Chapitre 4

EDP elliptiques. Laplace et Poisson

Contenu du Chapitre 4

4.1 Introduction **66**

4.2 Une interprétation physique des EDP elliptiques **66**

4.2.1 Notion de flux conservatif 66

4.2.2 Equilibre des lois de conservations en comportement linéaire 67

4.2.3 Équilibre général 68

4.2.4 Exemples classiques 69

4.3 Propriétés **70**

4.3.1 Conditions aux limites naturelles. Existence et unicité 70

4.3.2 Principes de Maximum 72

4.3.3 Une formulation variationnelle 74

4.4 Méthodes analytiques de résolution **79**

4.4.1 Le problème uni-dimensionnel 79

4.4.2 Le cas bidimensionnel. Séparation des variables 79

4.4.3 Noyau de Laplace, de Poisson et fonctions de Green 82

4.5 Applications plus que classiques **84**

4.5.1 Élasticité linéaire des solides – Statique. 84

4.5.2 Écoulement de Stokes ? 84

4.5.3 Méthodes numériques associées 85

4.6 Applications en domaine non borné **85**

4.6.1 Équations intégrales 85

4.6.2 Fonction de Green 85

4.6.3 Applications 85

4.6.4 Méthode numérique associée 85

4.7 Exercices **86**

Notations

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux EDP elliptiques linéaires. Si l'on considère le cas scalaire, c'est à dire, une fonction inconnue u définie sur un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, une EDP elliptique linéaire se met sous la forme suivante :

$$a(x,y)u_{xx}(x,y) + b(x,y)u_{yy}(x,y) + c(x,y)u_x(x,y) + d(x,y)u_y(x,y) + eu(x,y) = f(x,y) \tag{4.1.1}$$

avec $a(x,y)b(x,y) > 0$.

Si la fonction u est définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on définit une EDP elliptique linéaire par

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \tag{4.1.2}$$

où l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ est défini par :

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) \tag{4.1.3}$$

avec les valeurs propres de la matrice $A = a_{ij}$ qui sont toutes non nulles et de même signe. On rappelle que le matrice A peut toujours être choisie symétrique du fait de la symétrie $u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}$ et donc que les valeurs sont réelles.

Une autre définition de l'ellipticité de l'équation peut être donnée :

$$\exists \alpha > 0, \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.1.4}$$

qui peut se réécrire :

$$\exists \alpha > 0, (A\xi, \xi) = \xi^T A\xi \geq \alpha \|\xi\|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.1.5}$$

Cette définition implique que la matrice A est définie positive et puisque nous sommes en dimension finie, on a équivalence entre (4.1.4) et le fait que toutes les valeurs propres sont strictement positives. On a d'ailleurs que le minimum des valeurs propres est α_0.

Enfin, dans le cas vectoriel, nous limiterons au cas $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ où le système d'équations est gouverné par le laplacien[1], Δu.

4.2 Une interprétation physique des EDP elliptiques

4.2.1 Notion de flux conservatif

Une interprétation physique des équations elliptiques provient de la notion de flux conservatif donné par un gradient. Cette notion fournit un modèle mathématique pour des lois de conservation à l'équilibre en comportement linéaire. Comme on le verra, cela peut être appliqué à de nombreux domaines des sciences pour l'ingénieur.

Considérons une grandeur scalaire $u(x)$ (Température, concentration chimique, ...). Comme pour les équations de transport, on associe un flux (Chaleur, matière, ...) et on considère que ce flux vers l'extérieur de cette quantité, $q(x)$ est nul à l'équilibre[2], soit

$$\int_{\partial\omega} q(x).n_x \, ds = 0 \tag{4.2.1}$$

[1] La notion d'ellipticité peut être étendue en dimension infinie pour des opérateurs vectoriels, voir (RENARDY & ROGERS, 1993)

[2] On dit aussi qu'il est auto-équilibré

quelque soit le volume d'intégration ω inclus dans Ω. En utilisant la formule divergence-flux, on obtient :

$$\int_{\omega} \mathrm{div}_x\, q(x)\, dx = 0 \tag{4.2.2}$$

En supposant une bonne régularité pour $q(x)$, on obtient une version locale de cette équation :

$$\mathrm{div}_x\, q(x) = 0, \forall x \in \Omega \tag{4.2.3}$$

du fait de l'indépendance du volume d'intégration.

Si l'on suppose de plus que ce flux est une fonction linéaire du gradient, ∇u, et orienté dans la direction opposée (les flux se font souvent de façon opposée au gradient d'une grandeur), on peut alors écrire que $q(x) = -a(x)\nabla_x u$. On obtient une loi de conservation à l'équilibre du type :

$$\mathrm{div}_x(a(x)\nabla u(x)) = 0 \tag{4.2.4}$$

Pour $a(x) \equiv 1$, on obtient la plus simple des équations elliptiques, l'*équation de Laplace* :

$$\mathrm{div}\, \nabla u(x) = \Delta u(x) = 0 \tag{4.2.5}$$

4.2.2 Equilibre des lois de conservations en comportement linéaire

D'une manière plus générale, le raisonnement précédent peut être mené en considérant les lois de conservations dans les milieux continus présentées au § 3.1. Les ingrédients principaux qui vont nous conduire à une grande famille d'équations elliptiques sont les suivants :

- Conservation d'une grandeur
- Milieu immobile et régime stationnaire
- Loi de comportement linéaire entre le flux de cette grandeur et le gradient.

