

Chapitre 3

EDP linéaire du premier ordre.

L'équation de transport

Contenu du Chapitre 3

3.1	Introduction	60
3.2	Notions de transport, conservation et propagation.	60
3.2.1	Illustration du phénomène de transport et de propagation	60
3.2.2	Forme conservative et forme forte	62
3.2.3	Caractère hyperbolique et lien avec les EDP hyperboliques	63
3.3	Méthodes des caractéristiques	64
3.3.1	Méthodes des caractéristiques pour l'équation de transport à coefficients constants.	64
3.3.2	Méthodes des caractéristiques pour l'équation à coefficients variables	65
3.3.3	Résolution pratique par la méthode des caractéristiques	67
3.4	Le problème des conditions aux limites	69
3.4.1	Exemples et position du problème	69
3.4.2	Les solutions dans les grandes lignes	70
3.5	Chocs, Détente et solutions faibles	71
3.6	Lois de conservation en mécanique des milieux continus	72
3.6.1	Description eulérienne et description lagrangienne	72
3.6.2	Equations de conservation	73
3.6.3	Loi de conservation de la masse	75
3.6.4	Loi de conservation de la quantité de mouvement	75
3.7	Autres applications	77
3.7.1	Modèle de démographie/Renouvellement cellulaire	77
3.7.2	Modèle de communication TCP	77
3.7.3	Les équations cinétiques	77
3.8	Méthodes numériques associées	79
3.9	Exercices – Application de la méthode des caractéristiques	80

Notations

Matériel: GOLSE (2003–2004) ; PERTHAME (2003–2004)

3.1 Introduction

Cadre général Les équations de transport sont les EDP linéaires du premier ordre. Dans le cas bidimensionnel, elles peuvent s'écrire sous la forme générale suivante

$$a(x, t) u_t(x, t) + b(x, t) u_x(x, t) + c(x, t) u(x, t) = d(x, t) \quad (3.1.1)$$

sur un domaine $(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. La seconde variable est souvent notée t pour souligner une évolution en temps.

Nous verrons que l'on peut envisager de la même façon des équations linéaires du premier ordre dans des espaces de dimension supérieure en considérant que la variable $x \in \mathbb{R}^n$. On obtient alors une forme plus générale pour l'équation de transport :

$$a(x, t) u_t(x, t) + b(x, t) \cdot \nabla_x u(x, t) + c(x, t) u(x, t) = d(x, t) \quad (3.1.2)$$

Il est important de remarquer que le terme $b(x, t)$ est désormais vectoriel dans cette formulation.

3.2 Notions de transport, conservation et propagation.

3.2.1 Illustration du phénomène de transport et de propagation

Pour matérialiser la notion de propagation ou de transport, considérons la cas homogène linéaire à coefficients constants :

$$a u_t(x, t) + b u_x(x, t) = 0 \quad (3.2.1)$$

En supposant que $a \neq 0$, on pose $c = \frac{b}{a}$ pour obtenir

$$u_t(x, t) + c u_x(x, t) = 0 \quad (3.2.2)$$

Si l'on considère connue une solution à l'instant $t = 0$,

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad (3.2.3)$$

alors on connaît la solution pour tout t . Cette solution est donnée par :

$$u(x, t) = \phi(x - ct) \quad (3.2.4)$$

En effet, si on pose $z = x - ct$,

$$u_x(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial (x - ct)}{\partial x} = \frac{d\phi}{dz} \quad (3.2.5)$$

$$u_t(x, t) = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial (x - ct)}{\partial t} = -c \frac{d\phi}{dz} \quad (3.2.6)$$

d'où :

$$u_t + cu_x = -c \frac{d\phi}{dz} + c \frac{d\phi}{dz} = 0 \quad (3.2.7)$$

On constate donc que la solution est “translatée”, ou si l'on préfère propagée à la vitesse c comme l'illustre la figure 3.1. On peut remarquer à travers cette illustration que toute fonction arbitraire $\phi(x - ct)$ est solution de l'équation (3.2.2). De plus, la résolution du problème nécessite la donnée d'une condition dite initiale $u(x, 0)$ et nous le verrons plus tard de conditions aux limites aux bords.

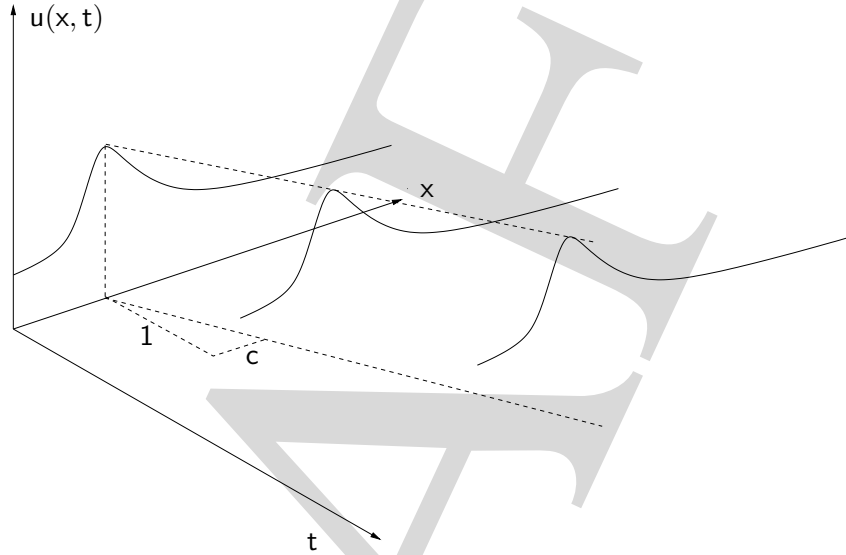


FIG. 3.1 – Illustration de la notion de transport

Considérons l'équation de transport pour $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ (3.1.1), pour laquelle nous supposons que la fonction $a(x, t)$ est non nulle partout sur Ω . Nous pouvons alors écrire que :

$$u_t(x, t) + \frac{b(x, t)}{a(x, t)} \cdot \nabla_x u(x, t) = \frac{d(x, t) - c(x, t)u(x, t)}{a(x, t)} = \frac{f(u, x, t)}{a(x, t)} \quad (3.2.8)$$

