

Chapitre 2

Equation Différentielle Ordinaire (EDO)

Contenu du Chapitre 2

2.1	Introduction	28
2.2	Le problème de Cauchy	30
2.2.1	Définition	30
2.2.2	Solutions locales, maximales, globales	31
2.2.3	Théorème d'existence de Cauchy-Peano	33
2.2.4	Théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz	34
2.2.5	Influence des perturbations sur les données	35
2.2.6	Régularité des solutions	36
2.2.7	Références bibliographiques	37
2.3	Application du problème de Cauchy: Oscillateurs non linéaires.	38
2.4	Problèmes à valeurs aux limites pour les EDO	44
2.4.1	Définition	44
2.4.2	Propriétés	44
2.4.3	Applications	46
2.4.4	Fonctions de Green	49
2.4.5	Méthodes numériques associées	50
2.5	Equation Différentielle Algébrique (EDA)	51
2.5.1	Définition	51
2.5.2	EDA linéaire	52
2.5.3	Une EDA non linéaire – Forme de Hessenberg	53
2.5.4	Un exemple d'applications usuelles: équations de Lagrange avec contraintes et les circuits électriques.	54
2.6	Problèmes unilatéraux.	55

Notations

On considère un intervalle de \mathbb{R} , noté $I \subset \mathbb{R}$.

2.1 Introduction

Le cas scalaire. Commençons par nous mettre dans le cas scalaire, c'est à dire, que l'on considère des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} , $y(t) : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Définition 2.1.1 Une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) scalaire est une équation mettant en jeu une fonction $y(t) : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $m > 1$, :

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0 \quad (2.1.1)$$

où $y^{(m)}$ représente la dérivée d'ordre m de y par rapport à t et F est une fonction suffisamment régulière de $I \times \mathbb{R}^m$ dans \mathbb{R} . L'ordre d'une EDO est défini comme le plus grand ordre de dérivation présent dans l'équation, c'est à dire m . □

La littérature anglaise référence ce type d'équation comme Ordinary Differential Equation (ODE).

La variable t représente en général le temps dans des équations qui modélise un processus d'évolution en temps. Nous verrons par la suite que ce n'est pas toujours le cas mais la notation est gardée pour plus de commodité. Pour son étude théorique, on se ramène en général à une forme du premier ordre en posant le changement de variable suivant :

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

L'équation (2.1.1) devient alors :

$$G(t, z, z') = 0 \quad (2.1.3)$$

Le cas vectoriel Dans ce cas, on considère des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^n , $y(t) : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$. On parle alors de systèmes différentiels même si il s'agit toujours d'une EDO que l'on peut définir de la façon suivante :

Définition 2.1.2 Un système différentiel d'ordre m ou encore, une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) vectorielle est une équation mettant en jeu une fonction $y(t) : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $m > 1$, :

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0 \quad (2.1.4)$$

où $y^{(m)}$ représente la dérivée d'ordre m de y par rapport à t et F est une fonction suffisamment régulière de $I \times \mathbb{R}^{n \times m}$ dans \mathbb{R}^n . □

EDO implicite et EDA Lorsque la matrice Jacobienne,

$$\frac{\partial}{\partial v} (F(t, y, v)) \quad (2.1.5)$$

est non singulière sur un domaine de $I \times \mathbb{R}^3$, alors il devient possible au moins théoriquement de résoudre y' en fonction de y et de t (Théorème des fonctions implicites). On parle alors EDO implicite. Dès lors, l'EDO implicite prend la forme plus classique :

$$y' = f(y, t) \quad (2.1.6)$$

où $f : \mathbb{R} \times I_0 \mapsto \mathbb{R}$.

De la même manière que pour le cas général (2.1.1), on peut se ramener à un système du premier ordre $z' = g(t, z)$ en posant le changement de variable :

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

et la nouvelle fonction g :

$$g(t, z) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(m-2)}(t) \\ f(t, y(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \end{bmatrix} \quad (2.1.8)$$

Dans la suite, nous nous placerons toujours dans le cas des systèmes du premier ordre et nous supposerons que F est à valeurs dans $I_0 \times \mathbb{R}^{2 \times n}$.

Dans le cas où la matrice Jacobienne est partout singulière, il devient difficile de dégager des propriétés générales sans préciser plus la forme de F . Nous étudierons un cas particulier au § 2.5 représentatif d'un grand nombre d'applications: il s'agit des Equation Différentielle Algébrique (EDA).

exemple

2.1.1.1 Note de Rédaction

Insérer l'exemple d'un système mécanique en dimension finie. $M(q)\ddot{q} + F_{int}(t, q, \dot{q}) = F_{ext}(t)$

- Passage a l'ordre 1.
- Passage en EDO explicite sans le cas où l'operateur $M(q)$ est inversible

Conditions aux limites. Une équation différentielle seule n'a que peu de sens sans la donnée de conditions aux limites. Deux grand types de conditions aux limites peuvent être donnés pour les EDO, qui conduisent soit aux problèmes à valeurs initiales, ou problème de Cauchy soit aux problèmes à valeurs aux limites.

2.2 Le problème de Cauchy

2.2.1 Définition

Sans la donnée de conditions initiales consistantes, il est impossible de définir la notion de solution d'un système différentiel du premier ordre. C'est pourquoi, on introduit un problème standard qui est le problème de Cauchy :

Définition 2.2.1 On appelle *problème de Cauchy* le problème suivant :

Étant donnés :

- un intervalle $I_0 \subset \mathbb{R}$,
- une fonction f , définie et continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n :

$$f : I_0 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \quad (2.2.1)$$

$$(t, y) \mapsto f(t, y) \quad (2.2.2)$$

Trouver une fonction $y \in \mathcal{C}^1(I_0)$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \forall t \in I_0, \forall y \in \mathbb{R}^n \\ y(t_0) = y_0, t_0 \in I_0, \text{ Condition initiale} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

□

Le problème est aussi souvent désigné sous son acronyme anglais : Initial Value Problem (IVP).

Outre la donnée d'un intervalle et d'une fonction f , le problème de Cauchy se caractérise par la donnée d'une condition dite condition de Cauchy ou condition initiale. La forme de cette condition est essentielle. On peut envisager, en effet, des problèmes où des conditions sont données sur la dérivée de y' , ou encore en deux points d'un intervalle. Il ne s'agit alors plus d'un problème de Cauchy.

Le problème de Cauchy peut se mettre sous une forme équivalente donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 Une fonction $y : I_0 \mapsto \mathbb{R}^n$ est une solution du problème de Cauchy si et seulement si :

1. la fonction y est continue et $\forall t \in I_0, (t, y(t)) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$
- 2.

$$\forall t \in I_0, y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad (2.2.4)$$

□

Preuve : La preuve est simple. Si y vérifie les deux hypothèses de ce théorème alors y est différentiable et $y(t_0) = y_0$ et $y'(t) = f(t, y(t))$. Réciproquement, si les relations du problème de Cauchy (2.2.3) sont satisfaites, l'équation (2.2.4) se déduit directement par intégration.

□

La solution y du problème de Cauchy est parfois appelée l'intégrale du problème et la résolution de ce système est parfois appelée intégration de l'EDO.

Remarques

1. Si f est une fonction uniquement de t , le problème de Cauchy se ramène à la recherche d'une primitive. Dans le cas unidimensionnel, $y(t) \in \mathbb{R}$, c'est également le cas lorsque l'on peut effectuer une séparation des variables, i.e. :

$$f(t, y) = g(t)h(y) \quad (2.2.5)$$

Dans ce cas, si $h(y) \neq 0$, on peut écrire le problème de Cauchy sous la forme suivante :

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^t g(t) dt \quad (2.2.6)$$

2. Si f est une fonction linéaire de y , il existe alors de nombreuses méthodes analytiques pour résoudre le problème (Variation de la constante).
3. Si f est une fonction non linéaire de y , ce problème est plus généralement abordé numériquement.

2.2.2 Solutions locales, maximales, globales

Avant de donner des théorèmes d'existence de solution, il est bon de préciser quelle type de solution on recherche. Pour cela, on introduit les définitions suivantes.

Définition 2.2.2 On appelle solution locale du problème de Cauchy (2.2.3) la donnée d'un couple (I, y) où I est un intervalle de \mathbb{R} qui est voisinage de t_0 dans I_0 et où y est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I telle que :

$$y(t_0) = y_0, \quad \forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.2.7)$$

□

Définition 2.2.3 On dit que la solution locale (J, z) prolonge la solution locale (I, y) si on a

$$I \subset J, \quad \forall t \in I, y(t) = z(t) \quad (2.2.8)$$

Si de plus, $I \neq J$ on dit que la solution (J, z) prolonge strictement la solution (I, y) .