Les deux premières notions sont souvent associées à l'équilibre d'un système.

Retour sur les lois de conservations On considère un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d, d = 1, \ldots 3$. Pour tout sous-domaine $\omega(t) \subset \Omega$, on définit une grandeur $\mathcal{U}(t)$ à partir de sa densité spécifique (massique) $u(x,t)$, soit :

$$\mathcal{U}(t) = \int_{\omega(t)} \rho(x,t) u(x,t)\, dx \tag{4.2.6}$$

où ρ est la masse volumique du milieu. On suppose que la variation de cette grandeur $\mathcal{U}(t)$ ne peut se faire que par un apport extérieur volumique :

$$\int_{\omega(t)} \varphi_{\mathcal{U}}\, dx \tag{4.2.7}$$

et un apport surfacique sur la frontière de ω[3] :

$$-\int_{\partial\omega(t)} J_{\mathcal{U}}\, ds, \tag{4.2.8}$$

Le Lemme de Cauchy affirme alors l'existence d'un tenseur $j_{\mathcal{U}}$ tel que $J_{\mathcal{U}} = j_{\mathcal{U}}.n$ et que l'on ait la loi de conservation locale :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(\rho u v) = \varphi_{\mathcal{U}} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} j_{\mathcal{U}}, \tag{4.2.9}$$

En utilisant la conservation de la masse, on obtient la seconde formulation de l'équation de conservation locale, soit :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \varphi_{\mathcal{U}} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} j_{\mathcal{U}}. \tag{4.2.10}$$

[3]Le signe est une convention qui veut que le flux sortant est compte compte négativement.

Hypothése de milieu immobile et de régime stationnaire. Si le milieu est immobile, la vitesse eulérienne, $v(x,t)$ est alors nulle et donc la dérivée particulaire se réduit à :

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x u(x,t).v(x,t) = \rho\frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.2.11}$$

L'équation de conservation donne donc :

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_{\mathcal{U}} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} j_{\mathcal{U}}. \tag{4.2.12}$$

et si on suppose que l'on se place en régime stationnaire, $\rho\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, on obtient

$$\varphi_{\mathcal{U}} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} j_{\mathcal{U}} = 0 \tag{4.2.13}$$

Hypothèse de loi de comportement linéaire On associe à cette loi de conservation, une loi constitutive du milieu (loi de comportement) qui précise le comportement du milieu. Le plus simple des choix revient à choisir une relation linéaire entre le flux et le gradient soit :

$$j_{\mathcal{U}}(x,t) = A(x,t).\nabla_x u(x,t) \tag{4.2.14}$$

En reportant dans l'équation 4.2.12, on obtient :

$$\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} A(x,t).\nabla_x u(x,t) = \varphi_{\mathcal{U}} \tag{4.2.15}$$

soit

$$A\Delta_x u + \nabla_x A.\nabla_x u = \varphi_{\mathcal{U}} \tag{4.2.16}$$

Pour terminer, on obtient une équation de type elliptique pour peu que l'opérateur $A(x)$ possède de bonnes propriétés de positivité :

$$A(x)\Delta_x u(x) + \nabla_x A(x).\nabla_x u(x) = \varphi_{\mathcal{U}} \tag{4.2.17}$$

Remarque On peut bien sûr établir ce type d'équation elliptique dans un cadre différent que celui de la mécanique des milieux continus. Il suffit pour cela de considérer des grandeurs intégrales du type :

$$\mathcal{U}(t) = \int_{\omega(t)} u(x,t)\,dx \tag{4.2.18}$$

et de confondre la dérivée particulaire avec le dérivée partielle, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$.

4.2.3 Équilibre général

Pour résumé, les équations elliptiques sont beaucoup utilisées dans les sciences de l'ingénieur pour traduire des phénomènes stationnaires ou d'équilibre sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d, d = 1,2,3$. Ces modèles se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} j &= -A(x)\nabla_x u && \text{Equation de flux} && (4.2.19)\\ \mathrm{div}\, j &= f - c(x)u && \text{Equation d'équilibre, ou de conservation} && (4.2.20)\end{aligned}$$

où

- la fonction inconnue scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ est appelée un *potentiel*

- la fonction vectorielle $j : \Omega \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$ est appelée un *flux*
- la fonction scalaire $f : \Omega \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ joue le rôle de termes sources de potentiel
- les fonctions scalaires $A(x)$ et $c(x)$ sont des données du problème.