On posera dans la suite le vecteur $v(x, t) = \frac{b(x, t)}{a(x, t)} \in \mathbb{R}^n$ pour réécrire l'équation sous la forme :

$$u_t(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla_x u(x, t) = \frac{f(u, x, t)}{a(x, t)} \quad (3.2.9)$$

Pour une solution $u(x, t)$, il apparaît qu'en un point (x, t) la dérivée totale de u dans la direction $v(x, t)$ est égale à $\frac{f(u, x, t)}{a(x, t)}$. Dans le cas homogène, i.e., $f(u, x, t) = 0$, la dérivée totale de u dans la direction $v(x, t)$ est nulle et donc la solution est constante dans cette direction. Il apparaît donc une notion de propagation de la solution $u(x, t)$ avec une célérité $v(x, t)$ dépendant du point (x, t) .

On rappelle que la dérivée directionnelle totale d'une fonction scalaire f dans la direction v est donnée par :

$$D_v f(x_0) = \frac{df(x_0)}{dv} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \quad (3.2.10)$$

et si f est différentiable, on a $D_v f(x_0) = \nabla_x f(x_0) \cdot v$. Dans notre cas, on considère la variable, $X = \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$ et une direction $V(x, t) = \begin{bmatrix} 1 \\ v(x, t) \end{bmatrix}$. La dérivée d'une solution $u(x, t) = u(X)$ dans la direction $V(x, t)$ est donnée par

$$D_V u(X) = \nabla_X u(X) \cdot V = u_t(x, t) + v(x, t) \cdot \nabla_x u(x, t) \quad (3.2.11)$$

3.2.2 Forme conservative et forme forte

Un exemple simple Considérons l'exemple suivant d'EDP du premier ordre quasi-linéaire:

$$u_t(x, t) + a(u) u_x(x, t) = 0 \quad (3.2.12)$$

Dans le cas où $a(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}$, on peut alors réécrire l'équation 3.2.12 comme :

$$u_t(x, t) + f(u)_x = 0 \quad (3.2.13)$$

Cette équation peut être interprétée comme la conservation de la quantité u . En effet, plaçons sur un domaine $[0, T] \times [a, b]$ et supposons que $u(x, t)$ est la densité d'une grandeur quelconque à l'instant t en x . La quantité totale de cette grandeur sur le segment $[a, b]$ à l'instant t s'exprime par

$$\mathcal{U}(t) = \int_a^b u(x, t) dx \quad (3.2.14)$$

et la vitesse de variation de cette grandeur s'exprime par

$$\frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx \quad (3.2.15)$$

On note $f(x, t)$ l'apport extérieur de cette grandeur en un point x à l'instant t . Usuellement, on appelle cette apport un flux. On suppose pour simplifier que ce flux de matière n'est possible qu'aux extrémités en espace du domaine. Le flux total se limite donc à $f(a, t) - f(b, t)$ qui est égale à la variation de la quantité $\mathcal{U}(t)$ soit :

$$\frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(a, t) - f(b, t) \quad (3.2.16)$$

Avec de bonnes hypothèses de régularité sur u et f , cette équation est équivalente à :

$$\int_a^b u_t(x, t) dx = - \int_a^b f_x(x, t) dx \quad (3.2.17)$$

On observe que si l'équation (3.2.13) est respectée alors l'équation précédente est vérifiée. Si de plus cette dernière equation est vérifiée quelque soit l'intervalle $[a, b]$ et avec de bonnes hypothèses de régularité, on peut obtenir l'équivalence entre (3.2.13) et (3.2.17).

Enfin, si le flux est linéaire en u , c'est à dire $f(u) = C(x, t)u(x, t)$, on obtient alors une EDP du premier ordre linéaire:

$$u_t(x, t) + f(u)_x = u_t(x, t) + C(x, t)u_x(x, t) + C_x(x, t)u(x, t) = 0 \quad (3.2.18)$$

Cadre général D'une façon plus générale pour $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, on définit la forme conservative des équations de transport de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \operatorname{div}_x(a(x, t)u(x, t)) = 0, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(t = 0, x) = u^0(x) \end{cases} \quad (3.2.19)$$

où $a(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs donnés. A contrario, on définit la forme forte des équations de transport de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_t(x, t) + c(x, t) \nabla_x u(x, t) = d(x, t, u) \\ u(t = 0, x) = u^0(x) \end{cases} \quad (3.2.20)$$

3.2.3 Caractère hyperbolique et lien avec les EDP hyperboliques

Les équations de transport sont aussi qualifiées d'hyperboliques car elles font apparaître une notion de propagation à vitesse finie. La direction de propagation $\frac{b(x, t)}{a(x, t)}$ est aussi appelée *direction caractéristique*. Le lien avec les EDP hyperboliques modélisant les propagation d'ondes peut être fait directement. Considérons un système hyperbolique de propagation d'ondes :

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta_x w = 0, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ w(x, t = 0) = w^0(x) \\ w_t(x, t = 0) = v^0(x) \end{cases} \quad (3.2.21)$$

où c désigne la célérité des ondes. Cette équation peut être mise sous la forme d'un système de $n + 1$ lois de conservations du premier ordre. On introduit pour cela les quantités

$$\begin{cases} v = w_t \\ u = c \nabla_x w \end{cases} \quad (3.2.22)$$

et l'on obtient alors un système de loi de conservations :

$$\begin{cases} v_t - c \operatorname{div}_x u = 0 \\ u_t - c \nabla_x v = 0 \end{cases} \quad (3.2.23)$$