□

Définition 2.2.4 On dit que la solution locale (I, y) du problème de Cauchy (2.2.3) est maximale si il n'existe pas de solution locale qui la prolonge strictement.

□

Définition 2.2.5 On dit que la solution (I, y) est une solution globale du problème de Cauchy (2.2.3) dans I_0 si (I, y) est une solution locale et $I = I_0$.

□

Exemples

1. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -2ty^2(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Ce problème admet une solution globale¹ et une seule dans \mathbb{R} :

$$(\mathbb{R}, y(t) = \frac{1}{1+t^2}) \quad (2.2.10)$$

et il n'y a pas d'autre solution maximale.

2. Le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 2ty^2(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.2.11)$$

admet une solution maximale et une seule dans \mathbb{R} , c'est $(]-1, 1[, y(t) = \frac{1}{1-t^2})$. Il n'y a pas de solution globale. Si l'on choisit comme condition initiale à ce problème la donnée $y(-2) = 1$, il existe une solution maximale et une seule qui est $(]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[, y(t) = \frac{1}{5-t^2})$. Il est bon de remarquer que l'ensemble sur lequel se définit les solutions d'un problème est dépendant aussi de la condition initiale.

3. Le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t), t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2.2.12)$$

admet une solution globale et une seule dans $[0, +\infty[$, qui est $([0, +\infty[, y(t) = \frac{1}{1+t})$. Sur \mathbb{R} , il n'y a pas de solution globale mais seulement une solution maximale sur $] -1, +\infty[$.

4. Le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -\sqrt[3]{y(t)}, t \in [0, +\infty[\\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (2.2.13)$$

admet comme solutions globales :

$$([0, +\infty[, y(t) = 0) \quad (2.2.14)$$

$$([0, +\infty[, y(t) = \sqrt{\frac{8t^3}{27}}) \quad (2.2.15)$$

$$([0, +\infty[, y(t) = -\sqrt{\frac{8t^3}{27}}) \quad (2.2.16)$$

Nous pouvons constater que les problèmes d'existence et d'unicité de solutions ne sont pas des questions triviales. Nous allons présenter dans la suite quelques uns des théorèmes fondamentaux d'existence et d'unicité des solutions moyennant des hypothèses sur f .

1. Remarquer simplement que $(1/y)' = -y'/y^2$

2.2.3 Théorème d'existence de Cauchy-Peano

Théorème 2.2.2 (Cauchy-Peano) On suppose que f est continue dans un voisinage du point $(t_0, y_0) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$, alors il existe un intervalle J_0 voisinage de t_0 dans I_0 et une fonction $y \in \mathcal{C}^1(J_0)$ tels que :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \forall t \in J_0, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2.17)$$

□

Le théorème de Cauchy-Peano donne donc un résultat d'existence d'une solution locale (J_0, y) .

Preuve : Voir (CROUZEIX & MIGNOT, 1992).

□

La condition de continuité de f ne suffit pas pour passer à une solution globale. Nous verrons dans la suite qu'il faut imposer des conditions supplémentaires. Par contre, le résultat qui suit permet d'assurer l'existence d'une solution maximale.

Théorème 2.2.3 Étant donnée une solution locale, il existe au moins (pas forcément unique) une solution maximale qui la prolonge.

□

Preuve : Voir (CROUZEIX & MIGNOT, 1992).

□

On a pu remarquer sur les exemples du § précédent que la notion de solution est très dépendante de l'ensemble sur lequel on la cherche. On constate aussi que lorsque des solutions maximales non globales existent, cela est souvent dû à une singularité de y . Le théorème suivant précise cette intuition.

Théorème 2.2.4 On suppose que f est continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ et que I_0 est de la forme $[t_0, t_0 + T]$, $[t_0, t_0 + T[[t_0, +\infty[$; alors si (I, y) est une solution maximale non globale du problème de Cauchy (2.2.3), I est de la forme $[t_0, t_1[$ et y n'est pas borné sur I .

□

Preuve : Voir (CROUZEIX & MIGNOT, 1992).

□

Enfin, donnons un résultat d'existence de solution globale :

Théorème 2.2.5 On suppose que $I_0 = [t_0, t_0 + T]$, que f est continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ et qu'il existe un produit scalaire de \mathbb{R}^n noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associé à une norme $\|\cdot\|$ et une fonction $l \in \mathcal{L}^1(I_0)$ tels que

$$\forall (t, y) \in I_0 \times \mathbb{R}^n, \quad \langle f(t, y), y \rangle \leq l(t)(1 + \|y\|^2) \quad (2.2.18)$$

alors le problème de Cauchy (2.2.3) admet au moins une solution globale.

□

Preuve : Voir (CROUZEIX & MIGNOT, 1992). □

Exemple. Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -y^3(t) + \sin(t)y^2(t) + 1 \text{ sur } I_0 = [0, +\infty[\\ y(0) = y_0 \text{ donné dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.2.19)$$

Le théorème précédent peut s'appliquer avec le produit scalaire usuel de \mathbb{R} . En effet, on a

$$\forall (t, y) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \quad \langle f(t, y), y \rangle = -y^4 + \sin(t)y^3 + y \leq -y^4 + |y|^3 + |y| \leq 1 + |y| \quad (2.2.20)$$

et donc il existe une solution globale sur $I_0 = [0, +\infty[$.

2.2.4 Théorème d'unicité de Cauchy-Lipschitz

La notion d'unicité de la solution du problème de Cauchy peut être précisée de la façon suivante :

Définition 2.2.6 On dit que le problème de Cauchy (2.2.3) admet une solution et une seule s'il admet une solution globale et si toute solution locale est la restriction de cette solution globale. □

Le théorème suivant est un théorème fondamental d'unicité de la solution :

Théorème 2.2.6 On suppose que I_0 est de la forme $[t_0, t_0 + T]$ ou $[t_0, t_0 + T[$ ou $[t_0, +\infty[$, que f est continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ et qu'il existe une fonction $l \in \mathcal{L}^1(I_0)$ telle que

$$\forall t \in I_0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \langle f(t, y) - f(t, z), y - z \rangle \leq l(t) \|y - z\|^2 \quad (2.2.21)$$

alors le problème de Cauchy (2.2.3) admet une solution et une seule. □

Preuve : L'existence est basée sur le théorème 2.2.5. Pour la démonstration de l'unicité, on renvoie à (CROUZEIX & MIGNOT, 1992). □

Le Théorème de Cauchy-Lipschitz est une conséquence du théorème précédant pour des hypothèses plus fortes :

Théorème 2.2.7 (Cauchy-Lipschitz) On suppose que la fonction f est continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ et qu'il existe un réel L tel que :

$$\forall (t, y) \text{ et } (t, z) \in I_0 \times \mathbb{R}^n, \|f(t, y) - f(t, z)\| \leq L \|y - z\| \quad (2.2.22)$$

alors le problème de Cauchy (2.2.3) admet une solution et une seule. □

L'hypothèse (2.2.22) revient simplement à ce que f soit L-lipschitzienne par rapport à y .

Donnons enfin un corollaire qui est une application directe de ce théorème. Il concerne le cas des équations différentielles linéaires.

Corollaire 2.2.1 (Cas des équations différentielles linéaires) Si la fonction est linéaire par rapport à y , c'est à dire qu'elle se met sous la forme :

$$f(t, y) = A(t)y(t) + b(t) \quad (2.2.23)$$

et que l'application $t \mapsto A(t)$ est continue sur I_0 dans l'ensemble des applications linéaires de \mathbb{R}^n , $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et que $b \in \mathcal{C}^0(I_0)$ alors le problème de Cauchy admet une solution et une seule. □

Preuve : La preuve se scinde en deux cas :

1. si I_0 est compact, on a

$$f(t, y) - f(t, z) = A(t)(y - z) \quad (2.2.24)$$

En posant $L = \max_{t \in I_0} \|A(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ qui existe puisque I_0 est compact, on obtient que f est L-lipschitzienne par rapport à y .

2. Si I_0 , n'est pas compact, par exemple $I_0 = [t_0, t_0 + T[$, on envisage la suite de $t_n = t_0 + T - 1/n$. Il existe une solution unique globale sur $[t_0, t_n]$ que l'on note $([t_0, t_n], y_n)$. On pose $y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t)$. Cette limite existe puisque pour $t_n \geq t$, $y_n(t)$ est constante. La solution (I_0, y) est donc l'unique solution du problème. □

2.2.5 Influence des perturbations sur les données

Derrière la question de l'influence des perturbations sur les données sur une solution se cache la notion de stabilité du problème de Cauchy. On souhaite en effet qu'une perturbation sur les données du problème de Cauchy, plus précisément sur f et sur la condition initiale y_0 n'entraîne que des variations sur la solution $y(t)$ qui peuvent être maîtrisées, et les plus petites possibles.