Naturellement, ces notions peuvent être transportées au cas vectoriel $u : \Omega \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$. La première équation s'appelle plutôt une *loi constitutive* ou *loi de comportement* du milieu. Le flux j devient un tenseur d'ordre 2 (une matrice), la fonction $A(x)$ une tenseur d'ordre 4 et $c(x)$ une fonction vectorielle.

ă

4.2.4 Exemples classiques

Donnons ici quelques applications classiques des équations d'équilibre linéaires :

Equation de la conduction de la chaleur

Variable		Notations	Titre	Unité
u	$\rightarrow$	T	Température	$[T] = 1K$
j	$\rightarrow$	q	Flux de chaleur	$[q] = 1W/m^2$
f	$\rightarrow$	f	Source de Chaleur	$[f] = 1W/m^3$
$A(x)$	$\rightarrow$	$\kappa(x)$	Conductivité du matériau	$[\kappa] = 1W.m^{-2}.K^{-1}$
$c(x)$	$\rightarrow$		$c(x) \equiv 0$	–

La loi donnant le flux en fonction du gradient de température, (4.2.19) est appelée la *loi de Fourier* et la loi de conservation assure la conservation de l'énergie.

Électrostatique

Variable			Titre	Unité
u	$\rightarrow$	V	Potentiel électrostatique	$[V] = 1V$
$\nabla_x u$	$\rightarrow$	E	champ électrostatique	$[V] = 1V$
j	$\rightarrow$	D	Déplacement électrique (Flux de densité de courant)	$[D] = 1As/m^2$
f	$\rightarrow$	ρ	Densité de charge	$[\rho] = 1As/m^3$
$A(x)$	$\rightarrow$	$\epsilon(x)$	Tenseur diélectrique	$[\epsilon] = F/m$
$c(x)$	$\rightarrow$		$c(x) \equiv 0$	–

La *loi de Faraday* en électrostatique ($\operatorname{rot} E = 0$) permet de postuler à l'existence d'un potentiel électrique $V(x)$ tel que $E = -\nabla V$. La loi $D = \epsilon E$ est la loi de comportement du milieu. La loi de conservation $\operatorname{div} D = \rho$ ou $\operatorname{div} E = \rho/\epsilon$ s'appelle la *loi de Gauss* pour le champ électrique. En l'absence de charge, on obtient l'équation de Laplace sur le potentiel $\Delta V(x) = 0$.

Courants électriques stationnaire

Variable		Notations	Titre	Unité
u	$\rightarrow$	V	Potentiel électrique	$[V] = 1V$
$\nabla_x u$	$\rightarrow$	E	champ électrique	$[E] = 1V$
j	$\rightarrow$	J	Densité de courant	$[J] = 1A/m^2$
f	$\rightarrow$		$f \equiv 0$	–
$\sigma(x)$	$\rightarrow$	$\sigma(x)$	Tenseur de conductivité	$[\sigma] = S/m$ (Siemens par metre)
$c(x)$	$\rightarrow$		$c(x) \equiv 0$	–

La loi de comportement de définition du flux correspond à la *loi d'Ohm* $J = \sigma E$ et la loi de conservation correspond à la conservation de la charge $\operatorname{div} J = 0$.

Diffusion moléculaire

Variable	Notations	Titre	Unité	
u	$\rightarrow$	C	Concentration	$[C] = mol/m^3$
j	$\rightarrow$	j	Flux molaire	$[j] = 1mol/m^2s$
f	$\rightarrow$	ρ	Taux de absorption/réaction	$[\rho] = 1mol/m^3x$
$A(x)$	$\rightarrow$	$D(x)$	Constante de diffusion	$[\epsilon] =$
$c(x)$	$\rightarrow$	$c(x)$	Coefficient de réaction	–

Élasticité plane linéaire

Variable	Notations	Titre	Unité	
u	$\rightarrow$	u	Déplacement orthogonal	$[u] = m$
$\nabla_x u$	$\rightarrow$	ε	Déformation	$[E] = 1V$
j	$\rightarrow$	σ	Contrainte dans le plan	$[\sigma] = 1N/m^2$
f	$\rightarrow$	f	force volumique extérieure	$[f] = 1N/m^3$
$A(x)$	$\rightarrow$	$D(x)$	Tenseur des rigidités	$[D] =$
$c(x)$	$\rightarrow$		$c(x) \equiv 0$	–

Nous nous plaçons ici en dimension deux $d = 2$. Les équations (4.2.19) et (4.2.20) fournissent les équations d'équilibre d'une membrane élastique soumise à des efforts extérieurs en petites perturbations.