Regardons maintenant les aspects énergétiques d'un système de propagation d'ondes. On associe souvent une énergie de la forme :

$$E(t, x) = \frac{1}{2} (|w_t|^2 + c^2 |\nabla_x w|^2) = \frac{1}{2} (v^2 + |u|^2) \quad (3.2.24)$$

En multipliant par v la première équation du système (3.2.23) et la seconde par u , on obtient en additionnant :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (v^2 + |u|^2) - c \operatorname{div}(vu) = 0 \quad (3.2.25)$$

Cette loi traduit un principe de conservation supplémentaire. En effet, en intégrant l'équation (3.2.25) sur Ω (supposons que les fonctions soient \mathcal{L}^2) et par inversion des dérivées et des intégrales (régularité suffisante) l'équation suivante est obtenue :

$$\int_{\Omega} (v^2 + |u|^2) dx = \int_{\Omega} (v_0^2 + |u_0|^2) dx, \forall t \geq 0, u_0 = c \nabla w_0 \quad (3.2.26)$$

Dans le cas non linéaire, nous verrons qu'une loi de conservation comme celle-ci est appelée entropie. Ce concept est très important aussi bien pour l'analyse mathématique de ces équations que pour les méthodes numériques.

3.3 Méthodes des caractéristiques

On donne, dans ce paragraphe, quelques résultats concernant les solutions des équations de transport. On trouvera plus de détails sur les aspects mathématiques dans un ouvrage comme (HÖRMANDER, 1997)

Dans ce paragraphe, on donne d'abord quelques résultats sur les solutions des équations de transport à coefficients constants puis variables. Plus que les résultats d'existence et d'unicité nous accordons d'avantage d'importance à la construction et à la forme des solutions. Ces résultats considèrent des problèmes posés sur tout $x \in \mathbb{R}^n$.

3.3.1 Méthodes des caractéristiques pour l'équation de transport à coefficients constants.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$, considérons le problème de Cauchy homogène d'inconnue $u \equiv u(x, t)$, sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$:

$$\begin{cases} u_t + v \cdot \nabla_x u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où la fonction $u^0(x)$ est une donnée du problème.

Supposons que la fonction u est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ et posons $\phi_y(t) = u(y + tv, t), \forall y \in \mathbb{R}^n$. La fonction ϕ_y est de classe \mathcal{C}^1 (comme composée de fonctions \mathcal{C}^1) pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et l'on a¹ :

$$\frac{d}{dt} \phi_y(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla_x \right) u(y + tv, t) = 0, \forall t > 0 \quad (3.3.2)$$

La fonction ϕ_y est donc constante sur \mathbb{R}^+ :

$$u(y + tv, t) = \phi_y(t) = \phi_y(0) = u^0(y) \quad (3.3.3)$$

En posant $y = x - tv$, on obtient le résultat déjà envisagé précédemment :

$$u(x, t) = u^0(x - tv), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (3.3.4)$$

1. $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt}$ ou si on préfère de termes de différentiel $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx$

Réciproquement, si $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, la fonction $u : (x, t) \mapsto u^0(x - tv)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ et on montre qu'elle est solution de (3.3.1)

Ce calcul simple est connue sous le nom de *méthode des caractéristiques*. On appelle *courbe caractéristique* de l'équation (3.3.1) toute courbe paramétrée par t dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ de la forme $t \mapsto (t, x + tv)$. La méthode des caractéristiques exploite simplement le fait que la solution de l'équation (3.3.1) est constante le long des courbes caractéristiques. Nous verrons que cette méthode peut se généraliser aux EDP linéaires du second ordre.

Résumons ce paragraphe un résultat d'existence et d'unicité :

Théorème 3.3.1 Pour toute fonction u^0 de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, le problème (3.3.1) admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$. Cette solution est donnée par :

$$u(x, t) = u^0(x - tv), t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (3.3.5)$$

□

Problème non homogène (En exercices) Soit $c \equiv c(x, t)$ et $d \equiv d(x, t)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$. On peut montrer que pour tout $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, le problème

$$\begin{cases} u_t + v \cdot \nabla_x u + cu = d, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.3.6)$$

admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ et que cette solution est donnée par :

$$\begin{aligned} u(t, x) = & u^0(x - tv) \exp\left(-\int_0^t c(\tau, x - tv + \tau v) d\tau\right), t \geq 0 \\ & + \int_0^t \exp\left(-\int_s^t c(\tau, x - tv + \tau v) d\tau\right) d(s, x - tc + sv) ds, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

3.3.2 Méthodes des caractéristiques pour l'équation à coefficients variables

Dans ce paragraphe, on considère le problème de transport à coefficients variables :

$$\begin{cases} u_t + v(x, t) \cdot \nabla_x u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.3.8)$$

où la fonction $u^0(x)$ est une donnée du problème, ainsi que la donnée du "champ de vitesse" $v(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$.

Nous allons essayer d'adapter au cas à coefficients variables la méthode des caractéristiques introduite dans le § précédent. Définissons tout d'abord la notion de courbe caractéristique.

Définition 3.3.1 Une courbe caractéristique de l'équation de transport (3.3.8) est une solution X du système différentiel ordinaire :

$$\frac{dX}{dt} = v(X(t), t), \quad X(t_0) = x_0 \quad (3.3.9)$$

□

Cette définition s'explique en appliquant le théorème de dérivation des applications composées pour x appartenant à une courbe caractéristique $X(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(X(t), t) &= u_t(X(t), t) + \frac{dX}{dt} \cdot \nabla_x u(X(t), t) \\ &= u_t(X(t), t) + v(x, t) \cdot \nabla_x u(X(t), t) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

On remarque que l'on étend la propriété du cas à coefficients constants. La solution est stationnaire le long des courbes caractéristiques.