Sans la stabilité du problème continue, il n'y a pas d'espoir de construire des méthodes numériques (discrètes) qui soient stables.

Afin de préciser cette notion, on envisage un problème de Cauchy dit perturbé :

Étant donné :

- un intervalle $I_0 \subset \mathbb{R}$,
- une fonction f , définie et continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n :
- une fonction g , définie et continue de I_0 dans \mathbb{R}^n
- un élément $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et deux réels $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$

Trouver une fonction $y_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(I_0)$ telle que

$$\begin{cases} y'_\varepsilon(t) = f(t, y_\varepsilon(t)) + \xi_0 g(t), \forall t \in I_0, \forall y \in \mathbb{R}^n \\ y_\varepsilon(t_0) = y_0 + \xi_1 \alpha, t_0 \in I_0, \quad \text{Condition initiale} \end{cases} \quad (2.2.25)$$

Le théorème suivant permet de mesurer l'écart entre une solution y du problème de Cauchy et une solution y_ε du problème de Cauchy perturbé.

Théorème 2.2.8 Si f est continue et vérifie :

$$\exists l \in \mathcal{L}^1(I_0), \quad \forall t \in I_0, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \langle f(t, y) - f(t, z), y - z \rangle \leq l(t) \|y - z\|^2 \quad (2.2.26)$$

et g est continue alors le problème de Cauchy perturbé admet une solution unique y_ε et

$$\|y(t) - y_\varepsilon(t)\| \leq \|\xi_1 \alpha\| \exp(L(t)) + \int_{t_0}^t \exp(L(t) - L(s)) \|\xi_0 g(s)\| ds \quad (2.2.27)$$

avec

$$L(t) = \int_{t_0}^t l(s) ds \quad (2.2.28)$$

□

On remarque donc que la stabilité de l'opérateur est contrôlée par la fonction $L(t)$ qui doit rester "faible" pour espérer avoir une bonne stabilité du problème.

2.2.6 Régularité des solutions

Rappelons qu'une fonction vectorielle est dite de classe \mathcal{C}^k si elle admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k .

On donne le théorème suivant sur la régularité des solutions :

Théorème 2.2.9 Si $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ est de classe \mathcal{C}^k , alors toute solution du problème de Cauchy est de classe \mathcal{C}^{k+1}

□

Preuve : La preuve se fait par récurrence :

- $k = 0$, f est continue. Par hypothèse, $y : I_0 \mapsto \mathbb{R}^n$ est dérivable donc continue. Par conséquent, $y'(t) = f(t, y(t))$ est continue et donc y est de classe \mathcal{C}^1 .
- On suppose que le résultat est vrai à l'ordre $k-1$, alors y est au moins de classe \mathcal{C}^k . Comme f est de classe \mathcal{C}^k , il s'ensuit que y' est de classe \mathcal{C}^k et donc que y est de classe \mathcal{C}^{k+1} .

□

Calcul des dérivées successives d'une solution y en fonction de f Le calcul des dérivées successives de y par rapport à t se fait grâce aux dérivées totales de f par rapport à t . En dérivant la relation $y'(t) = f(t, y(t))$, on obtient :

$$y''(t) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \nabla_y f(t, y(t)) \frac{\partial y(t)}{\partial t} \quad (2.2.29)$$

$$= \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \nabla_y f(t, y(t)) y'(t) \quad (2.2.30)$$

$$= \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \nabla_y f(t, y(t)) f(t, y) \quad (2.2.31)$$

On note de manière conventionnelle la dérivée totale de f par rapport au temps :

$$f^{(1)}(t, y) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \nabla_y f(t, y(t)) f(t, y) \quad (2.2.32)$$

On a donc

$$y''(t) = f^{(1)}(t, y) \quad (2.2.33)$$

et d'une manière plus générale on notera la dérivée à l'ordre k :

$$y^{(k)}(t) = f^{(k-1)}(t, y) \quad (2.2.34)$$

Si on dérive une nouvelle fois cette dernière expression, on obtient :

$$y^{(k+1)}(t) = f^{(k)}(t, y) \quad (2.2.35)$$

$$= \frac{\partial f^{(k-1)}(t, y(t))}{\partial t} + \nabla_y f^{(k-1)}(t, y(t)) y'(t) \quad (2.2.36)$$

$$= \frac{\partial f^{(k-1)}(t, y(t))}{\partial t} + \nabla_y f^{(k-1)}(t, y(t)) f(t, y) \quad (2.2.37)$$

$$(2.2.38)$$

Le calcul des dérivées totales de f par rapport à t peuvent donc se faire grâce à la récurrence suivante :

$$f^{(0)}(t, y) = f(t, y) \quad (2.2.39)$$

$$f^{(l)}(t, y) = \frac{\partial f^{(l-1)}(t, y)}{\partial t} + \nabla_y f^{(l-1)}(t, y) f(t, y) \quad (2.2.40)$$

$$y^{(l+1)}(t) = f^{(l)}(t, y) \quad (2.2.41)$$

2.2.7 Références bibliographiques

Dans cette forme, la littérature sur l'étude théorique et la résolution numérique des EDO est vaste. Pour ne citer que quelques référence, ARNOLD (1973) CROUZEIX & MIGNOT (1992) HAIRER *et al.* (1993) ; HAIRER & WANNER (1996).

2.3 Application du problème de Cauchy: Oscillateurs non linéaires.

Le problème de Cauchy est particulièrement adapté à l'étude de l'évolution en temps d'un système de dimension finie à partir d'un état initial donné. On entend par état, un ensemble de variables indépendantes permettant de décrire de façon univoque un système. Le système est dit de dimension finie si l'état est lui aussi de dimension finie, où plus précisément si cet état appartient à un espace de dimension finie.

On désigne le plus souvent ces systèmes sous le terme de "systèmes dynamiques" ou encore "Dynamique non linéaire". Derrière cette désignation très générale, se cache une branche bien précise des mathématiques appliquées qui consiste en l'étude qualitative des systèmes dynamiques non linéaires, le plus souvent de dimension finie. En effet, si le cas des systèmes linéaires est assez simple, les systèmes dynamiques non linéaires offrent une très grande richesse de comportement. Les principales études de ces systèmes sont liées à des questions de stabilité, de recherches d'ensemble invariants (équilibre, cycles limites) et de points critiques ainsi que les bifurcations. Les notions de chaos prennent naissance dans l'étude de tels systèmes. Sur ce sujet, on peut citer des références classiques comme (ARNOLD, 1973 ; GUCKENHEIMER & HOLMES, 1983 ; SEYDEL, 1994).

Un modèle proie-prédateur. On présente dans cette partie un exemple classique de système dynamique. Il s'agit d'un modèle proie-prédateur régit par les équations suivantes :

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad y' = f(t, y) = \begin{bmatrix} \alpha y_1 - \beta y_1 y_2 \\ \gamma y_2 + \delta y_1 y_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.1)$$

Les différents termes de ces équations peuvent être interprété de la façon suivante :

- $y_1(t)$ est la population de proie à l' instant t ,
- $y_2(t)$ est la population de prédateur à l' instant t ,
- α est le taux de naissance moins le taux de décès naturel des proies ($\alpha > 0$),
- β est la probabilité de rencontre entre une proie et un prédateur conduisant à la diminution des proies,
- γ est le taux de mortalité naturel des prédateurs sans proie ($\gamma < 0$),
- δ est le facteur de croissance de la population grâce à la rencontre de proies et de prédateurs.

Des valeurs typiques pour ces coefficients pour ces coefficients peuvent être prises de la sorte :

$$\alpha = .25, \beta = .01, \gamma = -1.00, \delta = .01 \quad (2.3.2)$$

Partant d'une donnée initiale $y(0)$, les questions qualitatives qui peuvent se poser concernant ce système peuvent être : Est ce que les deux populations peuvent vivre, ou disparaître ou encore s'équilibrer ?

En fait, on peut observer que ce type de système possède des solutions périodiques pour certaines valeurs initiales. Par exemple, partant de $y(0) = (80, 30)^T$, on retrouve cette même

valeur au bout d'un certain temps T . On illustre cette solution à la figure 2.1 où l'on a tracé les trajectoires $y_1(t)$ et $y_2(t)$ ainsi que, dans le plan de phase (y_1, y_2) , la trajectoire. L'existence de ces solutions périodiques aux systèmes dynamiques non linéaires constitue un sujet d'étude à part entière.