4.3 Propriétés

4.3.1 Conditions aux limites naturelles. Existence et unicité

Les conditions aux limites naturelles sont les conditions de Dirichlet, Neumann ou mixte sur différentes parties du bord. Afin de justifier ces affirmations introduisons trois problèmes elliptiques académiques :

1. Le *Problème de Dirichlet* sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s'énonce ainsi : trouver une fonction scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.1}$$

2. Le *Problème de Neumann* sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s'énonce ainsi : trouver une fonction scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \\ \nabla u(x).n_x = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n_x} = h(x), \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.2}$$

3. Le *Problème mixte de Dirichlet-Neumann* sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s'énonce ainsi : trouver une fonction scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega_1 \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n_x} = h(x), \quad x \in \partial\Omega_2 \end{cases} \tag{4.3.3}$$
avec
$$\begin{cases} \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_1 = \partial\Omega \\ \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_1 = \emptyset \end{cases} \tag{4.3.4}$$

Questions d'unicité Si l'on considère des questions d'unicité à ces problèmes, on introduit deux fonctions solutions à chacun de ces problèmes, u_1 et u_2. La fonction différence $v = u_2 - u_1$ est donc solution du problème homogène avec des conditions aux limites homogènes. On a donc
$$\Delta v = 0 \quad \text{et} \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial n_x} ds = 0 \tag{4.3.5}$$
Grâce à la première formule de Green, nous pouvons écrire que :
$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial n_x} ds = \int_{\Omega} (v\Delta v + \nabla v \nabla v) dx = \int_{\Omega} \nabla v \nabla v dx \tag{4.3.6}$$
On a donc que l'intégrale de la norme du gradient est nul sur ω,
$$\int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx = 0 \tag{4.3.7}$$
ce qui entraîne si la solution est suffisamment régulière que
$$\nabla v(x) = 0, \forall x \in \Omega \tag{4.3.8}$$

Si on considère les conditions aux limites de type Dirichlet ou de type mixte Dirichlet-Neumann, on obtient $v \equiv 0$ et donc l'unicité.

Par contre dans le cas de Neumann, on a pas unicité car n'importe quelle fonction constante peut être solution si $h(x) \equiv 0$. On a d'ailleurs pas non plus existence de solution dans ce cas, sauf si :
$$\int_{\partial\Omega} h(x) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} dx = \int_{\Omega} \Delta u(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx \tag{4.3.9}$$

Problème de dit de Cauchy pour les équations elliptiques

4.3.1 **NOTE DE RÉDACTION**

`Attention au problème pose sur Neumann et Dirichlet a la fois. (EUVRARD, 1994, p. 24)`

4.3.2 Principes de Maximum

Les principes de maximum sont caractéristiques des EDP elliptiques. On donnera ici un bref aperçu de ces principes et les conséquences sur les questions de signe des solutions ou encore d'unicité. On renvoie pour une présentation détaillée des *principes de maximum* pour les EDP du second ordre à (RENARDY & ROGERS, 1993) ou (COURANT & HILBERT, 1962, Vol II., chap IV).

4.3.2.a Principaux énoncés

Considérons un opérateur différentiel du second ordre de la forme suivante :

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) \tag{4.3.10}$$

Les hypothèses suivantes sont faites pour l'ensemble de cette partie et sont valables quelque soit $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$:

1. Les coefficients a_{ij}, b_i et c sont continues sur l'adhérence, $\bar{\Omega}$,
2. La solution est suffisamment régulière, i.e., $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$,
3. La matrice a_{ij} est symétrique et définie positive $\forall x \in \bar{\Omega}$, c'est à dire $\mathcal{L}$ est elliptique

Sous ces hypothèses, on peut formuler les principes de maximum suivants.

Théorème 4.3.1 (Principe de maximum faible) Supposons que $\mathcal{L}u \geq 0$ (ou respectivement $\mathcal{L}u \leq 0$) sur un domaine borné Ω et que $c(x) = 0$ dans Ω. Alors la solution u atteint son maximum (respectivement son minimum) sur $\partial\Omega$.

Si de plus $\mathcal{L}u > 0$ alors la fonction u ne peut atteindre nulle part son maximum sur Ω.

❑

Preuve : Plaçons nous dans le cas où $\mathcal{L}u > 0$ et supposons au contraire que la fonction u atteigne son maximum au point x_0. A ce point, toutes les dérivées premières de u doivent s'annuler et donc

$$\mathcal{L}u(x_0) = a_{ij}u_{x_i x_j}(x_0) \tag{4.3.11}$$

Comme la matrice $u_{x_i x_j}(x_0)$ est négative semi définie car x_0 est un point maximum, on conclut que $\mathcal{L}u(x_0) \leq 0$, une contradiction[4].

❑

REMARQUE 4.3.1
L'hypothèse $\mathcal{L}u \geq 0$ comprend le cas de l'EDP elliptique homogène, $\mathcal{L}u = 0$ (par exemple l'équation de Laplace). Dans le cas non homogène, cette hypothèse revient à imposer une contrainte de positivité sur le second membre de l'équation $\mathcal{L}u = f$.