Pour l'étude des équations de transport avec un "champ de vitesse" variable, on est donc amené à étudier une EDO (3.3.9). Les conditions d'existence et d'unicité des solutions qui portent sur $v(x, t)$ sont données par les théorèmes sur les EDO vus au Chapitre 2 (Cauchy-Lipschitz). Nous ferons l'hypothèse dans la suite que ces conditions sont respectées, c'est à dire : v et $\nabla_x v$ sont continues sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ et que v vérifie la condition de croissance :

$$|v(x, t)| \leq C(1 + |x|), C > 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \quad (3.3.11)$$

Lorsqu'une solution au système (3.3.9) existe et est unique, nous la noterons $X(t, t_0, x_0)$. De manière plus générale, on définit le *flot caractéristique* par l'application suivante :

$$X : (s, t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto X(s, t, x) \in \mathbb{R}^n \quad (3.3.12)$$

On a vu au paragraphe précédent que le flot respectait l'équation différentielle (3.3.9) en variable s , i.e :

$$\frac{\partial X(s, t, x)}{\partial s} = v(s, X(s, t, x)) \quad (3.3.13)$$

Donnons ce lemme technique de calcul :

Lemme 3.3.1 Soient $T > 0$, v et $\nabla_x v$ sont continues sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ et vérifiant la propriété de croissance : (3.3.11) alors, $\forall t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$, et $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$X(t_3, t_1, x) = X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \quad (3.3.14)$$

Preuve : Éléments de Preuve : Vérifier que chaque membre de (3.3.14) définit une courbe caractéristique paramétrée par t_3 et passant par $X(t_2, t_1, x)$ pour $t_3 = t_2$. Conclure par la propriété d'unicité. □

On peut montrer de plus que le flot est une solution de l'équation de transport en variables (t, x) . Pour cela, donnons le lemme suivant :

Lemme 3.3.2 Le flot X vérifie l'équation de transport :

$$X_t(s, t, x) + v(x, t) \cdot \nabla_x X_t(s, t, x) = 0, \quad 0 < s, t < T, x \in \mathbb{R}^n \quad (3.3.15)$$

Preuve : Elements de Preuve :

- Dériver la relation (3.3.14) par rapport à t_2
- Substituer $t_1 = t_2 = t$ et $t_3 = s$

□

Pour terminer, nous donnons la solution générale du problème de transport :

Théorème 3.3.2 Pour toute fonction, $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, le problème (3.3.8) admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$; cette solution est donnée par la formule

$$u(x, t) = u^0(X(0, t, x)), \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n \quad (3.3.16)$$

où X est le flot caractéristique associé à l'équation de transport.

□

Preuve : Comme la fonction $t \mapsto u(X(t, 0, x), t)$ est constante d'après le lemme 3.3.2, on a

$$u(X(t, 0, x), t) = u(X(0, 0, x), 0) = u^0(x), \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n \quad (3.3.17)$$

En posant $y = X(t, 0, x)$, d'après le lemme 3.3.1, on a $x = X(0, t, y)$ de sorte que (3.3.17) est équivalent à (3.3.16). La réciproque s'appuie sur le lemme 3.3.2.

□

Problème non homogène (En exercices) Soit $c \equiv c(x, t)$ et $d \equiv d(x, t)$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. On peut montrer que pour tout $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, le problème

$$\begin{cases} u_t + v(x, t) \cdot \nabla_x u + cu = d, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(x, 0) = u^0(x), x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.3.18)$$

admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ et que cette solution est donnée par :

$$\begin{aligned} u(t, x) = & u^0(X(0, t, x)) \exp\left(-\int_0^t c(\tau, X(\tau, t, x)) d\tau\right), t \geq 0 \\ & + \int_0^t \exp\left(-\int_s^t c(\tau, X(\tau, t, x)) d\tau\right) d(s, X(s, t, x)) ds, \quad t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

3.3.3 Résolution pratique par la méthode des caractéristiques

On donne dans ce paragraphe une méthode de résolution des EDP du premier ordre qui s'appuie sur la méthode des caractéristiques. On considère dans ce paragraphe directement le cas quasi-linéaire et pas nécessairement homogène pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Considérons une solution $z = u(x, y)$ de l'équation de transport quasi-linéaire suivante :

$$a(x, y, u) u_x(x, y) + b(x, y, u) u_y(x, y) = c(x, y, u) \quad (3.3.20)$$

Une normale, n à cette surface solution est colinéaire à :

$$\nabla(u(x, y) - z) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3.3.21)$$

L'équation (3.3.20) peut donc s'écrire :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot n = 0 \quad (3.3.22)$$

ce qui implique que le vecteur $[a, b, c]^T$ est partout tangent aux surfaces solutions. Ceci nous amène à construire les courbes caractéristiques en cherchant la solution du système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = a(x, y, u) \\ \frac{dy}{d\tau} = b(x, y, u) \\ \frac{du}{d\tau} = c(x, y, u) \end{cases} \quad (3.3.23)$$

REMARQUE 3.3.1

1. Les courbes caractéristiques, solutions de ce système, coïncident avec la définition du paragraphe précédent pour le cas particulier linéaire homogène et avec $y = t$, $a(x, y, u) = v(x, t)$, et $c(x, y, u) = 0$; la dernière condition revenant à ce que les solutions soient constantes sur les courbes caractéristique paramétrée par τ
2. Dans le cas des équations linéaires, le système d'EDO est découplé.

□

Conditions aux limites. Une fois connue la solution générale $(x(\tau), y(\tau), u(\tau))$ du système (3.3.23), il convient d'appliquer les conditions aux limites. On suppose pour cela que la solution $u(x, y)$ est spécifiée sur une courbe Γ . Cela revient à donner $u = u_0(s)$ pour $(x_0(s), y_0(s)) \in \Gamma$ (s paramétrise la courbe Γ) soit :

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad u = u_0(s) \text{ pour } \tau = 0 \quad (3.3.24)$$

Pour un exemple, voir l'exercice 1.