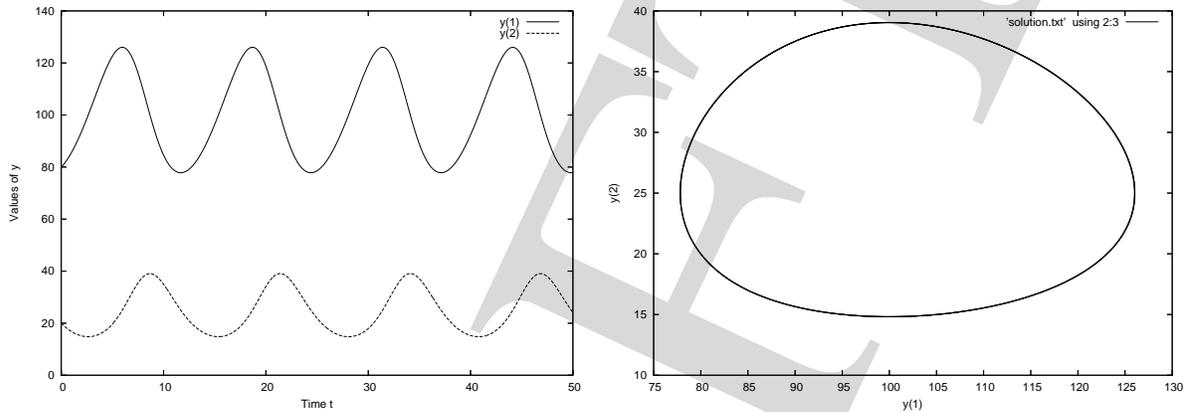


FIG. 2.1 – Solution périodique pour le système proie-prédateur.

L'oscillateur non-linéaire de Van der Pol Ce système est caractérisé par l'équation suivante,

$$\ddot{\theta} - (\mu - \theta^2)\dot{\theta} + \theta = 0 \quad (2.3.3)$$

Ce système peut être comparé à un oscillateur linéaire ($\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} - \theta = 0$) où la viscosité (λ) peut changer de signe suivant θ .

L'équation de l'oscillateur non-linéaire de Van der Pol peut être mise sous la forme d'un système du premier ordre en posant $y = (y_1, y_2)^T = (\theta, \dot{\theta})$:

$$y' = f(t, y) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ (\mu - \theta^2)\dot{\theta} - \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ (\mu - y_1^2)y_2 - y_1 \end{bmatrix} \quad (2.3.4)$$

Réalisons rapidement une étude qualitative de ce système. On peut remarquer tout d'abord que le point $(0, 0)$ est un point fixe (équilibre) du système. On peut ensuite décider d'étudier la stabilité de ce point fixe. Pour cela, on calcule la matrice Jacobienne en $(0, 0)$ de f (Stabilité du système linéarisé en $(0, 0)$), soit :

$$Jac(f)(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.3.5)$$

Les valeurs propres de cette matrice sont les solutions de l'équation $\lambda^2 - \mu\lambda + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = \mu^2 - 4$. On obtient donc trois cas distincts:

1. $|\mu| < 2$, les valeurs propres sont donc complexes conjuguées de valeurs $\lambda_i = \frac{\mu}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}$. Examinons leur partie réelle, pour déterminer de la stabilité:
 - (a) $-2 < \mu < 0$, le point $(0, 0)$ est un foyer attractif

- (b) $\mu = 0$, le point $(0,0)$ est un centre
 - (c) $0 < \mu < 2$, le point est un foyer répulsif
2. $|\mu| = 2$, on obtient une valeur propre double suivant la valeur de μ
 - (a) $\lambda = 1$ pour $\mu = 2$ le point est instable
 - (b) $\lambda = -1$ pour $\mu = -2$ le point est stable
 3. $|\mu| > 2$, les valeurs propres sont réelles : $\lambda_i = \frac{\mu}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 - 4}$ et donc
 - (a) le point est instable si $\mu > 2$
 - (b) le point est stable si $\mu < -2$

Pour conclure, le point $(0,0)$ est stable et attractif pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$. Le changement de comportement pour $\mu = 0$ qui nous fait passer d'un foyer stable à un foyer instable s'appelle une bifurcation. Dans notre cas précis, il s'agit d'une bifurcation de Hopf. Nous illustrons ces propriétés sur les figures 2.2 et 2.3