❑

Corollaire 4.3.1 Soit Ω un domaine borné. Supposons que $c(x) \leq 0, \forall x \in \Omega$. Si $\mathcal{L}u \geq 0$ (ou respectivement $\mathcal{L}u \leq 0$) alors

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ \qquad (\text{ resp. } \min_{\bar{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-) \tag{4.3.12}$$

[4]Cette preuve peut être prolongée dans un cadre plus général en prenant $u_\varepsilon = u + \varepsilon \exp(\gamma x_1)$ et en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ (voir (RENARDY & ROGERS, 1993, p. 106))

avec $u^+ = \max(u, 0), u^- = \min(u, 0)$.

En particulier, si $\mathcal{L}u = 0$ alors

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| \tag{4.3.13}$$

❑

Preuve : Si $u \leq 0$ partout dans Ω, le corollaire est vérifié trivialement. Posons $\Omega^+ = \Omega \cap \{u > 0\}$. Sur Ω^+, nous avons$-cu \geq 0$ et donc

$$a_{ij}u_{x_ix_j} + b_iu_{x_i} \geq 0 \tag{4.3.14}$$

Le théorème précédent implique que le maximum de u sur l'adhérence de Ω^+ est égal au maximum de u sur $\partial\Omega^+$. Puisque $u \equiv 0$ sur $\partial\Omega^+ \cap \Omega$, (définition de Ω^+), on conclut que le maximum est atteint sur $\partial\Omega$.

❑

Corollaire 4.3.2 (Théorème de comparaison) Soit Ω un domaine borné. Supposons que $c(x) \leq 0$. On a alors les résultats suivants :

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \mathcal{L}v, \forall x \in \Omega \\ u = v, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \implies u = v, \forall x \in \Omega \quad \text{(Unicité)} \tag{4.3.15}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}u \leq \mathcal{L}v, \forall x \in \Omega \\ u \geq v, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \implies u \geq v, \forall x \in \Omega \quad \text{(Comparaison)} \tag{4.3.16}$$

❑

Le théorème 4.3.1 du maximum faible affirme que u atteint son maximum sur la frontière du domaine. Cependant, la fonction u peut atteindre son maximum en plein d'autres points du domaine Ω. Le théorème qui va suivre affirme que cela est en fait impossible à moins que u soit constante partout sur Ω.

Théorème 4.3.2 (Principe de maximum fort) Supposons que $\mathcal{L}u \geq 0$ (ou respectivement $\mathcal{L}u \leq 0$) sur un domaine Ω (pas nécessairement borné) et que u n'est pas constante sur ce domaine.

1. Si $c(x) = 0$ dans Ω, alors la solution u n'atteint pas son maximum (minimum) sur l'intérieur de Ω.
2. Si $c(x) \leq 0$, alors la solution u ne peut atteindre un maximum strictement positif (minimum strictement négatif) sur l'intérieur de Ω.

❑

Preuve : La preuve est basée sur le Lemme de Hopf, voir (RENARDY & ROGERS, 1993, p. 109).

❑

4.3.2.b Principales applications

Les applications principales des principes de maximum sont de deux types :

– Résultats mathématiques et preuve d'existence et d'unicité. Le théorème faible du maximum sert en particulier à donner une preuve existence au problème de Dirichlet :

Théorème 4.3.3 Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné à bord $\mathcal{C}^2(\Omega)$, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, il existe une solution unique $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.17}$$

❏

– Résultats sur le signe de la solution. Les principes de maximum permettent de statuer sur le signe des solutions aux équations elliptiques. Ceci est particulièrement important pour les grandeurs physiques qui doivent par exemple rester positives (densité de masse, concentration, ...)

EXAMPLE 1
Considérons le problème de Dirichlet suivant sur un disque $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$,

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = -1, \forall x \in \Omega \\ u(x, y) = u_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.18}$$

1. Vérifier que la solution est
$$u(x, y) = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{4} + u_0. \tag{4.3.19}$$
2. Vérifier que les principes de maximum sont satisfaits.

4.3.3 Une formulation variationnelle

Dans ce paragraphe, nous donnons une preuve d'existence au problème de Dirichlet sur un domaine "général" $\Omega \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \forall x \in \Omega \\ u(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3.20}$$

Outre l'aspect intéressant du résultat en lui même, il montre en particulier l'importance des formulations dites variationnelles en comment on peut lier simplement, sur ce problème, le calcul des variations à la théorie des EDP.

Commençons par définir la fonctionnelle d'énergie suivante :

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \tag{4.3.21}$$

et une classe de fonctions admissibles[5] :

$$\mathcal{A} = \{u : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid u(x) = g(x), \forall x \in \partial\Omega, E(u) < +\infty\} \tag{4.3.22}$$

Nous allons établir le théorème suivant :

Théorème 4.3.4 Si $\mathcal{A}$ est non vide, et qu'il existe $\bar{u} \in \mathcal{A}$ qui minimise $E(u)$ sur $\mathcal{A}$; c'est à dire

$$E(\bar{u}) \leq E(u), \forall u \in \mathcal{A} \tag{4.3.23}$$

alors $\bar{u}$ est une solution du problème de Dirichlet (4.3.20).

