xy} + \frac{\alpha u_x - \beta u_y}{x - y} = 0 \tag{1.5.10}$$

8. **Equation de diffusion de la chaleur** On parle aussi de conduction :

$$u_t - \kappa \nabla^2 u = 0 \tag{1.5.11}$$

9. **Equation différentielle d'Helmholtz** Equations de physique théorique, théorie de la diffraction optique ...

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{1.5.12}$$

NB : pour $k = 0$, on retrouve l'équation de Laplace.

10. **Equation de Klein-Gordon** Equation de mécanique quantique. Cas particulier des équations de Schrödinger pour une particule sans spin.

$$\frac{1}{c^2} u_{tt} - u_{xx} = -\mu^2 u \tag{1.5.13}$$

NB : pour $\mu = 0$, on retrouve l'équation des ondes. On peut aussi en donner une version plus générale compliquée :

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} + \gamma^2 u = \beta u^3 \tag{1.5.14}$$

11. **Equation de Korteweg-de Vries** (Korteweg, D.J. and de Vries, F. "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves." Philos. Mag. 39, 422-443, 1895.) Ondes solitaires ou solitons.

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0 \tag{1.5.15}$$

et sa version généralisée **Equation de Korteweg-de Vries-Burger** (ZWILLINGER, 1998, p. 131)

$$u_t + 2uu_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0 \tag{1.5.16}$$

12. **Equation de Krichever-Novikov**

$$\frac{u_t}{u_x} = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{8}\frac{u_x^2 x}{u_x^2} + \frac{3}{2}\frac{p(u)}{u_x^2} \text{ avec } p(u) = \frac{1}{4}\left(4u^3 - g_2 u - g_3\right) \tag{1.5.17}$$

Les cas spéciaux $p(u) = (u - e_1)^2(u - e_2)$ et $p(u) = u^3$ peuvent être remis sous la forme de l'équation de Korteweg-deVries par un changement de variables.

1.5.2 Quelques EDP à classer

On suppose que l'on se place dans le cas scalaire, $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

Exercice 1 Determiner le type et mettre sous canonique les EDP suivantes :

$$u_{xy} + 2u_x = 0 \tag{1.5.18}$$
$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \tag{1.5.19}$$
$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0 \tag{1.5.20}$$
$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0 \tag{1.5.21}$$
$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0 \tag{1.5.22}$$