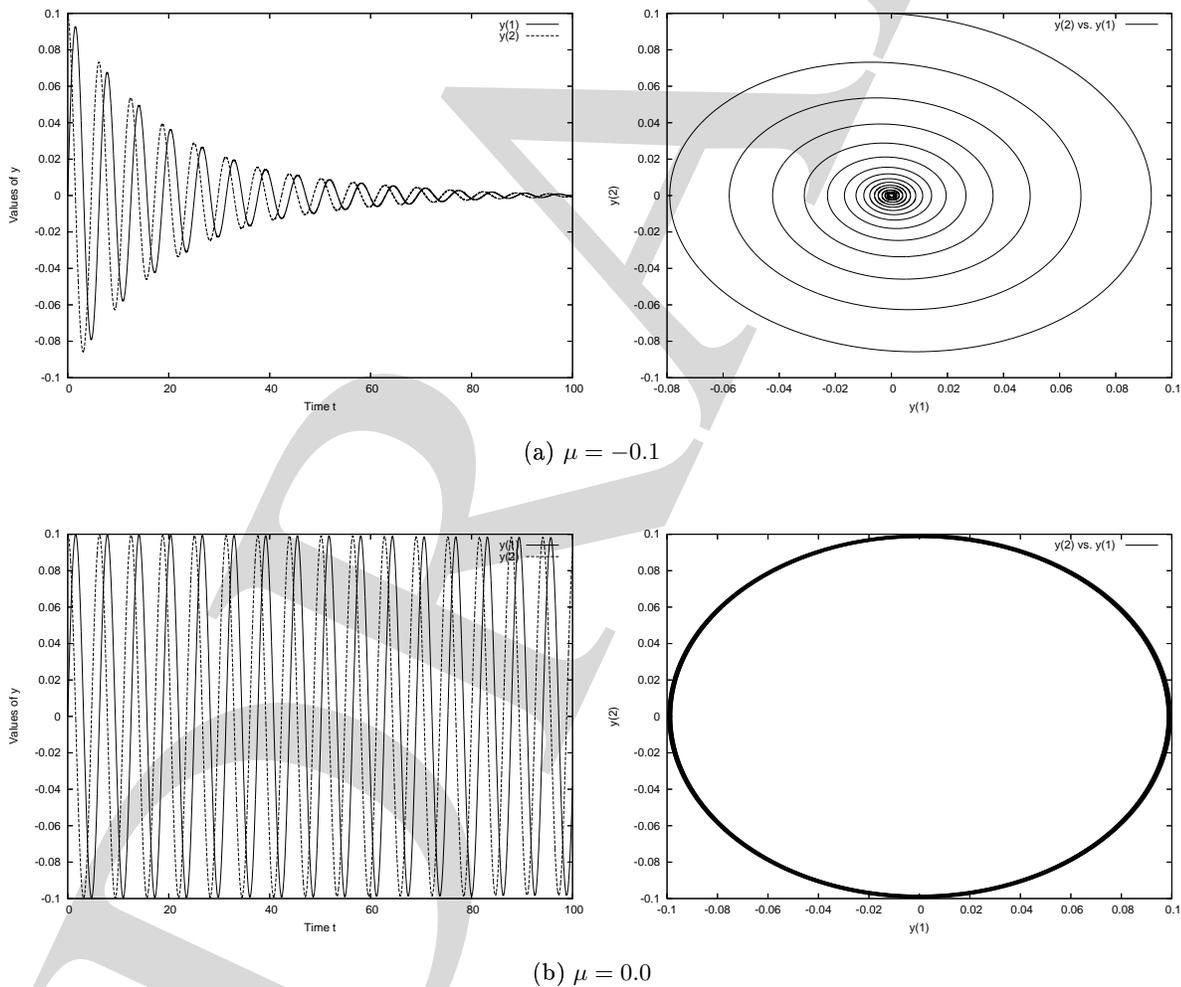


FIG. 2.2 – Solutions pour le système de Van der Pol

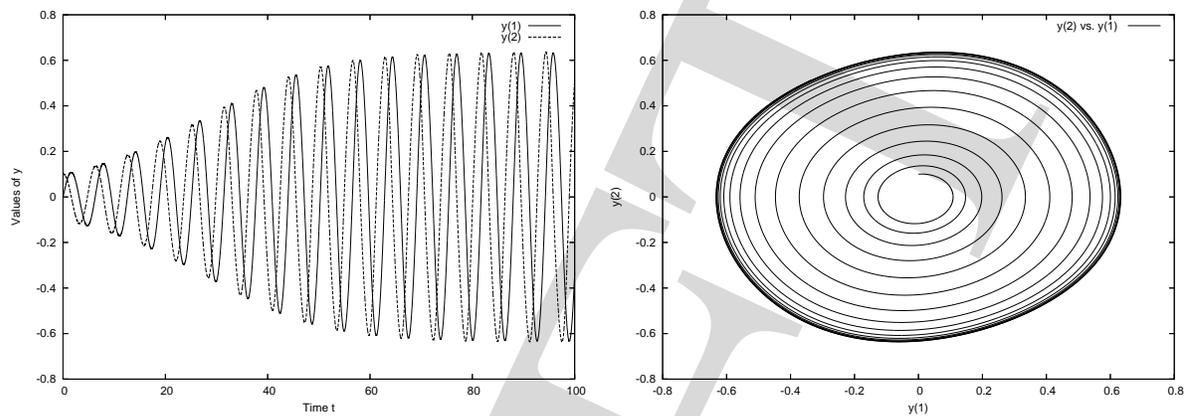
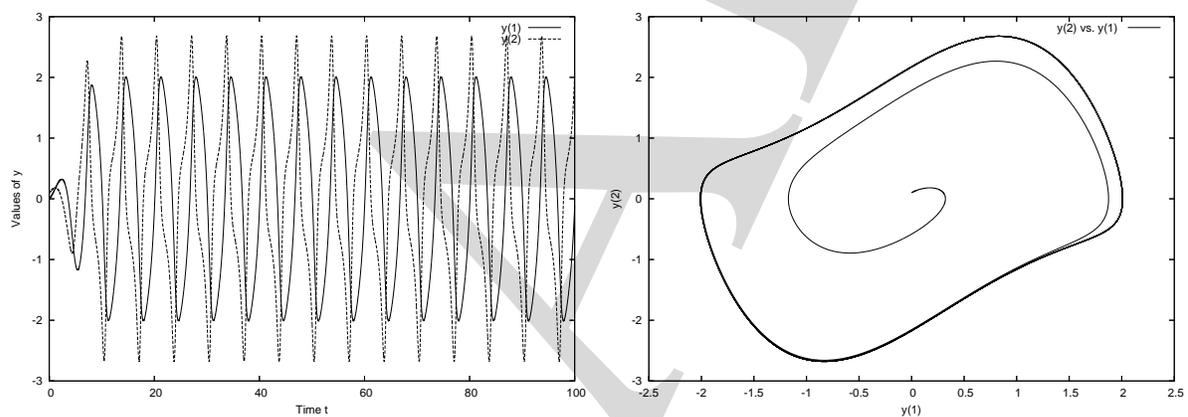
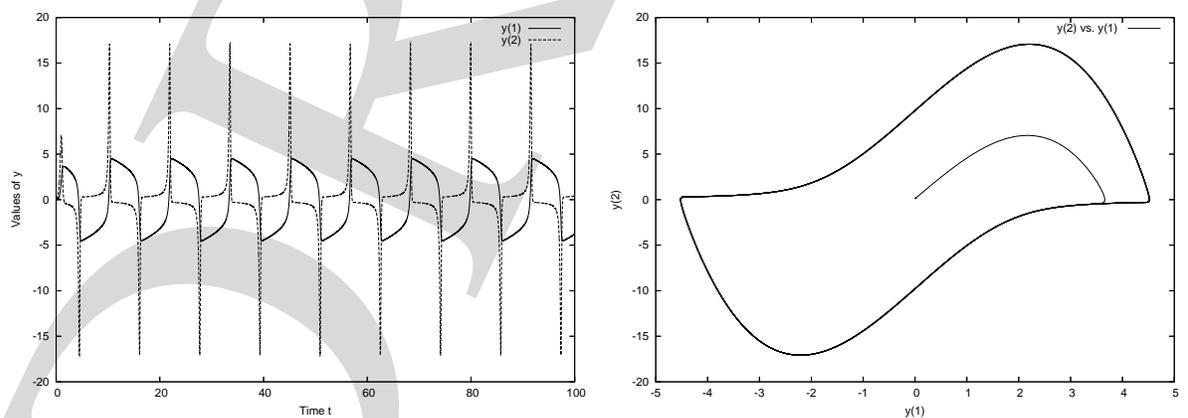
(a) $\mu = 0.1$ (b) $\mu = 1$ (c) $\mu = 5$

FIG. 2.3 – Solutions pour le système de Van der Pol (Suite)

On peut remarquer de plus que dans le cas où le point $(0, 0)$ est instable, on observe que la trajectoire tend vers une solution périodique. Ce type de solution périodique est appelée cycles limite en théorie des systèmes dynamiques.

Le changement de comportement qualitatif de la solution que nous avons appelé bifurcation de Hopf est généralement illustrée en traçant la solution dans une coupe du plan de phase (section de Poincaré), par exemple pour $\dot{\theta} = y_2 = 0$.

Considérons maintenant un régime forcé par une force sinusoïdale, illustré sur la figure 2.4 :

$$\ddot{\theta} - (\mu - \theta^2)\dot{\theta} + \theta = a \cos(\omega t) \quad (2.3.6)$$

On constate alors que les cycles limites de la solution s'accrochent sur certaines fréquences.

Remarques générales. On peut remarquer que même avec une grande régularité du champ de vecteurs $f(y, t)$ on observe une grande diversité de comportement du à la non linéarité du modèle.

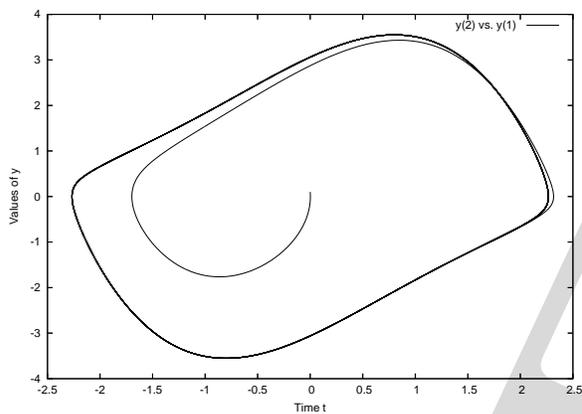
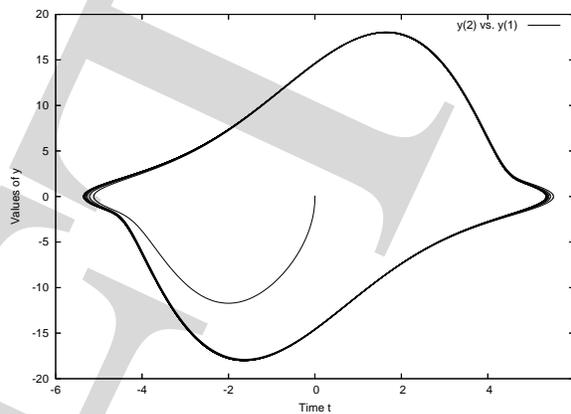
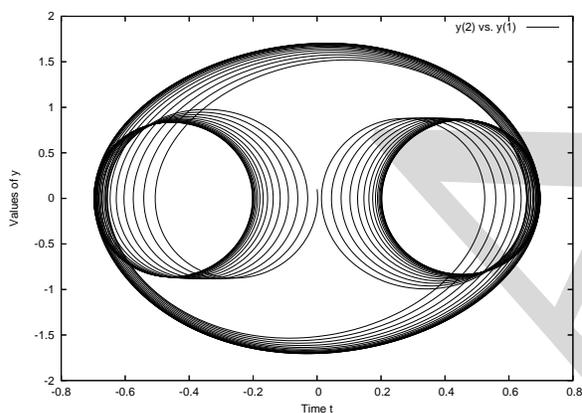
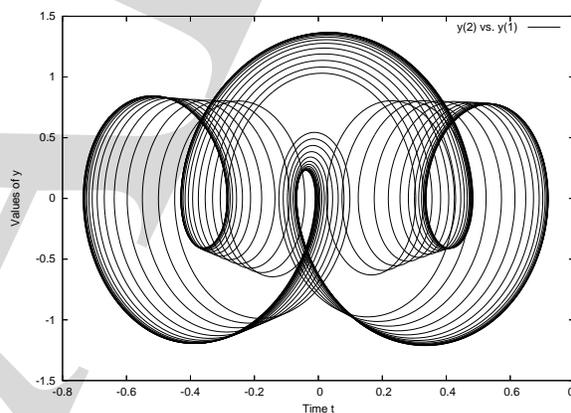
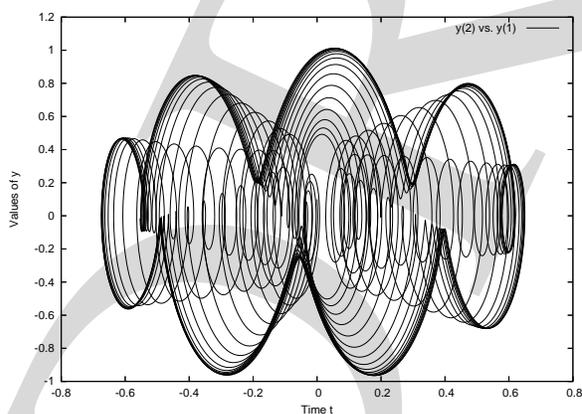
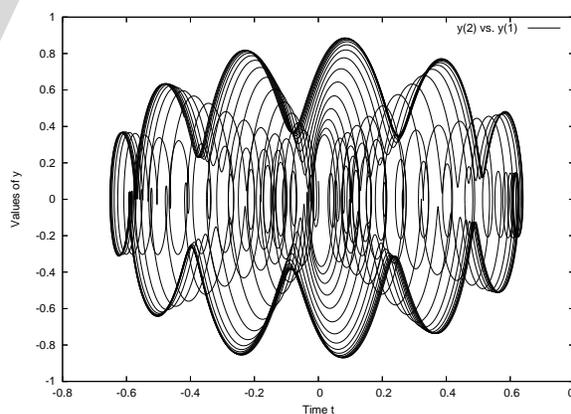
(a) $a = 3, \omega = 1$ (b) $a = 50, \omega = 1$ (c) $a = 3, \omega = 3$ (d) $a = 3, \omega = 4$ (e) $a = 3, \omega = 8$ (f) $a = 3, \omega = 12$