Solution alternative Le système d'EDO (3.3.23) peut être réarranger sous la forme suivante :

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)} \quad (3.3.25)$$

Si on est capable de trouver deux intégrales linéairement indépendantes de ce problème, disons $f(x, y, u) = C_1$ et $g(x, y, u) = C_2$ alors la solution sous la forme implicite :

$$f(x, y, u) = F(g(x, y, u)) \quad (3.3.26)$$

avec F une fonction arbitraire.

Pour un exemple, voir l'exercice 3 .

3.4 Le problème des conditions aux limites

3.4.1 Exemples et position du problème

Dans cette partie, nous considérons le problème aux limites pour l'équation de transport. Dans le paragraphe précédent, le problème était posé pour (t, x) appartenant à un domaine $I \times \mathbb{R}^n$, où I est intervalle de \mathbb{R} . On obtenait alors un problème aux valeurs initiales que l'on peut aussi appelée problème de Cauchy.

On souhaite désormais introduire des conditions aux limites en espace, et pour cela on considère un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à bord $\partial\Omega \mathcal{C}^1$ par morceaux.

Pour résoudre le problème :

$$\begin{cases} u_t(x, t) + v(x) \cdot \nabla_x u(x, t) = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.4.1)$$

on peut ajouter des conditions aux limites sur une partie du bord $\Gamma \subset \partial\Omega$ de la forme:

$$u(x, t) = u^b(t), \quad x \in \Gamma \quad t > 0. \quad (3.4.2)$$

Considérons les exemples suivants afin de se faire une idée du type de conditions aux limites que l'on peut imposer.

Exemple 1 On se place dans le cas unidimensionnel, $n = 1$, avec $\Omega =]-1, 1[\subset \mathbb{R}$ et avec un champ constant positif, $v(x, t) = v_0 > 0$. Considérons les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u_t + v_0 u_x = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(x, t = 0) = u^0(x), & u(-1, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Le problème défini ainsi n'a, en général, pas de solution. En effet, l'équation de transport implique que $u(x, x + v_0 t) = u^0(x), \forall x \in]-1, 1[$ et pour tout $t \in [0, (1 - x)/v_0]$. Pour $t = (1 - x)/v_0$, on trouve en particulier que $u^0(x) = 0$. Le problème n'a donc pas de solution à moins que $u^0(x)$ soit identiquement nulle.

REMARQUE 3.4.1

Nous constatons à travers cette remarque que les conditions aux limites pour résoudre une EDP dépendent fortement de l'opérateur différentiel qui intervient dans cette EDP. Nous verrons par

exemple dans le Chapitre 8 que le problème de Dirichlet pour l'opérateur de Laplace admet une solution unique pour toutes conditions aux limites suffisamment régulières. □

Exemple 2 On considère, à nouveau le problème de l'exemple 1, mais légèrement modifié :

$$\begin{cases} u_t + v_0 u_x = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ u(x, t = 0) = u^0(x), & u(-1, t) = 0 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

Comme pour l'exemple précédent, l'équation de transport implique la solution :

$$u(x, t) = u^0(x - v_0 t), \quad \text{si } x - v_0 t > -1 \quad (3.4.5)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \text{si } x - v_0 t < -1 \quad (3.4.6)$$

REMARQUE 3.4.2

Dans ce cas, il existe une solution au problème. Par contre, on constate, en particulier, que malgré une grande régularité des données, $u^0 \in C^\infty([-1, 1])$ et une fonction nulle comme condition aux limites, la solution est discontinue en tout point de la forme $(t, x = -1 + tv_0)$. □

3.4.1 Note de Rédaction

Ajouter une illustration et commenter la notion de zone d'influence de la condition aux limites et de la condition initiale.

3.4.2 Les solutions dans les grandes lignes

On constate que malgré l'extrême simplicité apparente de l'équation de transport, les problèmes de conditions aux limites sont des problèmes délicats dans le cas général. De nombreux résultats ont été donnés dans la littérature sur ce sujet. Pour n'en citer qu'un, on renvoie à (BARDOS, 1970).

Considérons le problème décrit par (3.4.1), et définissons la partition suivante du bord :

$$\Gamma_+ = \{x \in \partial\Omega \mid v(x) \cdot n_x > 0\} \quad (3.4.7)$$

$$\Gamma_- = \{x \in \partial\Omega \mid v(x) \cdot n_x < 0\} \quad (3.4.8)$$

$$\Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega \mid v(x) \cdot n_x = 0\} \quad (3.4.9)$$

$$(3.4.10)$$

Les ensembles Γ_+ , Γ_- et Γ_0 désignent respectivement les parties du bord où le champ de vecteur $v(x)$ est sortant, rentrant ou tangent.

Comme les exemples précédents le laissent envisager, les conditions aux limites pour l'équation de transport (3.4.1) posées uniquement sur Γ_- conduisent à un problème bien posé (existence et unicité). On note usuellement donc cette condition aux limites de la manière suivante :

$$u|_{\Gamma_-}(x, t) = u^b(x, t) \quad (3.4.11)$$

3.5 Chocs, Détente et solutions faibles

3.5.1 Note de Rédaction

Trop long pour ce chapitre, peut être reprendre si on le temps dans le chapitre sur les systèmes hyperboliques non linéaires.

1. Exemple simple avec une discontinuités HOWELL (2004) ; RENARDY & ROGERS (1993)
2. Introduction des distributions
3. Solutions faibles

3.6 Lois de conservation en mécanique des milieux continus

Nous rappelons dans cette partie les bases d'un modèle qui permet de traduire un principe fondamental en physique: le principe de conservation. Nous l'illustrons directement en Mécanique des Milieux Continus en renvoyant aux ouvrages classiques sur ce sujet (GERMAIN, 1973 ; SALENÇON, 1998) pour plus de détails. Un très bon cours de Mécanique des milieux continus par GARRIGUES (2002) peut aussi être téléchargé.