❏

[5]fonctions qui répondent aux conditions aux limites et d'énergie finie

Avant de donner les grandes lignes de la démonstration de ce théorème, notons qu'il faut être capable de répondre aux questions suivantes :

1. L'ensemble $\mathcal{A}$ est il non vide ? Plus précisément, quelles conditions doivent remplir la frontière $\partial\Omega$ et la fonction donnée f pour qu'une solution d'énergie finie prolonge f sur tout Ω.
2. Existe il un minimiseur de E dans $\mathcal{A}$?

Preuve : Il ne s'agit pas ici de donner une preuve rigoureuse (difficile sans un cadre fonctionnel adéquat) mais plutôt le principe général de la démonstration. Définissons :

$$\mathcal{A}_0 = \{u : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid v(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega\} \tag{4.3.24}$$

On peut montrer facilement l'assertion suivante :

$$u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow (u + \varepsilon v) \in \mathcal{A}, \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \tag{4.3.25}$$

Pour chaque $v \in \mathcal{A}_0$, nous définissons la fonction réelle $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha(\varepsilon) &= E(\bar{u} + \varepsilon v) && (4.3.26)\\ &= \int_\Omega \left[|\nabla \bar{u}(x)|^2 + 2\varepsilon \nabla\bar{u}\nabla v + \varepsilon^2 |\nabla v(x)|^2\right] \, dx && (4.3.27)\\ &= E(\bar{u}) + 2\varepsilon \int_\Omega \nabla\bar{u}\nabla v \, dx + \varepsilon^2 E(v) && (4.3.28) \end{aligned}$$

L'inégalité (4.3.23) et le calcul (4.3.26) nous montre que la fonction α est quadratique et atteint son minimum en $\varepsilon = 0$. En prenant sa dérivée première en $\varepsilon = 0$, on obtient :

$$\int_\Omega \nabla\bar{u}\nabla v \, dx = 0, \forall v \in \mathcal{A}_0 \tag{4.3.29}$$

Pour terminer la preuve du théorème, il nous montrer que si $\bar{u}$ vérifie (4.3.29) alors elle vérifie l'équation de Laplace. Nous utilisons pour cela le lemme 4.3.1 qui nous donne

$$\Delta\bar{u} = \operatorname{div} \nabla\bar{u} = 0 \tag{4.3.30}$$

La question de régularité est plus technique et demande de se placer dans un cadre fonctionnel rigoureux.

❏

Le Lemme qui va suivre est une version particulière du *Lemme fondamental du calcul des variations*. Ce nom a été donné à un grand nombre de résultats qui permettent de passer d'un énoncé de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie à une EDP vérifiée localement. Dans le cadre où nous l'utilisons, il est communément appelé le *Lemme de Dubois-Reymond*. Nous en donnons ici une version édulcorée

Lemme 4.3.1 (DuBois-Raymond) Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction de classe, $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$, et qui satisfait l'équation variationelle suivante,

$$\int_\Omega F(x).\nabla_x v(x) \, dx = 0, \forall v \in \mathcal{A} \tag{4.3.31}$$

avec $\mathcal{A} = \{v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, v(x) = 0$ pour $x \in \partial\Omega, \int_\Omega \|\nabla x(x)\|^2 \, dx < +\infty\}$. On a alors

$$\operatorname{div} F(x) = 0 \tag{4.3.32}$$

❏

Preuve : Si on suppose que F est suffisamment régulière pour utiliser le théorème de la divergence :

$$0 = \int_\Omega F.\nabla v \, dx = -\int_\Omega (\operatorname{div} F) v \, dx + \int_{\partial\Omega} v F.n_x \, ds \tag{4.3.33}$$

Puisque $v \in \mathcal{A}_0$ est nulle sur $\partial\Omega$, ce résultat implique que :

$$\int_\Omega (\operatorname{div} F) v \, dx = 0, \forall v \in \mathcal{A}_0 \tag{4.3.34}$$

Comme $\operatorname{div} F$ est continue, si il existe un point x_0 pour lequel $\operatorname{div} F$ est non nul, cela est vrai sur un voisinage de x_0. Choisissons une boule B de centre x_0 dans ce voisinage sur laquelle on vérifie $\operatorname{div} F > \delta > 0, \forall x \in B$. On peut construire un fonction $\bar{v} \in \mathcal{A}_0$ qui est elle aussi positive sur B et nulle partout ailleurs. On obtient alors :

$$\int_\Omega (\operatorname{div} F)\bar{v} \, dx = \int_B (\operatorname{div} F)\bar{v} \, dx > \delta \int_B \bar{v} \, dx > 0 \tag{4.3.35}$$

On est donc en contradiction avec l'équation (4.3.34) et donc $\operatorname{div} F$ est identiquement nulle sur Ω.