FIG. 2.4 – Solution périodique en régime forcé pour le système de Van der Pol

2.4 Problèmes à valeurs aux limites pour les EDO

Comme nous l'avons déjà souligné, la donnée d'une EDO seule est souvent insuffisante pour définir un problème bien posé. Dans le paragraphe 2.2, la donnée d'une valeur initiale a conduit à la définition du problème de Cauchy. Dans ce paragraphe, on aborde un nouveau type de problème où des conditions sont données aux bords de l'intervalle I . On nomme ces problèmes, *problèmes à valeurs aux bords*, ou, *problèmes aux limites*, souvent désignés par leur acronyme anglais, Boundary Value Problem (BVP).

ASCHER & PETZOLD (1998) ASCHER *et al.* (1995)

2.4.1 Définition

Définition 2.4.1 On appelle un *problème aux limites* le problème suivant :

Étant donnés :

- un intervalle $I_0 = [t_0, T] \subset \mathbb{R}$,
- une fonction f , définie et continue sur $I_0 \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n :

$$f : I_0 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \quad (2.4.1)$$

$$(t, y) \mapsto f(t, y) \quad (2.4.2)$$

- une fonction g , définie et continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n ,

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \quad (2.4.3)$$

$$(u, v) \mapsto g(u, v) \quad (2.4.4)$$

Trouver une fonction $y \in \mathcal{C}^1(I_0)$ telle que

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \forall t \in I_0, \forall y \in \mathbb{R}^n \\ g(y(t_0), y(T)) = 0, \text{ Condition aux limites} \end{cases} \quad (2.4.5)$$

□

On note les matrices jacobienes de $g(u, v)$ par rapport au premier et au second arguments de la façon suivante :

$$R = \frac{\partial g}{\partial u}, \quad S = \frac{\partial g}{\partial v} \quad (2.4.6)$$

Dans la pratique, ces conditions aux limites sont le plus souvent linéaires, on les note alors :

$$Ry(t_0) + Sy(T) = b \quad (2.4.7)$$

avec $R, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$ donnés.

2.4.2 Propriétés

L'existence et l'unicité des problèmes aux limites est un sujet délicat et il est difficile d'obtenir des résultats aussi simples que ceux obtenus pour le problème de Cauchy

Exemple de l'oscillateur. Pour illustrer cet aspect, considérons le problème aux limites suivant :

$$u'' = -u \quad u(0) = u_0, \quad u(T) = u_T \quad (2.4.8)$$

Ce problème peut se remettre sous une forme du premier ordre linéaire :

$$y'(t) = A(t)y(t) + q(t) \quad (2.4.9)$$

$$Ry(t_0) + Sy(T) = b \quad (2.4.10)$$

avec

$$y = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_T \end{bmatrix} \quad (2.4.11)$$

Si l'on considère une intervalle $[0, T]$ avec $T \neq \pi$, alors une unique solution du problème aux limites peut être calculée :

$$y(t) = u_0 \cos t + \frac{u_T - u_0 \cos T}{\sin T} \sin t \quad (2.4.12)$$

Si par contre, on considère $T = \pi$, deux cas sont alors à envisager. Pour $u_0 = -u_T$, on a une infinité de solutions et pour $u_0 \neq -u_T$, on a pas de solution.

On constate donc que les résultats d'existence et d'unicité dépendent fortement des conditions aux limites et de l'intervalle d'étude. Le résultat suivant va nous permettre d'éclaircir cette remarque.

Un résultat d'existence et d'unicité. Considérons un problème aux limites linéaire défini par

$$y'(t) = A(t)y(t) + q(t) \quad (2.4.13)$$

$$Ry(0) + Sy(T) = b \quad (2.4.14)$$

et rappelons la définition suivante :

Définition 2.4.2 On appelle *solution fondamentale d'une EDO linéaire* la fonction $Y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfaisant le problème à valeurs initiales suivant :

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad (2.4.15)$$

$$Y(0) = I_{n \times n} \quad (2.4.16)$$

où $I_{n \times n}$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^{n \times n}$.

□

En utilisant cette solution fondamentale, la solution générale du problème aux limites s'écrit :

$$y(t) = Y(t) \left[c + \int_0^t Y^{-1}(s)q(s) ds \right] \quad (2.4.17)$$

où le paramètre $c \in \mathbb{R}^n$ dépend des conditions aux limites de la façon suivante :

$$[RY(0) + SY(T)]c = b - SY(T) \int_0^T Y^{-1}(s)q(s) ds \quad (2.4.18)$$

On obtient alors un résultat d'existence et d'unicité de base pour les problèmes aux limites linéaires :

Théorème 2.4.1 Considérons un problème aux limites linéaire défini par

$$y'(t) = A(t)y(t) + q(t) \quad (2.4.19)$$

$$Ry(0) + Sy(T) = b \quad (2.4.20)$$

avec $A(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ et $q(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ continues. Le problème aux limites (2.4.19) admet une unique solution si et seulement si la matrice Q définie

$$Q = R + SY(T) \quad (2.4.21)$$

est inversible. La solution s'exprime alors :

$$y(t) = Y(t) \left[c + \int_0^t Y^{-1}(s)q(s) ds \right] \quad (2.4.22)$$

$$\text{avec } c = Q^{-1} \left[b - SY(T) \int_0^T Y^{-1}(s)q(s) ds \right] \quad (2.4.23)$$

□

Preuve : Directe

□

Si l'on revient à l'exemple de l'oscillateur, on vérifie facilement que :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \quad (2.4.24)$$

et donc

$$Q = R + S \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos T & \sin T \end{bmatrix} \quad (2.4.25)$$

Cette matrice est singulière si et seulement si $T = j\pi, j \in \mathbb{N}$. Dans le cas contraire, on a existence et unicité.

2.4.3 Applications

2.4.3.a Équations des poutres simples en traction-flexion

Les poutres en traction-compression : les bars On entend par le terme bar élastique un milieu continu solide unidimensionnelle fini ne pouvant se déformer que la direction longitudinale

en traction et en compression. Ce milieu continu sera noté $\omega = \{x, 0 \leq x \leq l\} \subset \mathbb{R}$ et le point courant de ce milieu sera noté x . Si l'on considère un section δx , de la poutre, l'élongation cette section sera donnée par :

$$(x + \delta x + u(x + \delta x)) - (x + u(x)) = \delta x + (u(x + \delta x) - u(x)) \quad (2.4.26)$$

soit une déformation relative de :

$$\frac{u(x + \delta x) - u(x)}{\delta x} \quad (2.4.27)$$

D'une manière plus générale, on définira la déformation de la bar comme :

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{d u(x)}{d x} \quad (2.4.28)$$

Comme dans tout milieu continu, cette déformation est reliée aux efforts internes dans le bar, c'est à dire la contrainte, $\sigma(x)$ par une loi de comportement. Choisissons une loi de comportement élastique linéaire :

$$\sigma(x) = s(x)\varepsilon(x), \forall x \in \Omega \quad (2.4.29)$$

où $c(x)$ est la raideur élastique du matériau en x .