3.6.1 Description eulérienne et description lagrangienne

Considérons un milieu continu \mathcal{M} , i.e, un milieu continu de particules matérielles non isolées. A tout instant $t \in [0, T]$, on appelle la *configuration* $\bar{\Omega}^t$ la partie de \mathbb{R}^3 occupée par les particules constituants \mathcal{M} . On note Ω^t l'intérieur de cet ensemble et Γ^t sa frontière. La configuration à l'instant initial $\bar{\Omega}^0$ sera appelée la *configuration de référence*.

Définissons un repère attaché à la configuration de référence que nous nommerons *repère de référence* définie par trois axes orthogonaux X_1, X_2 et X_3 munis de leurs vecteurs unitaires $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ et \mathbf{E}_3 et son origine O . Les particules matérielles seront désignées par leur position, X , dans ce repère :

$$X = \left[X_1 \quad X_2 \quad X_3 \right]_{\{\mathbf{E}_i\}}^T = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3. \quad (3.6.1)$$

On définit maintenant la *fonction position* χ par :

$$\begin{aligned} \chi : \bar{\Omega}^0 \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (X, t) &\longrightarrow x = \chi(X, t). \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Cette fonction fournit à l'instant t la position de la particule de \mathcal{M} qui occupait la position X à l'instant initial. Cette position est repérée à l'instant t par ses composantes :

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]_{\{\mathbf{E}_i\}}^T = x_1 \mathbf{E}_1 + x_2 \mathbf{E}_2 + x_3 \mathbf{E}_3. \quad (3.6.3)$$

Par abus de notation, la fonction position est souvent confondue avec la fonction transformation.

On appelle *fonction déplacement* \mathbf{u} la fonction définie par rapport à la configuration de référence suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} : \bar{\Omega}^0 \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (X, t) &\longrightarrow \mathbf{u}(X, t) = \chi(X, t) - X. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Description lagrangienne et description eulérienne. On parle pour X de *variables lagrangiennes* ou variables matérielles, ou encore inertielles. C'est le point de vue courant en mécanique du solide, où il est *a priori* facile de suivre une particule dans son mouvement. La configuration de référence est alors privilégiée pour l'étude du mouvement. Lorsque les diverses grandeurs décrivant un système mécanique sont exprimées par rapport à la configuration de référence en

suivant les particules dans leur mouvement, on parle de description lagrangienne. Les variables indépendantes sont donc les composantes de X , qui dépendent elles-mêmes du temps, t .

La vitesse se définit de la manière suivante en description lagrangienne :

$$\mathbf{V}(X, t) = \frac{d\chi(X, t)}{dt}. \quad (3.6.5)$$

Il s'agit de la dérivée totale de la position χ par rapport au temps. La variable X est supposée indépendante de t . Par contre, la position courante $x = \chi(X, t)$ est une fonction du temps. L'accélération se définit dès lors de la façon suivante :

$$\mathbf{\Gamma}(X, t) = \frac{d^2\chi(X, t)}{dt^2}. \quad (3.6.6)$$

Lorsque l'on souhaite que la description soit indépendante d'une configuration de référence et que l'on étudie les champs mécaniques en un point géométrique donné par x , on utilise une description eulérienne basée sur les variables indépendantes, x et t , dites *variables eulériennes* ou encore géométriques ou spatiales. On ne considère plus la position x comme une variable de X et du temps t . La configuration actuelle est alors privilégiée et toute la cinématique de la transformation est décrite par la vitesse eulérienne, $v(x, t)$. Naturellement, la vitesse eulérienne et la vitesse lagrangienne sont deux expressions différentes de la même grandeur physique.

L'accélération eulérienne doit tenir compte de l'indépendance des variables de description et conduit à la formulation suivante :

$$\gamma(x, t) = \frac{dv(x, t)}{dt} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \nabla_x v(x, t) \otimes v(x, t). \quad (3.6.7)$$

Bien sûr, ces deux descriptions sont équivalentes pour peu que l'on puisse définir une configuration de référence. Pour résumer, la description lagrangienne, qui suit une particule dans son mouvement à partir de sa configuration de référence est particulièrement bien adaptée aux problèmes de mécanique des solides. C'est une description en trajectoires, qui sont définies comme la position des points de la configuration lorsque le temps varie. La description eulérienne, quant à elle, décrit les particules qui passe en un point géométrique donné au cours du temps. C'est une description en lignes de courant particulièrement bien adaptée aux problèmes de mécanique des fluides. On rappelle que les lignes de courant sont définies à instant t donné comme les lignes du champ de vitesses eulériennes, c'est à dire, les lignes qui en chacun de ses points ont une tangente parallèle au vecteur vitesse. Dans \mathbb{R}^3 , ces lignes sont donc des intégrales du système différentiel suivant :

$$\frac{dx_1}{v_1(x, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x, t)} \quad (3.6.8)$$

3.6.2 Equations de conservation

Introduisons dans cette partie quelques résultats classiques relatifs à la conservation d'une grandeur mécanique. Soit \mathcal{F} une grandeur lagrangienne désignée par $\mathcal{F}(X, t)$, sa conservation au cours du temps s'exprime par :

$$\frac{d\mathcal{F}(X, t)}{dt} = 0. \quad (3.6.9)$$

Si \mathcal{F} est une grandeur eulérienne, soit $\mathcal{F}(x, t) = \mathcal{F}(\chi(X, t), t)$ sa conservation au cours du temps s'exprime par :

$$\frac{d\mathcal{F}(x, t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{F}(x, t)}{\partial t} + \nabla_x \mathcal{F}(x, t) \cdot \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial t} = 0. \quad (3.6.10)$$

Traditionnellement, cette dérivée est appelée dérivée particulière ou convective. Pour éviter toute ambiguïté, on la notera dans la suite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{D\mathcal{F}(x, t)}{Dt} &= \frac{\partial \mathcal{F}(x, t)}{\partial t} + \nabla_x \mathcal{F}(x, t) \cdot \frac{\partial \chi(X, t)}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial \mathcal{F}(x, t)}{\partial t} + \nabla_x \mathcal{F}(x, t) \cdot v(x, t). \end{aligned}$$