❏

Analyse variationnelle. Solutions fortes. Solutions faibles L'équation (4.3.29) est appelée la *forme faible* de l'équation de Laplace. Les solutions de cette équations sont appelées les *solutions faibles* de l'équation de Laplace. A contrario, l'équation (4.3.17) est appelle *forme forte* de l'équation de Laplace et les solutions, les *solutions fortes*. Une interprétation possible de cette désignation est que la forme faible est moins restrictive sur la régularité des solutions et autorise donc une plus grande classe de solutions que la forme forte. On ne vérifie dans le cas des équations de Laplace qu'une équation intégrale portant sur les gradients de u et les gradients de fonctions admissibles.

On peut remarquer, par exemple, qu'une solution forte de l'équation de Laplace est toujours une solution faible. Pour s'en rendre compte, il suffit de multiplier l'équation (4.3.17) par une fonction $v \in \mathcal{A}_0$ et d'intégrer par parties (Formules de Green) pour obtenir :

$$0 = \int_\Omega (\Delta u) v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} v.\nabla u.n_X \, dx \tag{4.3.36}$$

Sachant que $v \equiv 0, \forall x \in \partial\Omega$, on obtient que :

$$0 = \int_\Omega (\Delta u) v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx \tag{4.3.37}$$

Il est généralement plus facile de trouver des solutions faibles aux EDP. Pour vérifier qu'une solution faible est aussi une solution forte, il est nécessaire de déterminer la régularité de la solution faible. Cette question est d'importance cruciale dans le théorie moderne des EDP.

Interprétation physique Pour terminer ce paragraphe, essayons de donner une interprétation physique a ces différentes formulations et approches. Il est tout d'abord important de noter que les solutions faibles ne sont pas seulement des solutions "mathématiques" du problème. Elles nous renseignent aussi sur les propriétés du phénomènes que l'on modelise si l'on admet que notre modele est correct. Par exemple, on peut être intéresse par des solutions peu régulières. Le cas des chocs en mécanique des fluides est un exemple de solution faible des EDP de transport.

Prenons un exemple issu de la mécanique des milieux continus solides pour illustrer les différentes formulations que l'on vient d'introduire. Pour une membrane élastique occupant le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la fonction scalaire $u(x, y)$ est le déplacement transversal de la membrane. Le gradient $\nabla u(x, y)$ correspond à la déformation de la membrane. La fonctionnelle $E(u)$ (4.3.21) correspond à l'énergie potentielle de déformation ou encore l'énergie élastique emmagasinée lors de la déformation. Le théorème 4.3.4 postule donc qu'une solution du problème de membrane minimise l'énergie potentielle élastique.

La forme faible de l'équation de Laplace correspond aux principes de travaux virtuels en Mécanique. L'écriture d'un telle principe est naturel en mécanique. Pour connaître le poids d'une valise, soit on mesure directement son poids sur une balance, soit on la soulève et on estime alors le travail nécessaire pour la déplacer. A partir du travail et connaissant le déplacement effectue, on remonte au poids.

Equation de Poisson (ELŻANOWSKI, 2003, p. 52) Considerer la fonctionnelle d'energie :

$$E(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\mathcal{L}^2} - \langle f, u \rangle = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)\,dx \tag{4.3.38}$$

Cadre fonctionnel general

4.3.2 **NOTE DE RÉDACTION**

Cadre général bcp plus technique. Pas l'objet de ce cours. On le redigera plus tard pour la beauté du geste. plan (RAVIART & THOMAS, 1992)

1. Formulation variationnelle des problemes au limites elliptiques usuels (Dirichle Neumann)
2. Probleme varitionnel abstrait $a(u, v), J(u)$ et exemple sur les problemes usuels.
3. Probleme elliptiques d'ordre 2
4. Systeme de l'elaticite
5. Systeme de Stokes

4.4 Méthodes analytiques de résolution

Nous proposons dans cette partie de calculer quelques solutions analytiques de l'équation de Laplace et de Poisson sur des domaines simples.

4.4.1 Le problème uni-dimensionnel

Considérons le problème unidimensionnel suivant :

$$\Delta u(x) = u''(x) = 0, \quad x \in]a, b[\tag{4.4.1}$$

qui a pour solution générale :

$$u(x) = \alpha x + \beta \tag{4.4.2}$$

Considérons différents cas de conditions aux limites :

- **Dirichlet**

$$u(a) = u_a, u(b) = u_b \quad \Longrightarrow \quad u(x) = u_a + \frac{x-a}{b-a}(u_a - u_b) \tag{4.4.3}$$

  On peut noter que le problème est bien posé car il conduit à une solution unique.

- **Dirichlet-Neumann**

$$u(a) = u_a, u'(b) = v_b \quad \Longrightarrow \quad u(x) = u_a + \frac{x-a}{b-a}(v_b) \tag{4.4.4}$$

  On peut noter une nouvelle fois que le problème est bien posé car il conduit à une solution unique.