On postule de plus que la contrainte interne équilibre les forces externes appliquées en x , soit :

$$\sigma(x + \delta x) - \sigma(x) + \int_x^{x+\delta x} f(s) ds = 0 \quad (2.4.30)$$

ce qui de manière équivalente, avec suffisamment de régularité peut se mettre sous la forme locale :

$$-\frac{d \sigma(x)}{d x} = f(x), \forall x \in \Omega \quad (2.4.31)$$

Cette équation peut être vue comme un conséquence du principe fondamentale de la dynamique, de la conservation de la quantité de mouvement le tout en statique.

En utilisant la loi de comportement (2.4.29), on obtient une EDO d'ordre 2,

$$-\frac{d}{d x} \left(c(x) \frac{d u(x)}{d x} \right) = f(x), \forall x \in \Omega \quad (2.4.32)$$

Pour déterminer une solution à cette équation, il convient de prescrire $u(x)$ et $u'(x)$ aux extrémités. Plusieurs cas peuvent envisager comme par exemple :

1. La barre est fixée en $x = 0$ et libre en $x = l$, soit

$$u(0) = 0, \sigma(l) = c(l)\varepsilon(l) = c(l)u'(l) = 0 \quad (2.4.33)$$

2. La barre est étirée en $x = 0$ et en $x = l$, soit

$$u(0) = -a, u(l) = a \quad (2.4.34)$$

3. ...

REMARQUE 2.4.1

Comme dans le cas général pour les problèmes aux limites, il faut prendre garde à la donnée des conditions aux limites. Celles ci peuvent en effet mener à l'exigence d'une infinité de solution ou à la non existence.

On remarquera que nous sommes dans d'une EDO où la variable indépendante n'est pas le temps. Ceci est généralement pour les problèmes de mécanique des milieux continus unidimensionnels.

□

Exemple: Une barre sous pesanteur Considérons une barre homogène de longueur 1 suspendue et soumise à la gravité. L'équation est déplacement vaut donc :

$$-c \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = \rho g \quad (2.4.35)$$

où g est la gravité et ρ la masse volumique de la barre. La solution générale de cette équation est une parabole que l'on peut exprimer par :

$$u(x) = -\frac{mg}{2c}x^2 + ax + b \quad (2.4.36)$$

En utilisant les conditions aux limites $u(0) = 0, u'(1) = 0$, on obtient

$$u(x) = \frac{mg}{c} \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \quad (2.4.37)$$

soit une déformation et une contrainte de

$$\varepsilon(x) = \frac{mg}{c} (1 - x), \quad \sigma(x) = mg(1 - x) \quad (2.4.38)$$

On peut remarquer que le déplacement est maximum à l'extrémité libre la barre et le déformation et la contrainte sont maximum à l'encastrement.

Les poutres élastiques en flexion Considérons maintenant un milieu continu solide unidimensionnelle fini ne pouvant se déformer que la direction transversale en flexion. On note le déplacement transversal, la flèche, par $v(x)$. On postule que le moment de flexion $m(x)$ est proportionnel à la courbure $\theta(x)$ de la poutre :

$$\theta(x) = \frac{u''}{\sqrt{1 + u'^2}} \quad (2.4.39)$$

soit :

$$m(x) = c(x)\theta(x) = \frac{c(x)u''(x)}{\sqrt{1 + u'^2(x)}} \quad (2.4.40)$$

Si l'on suppose de plus que nous en petites perturbations et que la poutre ne s'éloigne pas trop de position initiale, alors on peut supposer $\theta(x) \approx u''(x)$ qui joue le rôle de la déformation de flexion.

Si l'on suppose de plus que le moment de flexion équilibre les moments externes engendré par une force volumique $f(x)$, on obtient :

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(c(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) = f(x) \quad (2.4.41)$$

Nous avons donc obtenu une EDO d'ordre 4 pour laquelle il est nécessaire de prescrire deux conditions aux limites à chaque extrémités.

Flexion d'une poutre sous la gravité (En exercices) On considère une poutre homogène de longueur 1 en appui sur ses deux extrémités et soumise à la gravité. Calculer la flèche maximum de la poutre?

2.4.3.b Contrôle optimale des EDO

Peut être un petit exemple issue du calcul des variations.

- Principe de Hamilton
- Contrôle optimale

2.4.4 Fonctions de Green

Remarques sur les fonctions de Green

2.4.1 Note de Rédaction

Une présentation générale des noyaux de Green est peut être un peu longue ici. voir le début en annexe, il reste :

- Faire le rapprochement entre les fonctions de Green, les problèmes aux valeurs propres et l'analyse de Fourier sur les problèmes simples.
- En choisissant les solutions fondamentales sous forme d'exponentielle de Matrice, les fonctions de Green nous ramène à l'analyse de Fourier des problèmes aux valeurs initiales.

Exemple du système de poutres ELŻANOWSKI (2003)

De la solution fondamentale aux fonctions de Green. La solution fondamentale $Y(t)$ présentée au §2.4.2 est plus particulièrement adaptée à l'écriture des solutions de problèmes de Cauchy, du fait du choix $Y(0) = I_{n \times n}$. Pour l'étude des solutions de problème à valeurs aux limites, on préfère introduire une autre solution fondamentale :

$$\Phi(t) = Q^{-1}Y(t) \quad (2.4.42)$$

qui satisfait elle aussi une EDO homogène :

$$\Phi'(t) = A\Phi \quad (2.4.43)$$

$$R\phi(0) + S\Phi(T) = I_{n \times n} \quad (2.4.44)$$

De la même manière que pour la solution fondamentale $Y(t)$, on peut exprimer la solution du problème aux limites par :

$$y(t) = \Phi(t)b + \int_0^T G(t,s)q(s) ds \quad (2.4.45)$$

où $G(t,s)$ est la *fonction de Green* donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)R\Phi(0)\Phi^{-1}(s), & s \leq t \\ -\Phi(t)S\Phi(T)\Phi^{-1}(s), & s > t \end{cases} \quad (2.4.46)$$

Les fonctions de Green uni-dimensionnelles D'une manière plus générale, on peut définir un ensemble de fonctions de Green associées à un opérateur différentiel linéaire L d'ordre n , tel que :

$$\mathcal{L} = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t)\frac{d}{dt} + a_0(t) \quad (2.4.47)$$

où les fonctions $a_i(t), i = 0, \dots, n-1$ sont continues sur l'intervalle I .

Une fonction de Green est un noyau intégral particulier. On rappelle qu'un noyau intégral $K(t,s)$ associé à f et g est donné par la formule :

$$g(t) = \int f(s)K(t,s) ds \quad (2.4.48)$$

2.4.5 Méthodes numériques associées

On renvoie pour cela à l'ouvrage suivant : (ASCHER *et al.*, 1995).

2.5 Equation Différentielle Algébrique (EDA)

2.5.1 Définition

Considérons de nouveau une EDO du premier ordre

$$F(t, y, y') = 0. \quad (2.5.1)$$

Nous avons vu que si la matrice Jacobienne $\frac{\partial}{\partial v}(F(t, y, v))$ est régulière, on parlait d'EDO implicite et l'on pouvait se ramener, au moins théoriquement, à la forme plus classique (2.1.6).

A l'inverse, lorsque $\frac{\partial}{\partial v}(F(t, y, v))$ est partout singulière, on parle d'EDA. On peut définir de manière très générale une EDA de la façon suivante :

Définition 2.5.1 Une *Equation Différentielle Algébrique (EDA)* d'ordre 1 est une relation impliquant une fonction $y(t) : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ainsi que sa dérivée pouvant se mettre sous la forme :

$$F(t, y, y') = 0. \quad (2.5.2)$$

où la matrice Jacobienne $\frac{\partial}{\partial v}(F(t, y, v))$ est partout singulière.

□

Dans ce cas, le problème exprime non seulement une relation entre les dérivées de y mais aussi des contraintes (relations algébriques) ne portant que sur t et y .

Un cas d'EDA est particulièrement intéressant lorsque le système peut prendre la forme d'une EDO explicite (2.1.6) augmentée d'une équation algébrique. Il s'agit d'une EDA semi-explicite que l'on définit de la façon suivante :

Définition 2.5.2 On appelle une *Equation Différentielle Algébrique (EDA) semi-explicite* scalaire d'ordre 1 un système d'équation qui met en jeu une fonction $y(t) : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ainsi que sa dérivée première de la forme :

$$y' = f(t, y, z) \quad (2.5.3)$$

$$0 = g(t, y, z) \quad (2.5.4)$$

□

Une EDA semi-explicite est donc constituée d'une EDO(2.5.3) dépendant d'un paramètre supplémentaire z et d'une équation algébrique adjointe (2.5.4) qui contraint la solution de l'EDO. On peut remarquer que la matrice Jacobienne de l'EDO équivalente :

$$\frac{\partial}{\partial v}(F(t, y, v)) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.5)$$

est clairement singulière.