Si \mathcal{F} est une grandeur intégrale sur un élément de volume $\Omega(t)$ suivi dans son mouvement, i.e :

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\Omega(t)} f(x, t) dx. \quad (3.6.11)$$

on peut s'appuyer sur la formule divergence-flux pour écrire cette conservation sous la forme d'une équation aux dérivées partielles locales :

$$\begin{aligned} \frac{D\mathcal{F}(t)}{Dt} &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + \int_{\partial\Omega(t)} f(x, t) v \cdot n ds, \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x (f(x, t) \cdot v) dx, \\ &= \int_{\Omega(t)} \frac{Df(x, t)}{Dt} + f(x, t) \cdot \operatorname{div}_x v dx. \end{aligned}$$

Citons enfin le lemme fondamental de CAUCHY qui va nous permettre de relier les sources volumiques et les flux surfaciques extérieurs à la variation de $\mathcal{A}(t)$ sur un sous domaine $\omega(t) \subset \Omega(t)$. On va considérer que les sources volumiques de $\mathcal{A}(t)$ sont définies par :

$$\int_{\omega(t)} \varphi_{\mathcal{A}} dx \quad (3.6.12)$$

et un apport surfacique sur la frontière² de ω :

$$- \int_{\partial\omega(t)} J_{\mathcal{A}} ds, \quad (3.6.13)$$

Lemme 3.6.1 (fondamental de Cauchy) Considérons une grandeur $\mathcal{A}(t)$ définie à partir de sa densité spécifique $A(t)$:

$$\forall \omega(t) \subset \Omega(t), \quad \mathcal{A}(t) = \int_{\omega(t)} \rho(x, t) A(x, t) dx \quad (3.6.14)$$

où ρ est la masse volumique. Si on peut exprimer une loi de conservation de \mathcal{A} sous la forme suivante :

$$\frac{D\mathcal{A}(t)}{Dt} = \int_{\omega(t)} \varphi_{\mathcal{A}} dx - \int_{\partial\omega(t)} J_{\mathcal{A}} ds, \quad \forall \omega(t) \subset \Omega(t), \quad (3.6.15)$$

2. Le signe est une convention qui veut que le flux sortant est compté négativement.

alors :

$$1) \quad \exists j_{\mathcal{A}}, \quad J_{\mathcal{A}} = j_{\mathcal{A}} \cdot n, \quad (3.6.16)$$

$$2) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho A v) = \varphi_{\mathcal{A}} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} j_{\mathcal{A}}, \quad (3.6.17)$$

où n est la normale à la surface $\partial\omega(t)$ sortante de $\omega(t)$.

3.6.3 Loi de conservation de la masse

Considérons la masse d'une partie $\omega(t) \subset \Omega(t)$ fermée; sa conservation au cours du temps s'exprime par :

$$\frac{DM(t)}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(\int_{\omega(t)} \rho(x, t) x \right) = 0. \quad (3.6.18)$$

En appliquant le lemme de CAUCHY, on obtient l'équation locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho v) = 0, \quad (3.6.19)$$

ou de manière équivalente :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(v) = 0. \quad (3.6.20)$$

Retour sur le lemme fondamental de Cauchy En utilisant la formule de la divergence d'un produit,

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho A v) = A \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho v) + \rho v \nabla_{\mathbf{x}} A, \quad (3.6.21)$$

la deuxième assertion peut être reformulée³ sous une forme plus traditionnelle à l'aide de l'équation de conservation de la masse :

$$\rho \frac{DA}{Dt} = \varphi_{\mathcal{A}} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} j_{\mathcal{A}}. \quad (3.6.22)$$

3.6.4 Loi de conservation de la quantité de mouvement

Soit \mathcal{T}_{ext} , le tenseur des efforts extérieurs appliqués au système, définissons le tenseur cinétique noté \mathcal{T}_{cin} par :

$$\mathcal{T}_{cin} = \begin{cases} \mathcal{R}_{cin} = \int_{\omega(t)} \rho v \, dx, \\ \mathcal{M}_{cin} = \int_{\omega(t)} x \times \rho v \, dx. \end{cases} \quad (3.6.23)$$

Le bilan de quantité de mouvement s'appuie sur le Principe Fondamental de la Dynamique qui peut être énoncé ainsi :

Soit $\Omega(t)$ la configuration d'un système plongé dans un référentiel galiléen, $\forall \omega(t) \in \Omega(t)$,

$$\frac{D\mathcal{T}_{cin}(t)}{Dt} = \mathcal{T}_{ext}(t). \quad (3.6.24)$$

3. La lecteur pourra s'en assurer

En introduisant les forces volumiques $\mathbf{f}(x, t)$ s'appliquant sur les particules de $\omega(t)$ et $\mathbf{t}(x, t)$ les forces surfaciques s'appliquant aux frontières de $\omega(t)$, on obtient :

$$\frac{D\mathcal{R}_{cin}(t)}{Dt} = \int_{\omega(t)} \mathbf{f}(x, t) dx + \int_{\partial\omega(t)} \mathbf{t}(x, t) ds, \quad (3.6.25)$$

$$\frac{D\mathcal{M}_{cin}(t)}{Dt} = \int_{\omega(t)} x \times \mathbf{f}(x, t) dx + \int_{\partial\omega(t)} x \times \mathbf{t}(x, t) ds. \quad (3.6.26)$$

En appliquant le lemme de CAUCHY, on obtient d'une part l'existence d'un tenseur du second ordre (tenseur de contraintes de CAUCHY) tel que:

$$\exists \sigma, \quad \mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n} = \sigma_{\mathbf{N}}, \quad (3.6.27)$$

d'autre part, l'équation du mouvement⁴ :

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = \mathbf{f} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\sigma - \rho v \otimes v). \quad (3.6.28)$$

En utilisant la seconde formulation (3.6.22), on obtient l'expression traditionnelle de l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{Dv(x, t)}{Dt} = \rho \gamma(x, t) = \mathbf{f} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \sigma. \quad (3.6.29)$$

Si l'on considère, comme cela a été fait implicitement ici, que la densité de couple appliquée à chaque particule est nulle, l'équation (3.6.26) portant sur les moments apporte la preuve de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy.

4. \otimes est le produit tensoriel simple

3.7 Autres applications

On donne dans ce paragraphe des applications qui sortent un peu du cadre classique des EDP pour les sciences de l'ingénieur. Ces exemples sont empruntés à (PERTHAME, 2003–2004)

3.7.1 Modèle de démographie/Renouvellement cellulaire

On suppose que la variable $u(x, t)$ représente la densité d'individus d'âge x à l'instant t . Le taux de naissance (à $x = 0$) est noté $b(x)$ et le taux de décès $d(x)$. Un modèle de démographie peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} u_t(x, t) + u_x(x, t) + d(x)u(x, t) = 0 \\ u(t, x = 0) = \int_0^{+\infty} b(x)u(t, x) dx \end{cases} \quad (3.7.1)$$

Dans le cas de la mitose cellulaire, on choisit pour $d(x)$ le nombre de cellules ayant atteint l'âge x^* de se diviser. Pour $b(x)$ est alors égal à $2d(x)$.

3.7.2 Modèle de communication TCP

Le protocole de communication TCP est un protocole de communication réseau entre deux machines informatiques. Dans ce protocole, les messages envoyés par une machine à une autre, appelés fenêtres, sont de taille variable suivant l'encombrement du réseau. Soit $u(x, t)$ la densité de fenêtres de taille x à l'instant t envoyés par les utilisateurs à un serveur central.

Le principe de fonctionnement du protocole est le suivant : la taille des fenêtres augmente continûment (d'une unité de mesure) jusqu'à la saturation du serveur. Dans ce cas, le serveur envoie une requête demandant de réduire la taille des fenêtres d'un facteur donné (2 par exemple). On arrive alors au modèle suivant :

$$\begin{cases} u_t(x, t) + (1 - k(t))u_x(x, t) = k(t) [4u(2x, t) - u(x, t)] \\ k(t) = F(q(t)) \\ q_t(t) = \int_0^{+\infty} xu(t, x) dx \end{cases} \quad (3.7.2)$$

La grandeur $q(t)$ désigne la grandeur de la file d'attente du serveur et la fonction de commande F est telle que $F(0) = 0$ et $F(q) = 1$ pour q jugé grand et F est croissante.

3.7.3 Les équations cinétiques

Les équations de la physique cinétique décrivent la physique des plasmas ou des gazs dilués et fournit un exemple important d'équation de transport. La position d'une particule est notée x et sa vitesse v . L'équation dite de "scattering" décrit l'évolution d'une densité de particules $f(t, x, v)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} f_t(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = K[f] \\ f(t = 0, x, v) = f^0(x, v) \text{ donnée} \end{cases} \quad (3.7.3)$$

et l'opérateur K est donnée par une formule du type :

$$K[f] = \int_{\Omega} k(v, v') f(t, x, v') dv' - \int_{\Omega} k(v', v) f(t, x, v) dv \quad (3.7.4)$$

où $k(v, v')$ est la probabilité pour une particule de passer de la vitesse v à v' .

3.8 Méthodes numériques associées

3.8.1 Note de Rédaction

cf . BLAYO (2000) Exmemple d'un sinus

Un mot sur la difficulté

Différences finies :

- centré ordre 2 + Euler explicite
- décentré ordre 1 + Euler explicite. Sens de la discrétisation et condition CFL (Courant-Friedrich-Lewy)
- centré + Euler implicite
- Leap-frog
- Schéma de Lax
- Schéma de Lax-Wendroff
- Volumes finis, solutions de viscosite, Dicontinuous FE, strealine diffusion,

3.9 Exercices – Application de la méthode des caractéristiques

Exercice 1 : EDP linéaire Résoudre l'EDP linéaire du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} u_x + u_y = 1, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) = 0, \text{ pour } x + y = 0 \end{cases} \quad (3.9.1)$$

par la méthode des caractéristiques.

Solution :

$$u(x, y) = \frac{x + y}{2} \quad (3.9.2)$$

Exercice 2 : EDP quasi-linéaire Résoudre l'EDP quasi-linéaire du premier ordre suivante :

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 1, \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ u(x, t = 0) = x \end{cases} \quad (3.9.3)$$

par la méthode des caractéristiques.

Solution :

$$u(x, t) = \frac{x + t + \frac{1}{2}t^2}{1 + t} \quad (3.9.4)$$

Exercice 3 : Application à une EDP quasi-linéaire Trouver la solution générale de l'EDP quasi-linéaire du premier ordre suivante :

$$yuu_x - xuu_y = x - y \quad (3.9.5)$$

par la méthode des caractéristiques. *Solution :*

$$u^2 = -2x - 2y + F(x^2 + y^2), \quad F \text{ arbitraire} \quad (3.9.6)$$

Exercice 3 : Description eulérienne et lagrangienne. Trajectoires et lignes de courant

Considérons la description lagrangienne du mouvement d'une particule de fluide en écoulement donnée par :

$$\begin{cases} x_1(X, t) = X_1 \cos(\omega(R)t) - X_2 \sin(\omega(R)t) \\ x_2(X, t) = X_1 \sin(\omega(R)t) - X_2 \cos(\omega(R)t) \\ x_3(X, t) = X_3 \end{cases} \quad (3.9.7)$$

1. Donner la description eulérienne du mouvement
2. Déterminer $\omega(R)$ pour le champ de vitesse eulérienne soit irrotationnel ($\text{rot } v(x, t) = 0$)
3. Déterminer l'accélération $\Gamma(x, t)$
4. Quelles sont les trajectoires et les lignes de courant de cet écoulement