La différence entre un EDO implicite (matrice jacobienne régulière) et un EDA est importante. Considérons l'exemple simple donné dans (ASCHER & PETZOLD, 1998) :

$$\begin{cases} y' = z \\ 0 = y - t \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Clairement, les fonctions $y = t$ et $z = 1$ sont solutions du problème et ceci sans même la donnée de conditions initiales. Si on impose une condition initiale arbitraire $y(0) = y_0$, elle est inconsistante à moins que $y_0 = 0$. On constate donc que les conditions d'existence de solutions et de consistance des données initiales sont complètement différentes par rapport au problème de Cauchy.

Notion d'indice Au delà de l'ordre et du degré d'une EDA, une notion fondamentale est la notion d'indice.

Définition 2.5.3 On appelle *indice différentielle d'une EDA* le nombre minimum de dérivation nécessaire pour résoudre de manière unique y' en fonction de y et de t (c'est à dire de définir une EDO pour y).

□

La littérature sur le sujet est vaste. Nous donnons dans la suite quelques cas particuliers d'EDA et quelques exemples d'applications en renvoyant aux ouvrages suivants pour plus de détails : (BRENAN *et al.*, 1989 ; ASCHER & PETZOLD, 1998 ; HAIRER & WANNER, 1996).

2.5.2 EDA linéaire

Définition 2.5.4 On appelle une EDA linéaire à coefficients constants, une EDO pouvant se mettre sous la forme :

$$Ay'(t) + By(t) = f(t) \quad (2.5.7)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n'est pas de rang plein.

□

On associe à une EDA linéaire le faisceau de matrice (A, B) défini par l'ensemble des matrices, $A - \lambda B, \lambda \in \mathbb{C}$. On dit que le faisceau est régulier, si le polynôme caractéristique $p_m(\lambda) = \det(A - \lambda B)$ ne s'annule qu'un nombre fini de points de \mathbb{C} .

On peut montrer que le problème peut admettre une solution seulement si le faisceau associé est régulier. Dans ce cas, on peut ramener l'EDA à la *forme canonique de Kronecker* :

$$\begin{cases} y_1' + Cy_1 = f_1(t) \\ Ny_2' + y_2 = f_2(t) \end{cases} \quad (2.5.8)$$

où N est une matrice nilpotente ($N^\nu = 0, N^i \neq 0, 0 < i < \nu$). L'indice de nilpotence, ν , de N est aussi l'indice du faisceau de matrice ainsi que l'indice différentiel de l'EDA. Du fait que la

matrice N soit nilpotente permet d'exprimer explicitement la solution de $y_2(t)$:

$$y_2(t) = \left(N \frac{d}{dt} + I \right)^{-1} f_2(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} (-1)^i N^i f_2^{(i)}(t) \quad (2.5.9)$$

Définition 2.5.5 On appelle une EDA linéaire canonique à coefficients constants un système de la forme :

$$Ny' + y = g(t) \quad (2.5.10)$$

où N est un bloc de Jordan nilpotent de taille ν .

□

On rappelle qu'un bloc de Jordan est une matrice de la forme :

$$N = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix} \quad (2.5.11)$$

Cas des coefficients variables. On peut considérer des systèmes linéaires dont les matrices A et B dépendent du temps. Dans ce cas, on peut encore considérer le faisceau de matrice et une forme canonique de Kronecker mais les conditions de solvabilité et la relation avec l'indice ne sont plus triviales.

2.5.3 Une EDA non linéaire – Forme de Hessenberg

Comme on l'a dit précédemment, il est très difficile de donner des propriétés générales des EDA sans préciser un plus leur forme. Pour cela, donnons la définition d'une forme usuelle d'EDA.

Définition 2.5.6 On appelle forme de Hessenberg de taille $r > 1$ d'une EDA sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y'_1 = F_1(t, y_1, y_2, \dots, y_r) \\ y'_2 = F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_{r-1}) \\ \dots \\ y'_i = F_i(t, y_{i-1}, \dots, y_{r-1}) \\ \dots \\ y'_{r-1} = F_{r-1}(t, y_{r-2}, y_{r-1}) \\ 0 = F_r(t, y_{r-1}) \end{cases} \quad (2.5.12)$$

où la matrice $\frac{\partial F_r}{\partial x_{r-1}} \cdot \frac{\partial F_{r-2}}{\partial x_{r-2}} \dots \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_r}$ est non singulière.

Une EDA de Hessenberg de taille 1 se définit comme :

$$\begin{cases} y'_1 = f(t, y_1, y_2) \\ 0 = g(t, y_1, y_2) \end{cases} \quad (2.5.13)$$

où g_{y_2} est inversible. On parle aussi d'EDA semi-explicite d'indice 1. □

En appliquant la définition (2.5.12) pour $r = 2$ et $r = 3$, on obtient une EDA de taille 2 :

$$\begin{cases} y'_1 = f(t, y_1, y_2) \\ 0 = g(t, y_1) \end{cases} \quad (2.5.14)$$

avec $g_{y_1} f_{y_2}$ inversible et une EDA de taille 3 :

$$\begin{cases} y'_1 = f(t, y_1, y_2, y_3) \\ y'_2 = k(t, y_1, y_2) \\ 0 = g(t, y_2) \end{cases} \quad (2.5.15)$$

avec $g_{y_2} k_{y_1} f_{y_3}$ inversible.

Pour information, une matrice de Hessenberg est une matrice la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} * & * & \dots & * & * & * \\ * & * & \dots & * & * & * \\ 0 & * & \ddots & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * & * \\ 0 & \ddots & \ddots & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \quad (2.5.16)$$

Propriétés. L'indice des formes de Hessenberg est égal à leur taille.

2.5.4 Un exemple d'applications usuelles : équations de Lagrange avec contraintes et les circuits électriques.

Circuits électriques. Les applications des EDA sont nombreuses. Une des plus importantes est la simulation des circuits électriques comportant des résistances, des capacités et des bobines. En effet, la mise en équations des circuits par les lois de Kirschoff comporte deux phases : l'écriture de la loi des mailles qui conduit à des équations différentielles et la loi des noeuds qui conduit à des équations algébriques. On obtient donc, par cette méthode, naturellement, un EDA. Le plus souvent, par dérivation successive, on peut se ramener à une EDO standard. Cette manipulation n'est pas contre par toujours évidente et fait perdre de nombreuses propriétés structurelles au problème. C'est pourquoi de nombreux algorithmes numériques sont aujourd'hui développés pour résoudre directement les EDA.

Equations de Lagrange avec contraintes. Considérons dans cette partie un autre exemple d'applications des EDA : il s'agit des systèmes mécaniques composés d'un assemblage de solides rigides. On parle aussi plus communément de mécanismes.

Un mécanisme peut être décrit par un ensemble de coordonnées généralisées $q \in \mathbb{R}^n$ et un ensemble de m contraintes (holonomes) qui lient ces coordonnées $g_j(t, q(t)) = 0, j = 1 \dots m$. Les équations du mouvement d'un tel système peuvent être écrites en définissant le Lagrangien :

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}) - U(q, \dot{q}, t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(t, q) \quad (2.5.17)$$

où T est l'énergie cinétique du système, U son énergie potentielle et $\lambda = (\lambda_j, j = 1 \dots m)$ les multiplicateurs, qui peuvent s'interpréter comme les forces de réactions garantissant le respect des contraintes. Les équations de Lagrange qui s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.5.18)$$

conduisent aux équations du mouvement suivantes:

$$\begin{cases} v = \dot{q} \\ M(q)\dot{v} = f(t, q, v) - G^T(t, q)\lambda \\ 0 = g(t, q) \end{cases} \quad (2.5.19)$$

dans le cas où

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (2.5.20)$$

et avec

$$G(t, q) = \frac{\partial}{\partial q} (g) \quad (2.5.21)$$

On voit donc que les équations du mouvement se mettent naturellement sous la forme d'une EDA. Dans certains systèmes simples, il est possible d'éliminer les contraintes et de réduire le nombre de coordonnées généralisées pour obtenir une EDO implicite. Pour les systèmes mécaniques bouclés, ou encore les mécanismes contraint à suivre une trajectoire donnée, il n'est plus possible d'effectuer cette manipulation et nous avons affaire à une EDA.

Exemple du Pendule cf ASCHER & PETZOLD (1998)

2.5.1 Note de Rédaction

A terminer

2.6 Problèmes unilatéraux.

Contrainte unilatérale : Inclusion différentielle.