- **Neumann**

$$u'(a) = v_a, u'(b) = v_b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } v_a = v_b, \text{ alors } u(x) = v_a x + C \text{ infinité de solutions} \\ \text{Si } v_a \neq v_b, \text{ alors pas de solution} \end{cases} \tag{4.4.5}$$

  Le problème de Neumann pur n'est pas bien posé par défaut.

On peut remarquer que les principes de maximum sont bien vérifiés.

4.4.2 Le cas bidimensionnel. Séparation des variables

Les résolution analytiques en deux dimensions s'effectuent généralement par séparation des variables, c'est a dire que l'on cherche des solutions sous la forme :

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{4.4.6}$$

4.4.2.a Le cas du carré unité

Dans ce paragraphe, on considérera le carré unité défini par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \tag{4.4.7}$$

Equation de Laplace Commençons par le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \forall x \in \Omega \\ u(0, y) = 0, u(1, y) = 0, u(x, 0) = 0, u(x, 1) = f(x) \end{cases} \tag{4.4.8}$$

L'équation de séparation des variables nous donne :

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \tag{4.4.9}$$

Partout où u est non nulle, on peut diviser et obtenir :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(x)}{Y(x)} = \lambda \Longrightarrow \begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ Y''(x) = -\lambda Y(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(x) = A_1 \left[e^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}\right] \\ Y(x) = A_2 \left[e^{\sqrt{-\lambda}y} + Ce^{-\sqrt{-\lambda}y}\right] \end{cases} \tag{4.4.10}$$

On obtient donc comme famille de solution générale :

$$u(x,y) = A\left[e^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}\right]\left[e^{\sqrt{-\lambda}y} + Ce^{-\sqrt{-\lambda}y}\right] \tag{4.4.11}$$

Il reste maintenant à respecter les conditions aux limites et à justifier le type de solution choisie. Les conditions aux limites que l'on a choisi sont assez simples et les trois premières conduisent à réduire la forme générale à :

$$u(x,y) = A \sin n\pi x \operatorname{sh} n\pi y \tag{4.4.12}$$

La dernière condition est plus délicate à traiter. Supposons que la fonction f se met sous la forme d'une combinaison linaire finie de sinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sin n\pi x \tag{4.4.13}$$

on peut alors simplement choisir :

$$A_n = \frac{\alpha_n}{\operatorname{sh} n\pi} \tag{4.4.14}$$

On obtient alors la solution :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin n\pi x \operatorname{sh} n\pi y \tag{4.4.15}$$

En effet, comme il s'agit d'une somme finie, on peut différencier sous le signe somme et donc et u répond trivialement à l'équation de Laplace

Il reste maintenant le cas d'une fonction générale $f(x)$. Dans ce cas, on voit naturellement apparaître la décomposition en série de Fourier de sinus de f[6]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin n\pi x \tag{4.4.16}$$

Il est reste à déterminer les coefficients de la décomposition. Le point clé est l'orthogonalité des fonctions sinus sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \sin(i\pi x)\sin(j\pi x)\,dx = \frac{\delta_{ij}}{2} \tag{4.4.17}$$

qui nous conduit à[7]

$$\int_0^1 f(x)\sin(j\pi x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(j\pi x)\,dx = \frac{\alpha_j}{2} \tag{4.4.18}$$

On obtient alors une solution générale du problème (4.4.8) sous la forme :

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x \operatorname{sh} n\pi y \tag{4.4.19}$$

[6]Une première question doit être alors poser : Que doit satisfaire f pour être égale à sa décomposition en série de Fourier ? voir pour cela l'annexe B

[7]Une deuxième question doit être alors poser : Quand peut-on intervertir le signe somme et le signe intégrale ?

avec

$$A_n = \frac{2}{\sin(n\pi)} \int_0^1 f(x) \sin(j\pi x)\, dx \tag{4.4.20}$$

4.4.1 Note de rédaction

Ajouter une illustration des solutions ...

Remarque 4.4.1

Pour être vraiment rigoureux, il convient des lors de se poser les questions suivantes :

- Est ce que la série (4.4.19) converge (quelle convergence) ?
- Est ce que la limite des séries est deux fois différentiable et donc satisfait (4.4.8)
- Dans quel sens les conditions aux limites sont réalisées
- Est ce que la méthode de séparation des variables fournies la solution le plus générale ? l'unique solution ?

❏

Equation de Poisson Le problème de l'équation de Poisson sur le carré unité est traité en exercices, Cf. 4.7

4.4.2.b Le cas du disque de rayon R

Nous allons considérer l'équation de Laplace et de Poisson posée sur le disque unité du plan :

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \forall x \in \Omega, \qquad \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R\} \tag{4.4.21}$$

Equation de Laplace Considérons le problème suivant, en coordonnes polaires (r, θ) [8]

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \forall x \in \Omega \\ u(\theta) = g(\theta) \text{ pour } r = R \end{cases} \tag{4.4.22}$$

Par séparation des variables $u(r, \theta) = a(r)b(\theta)$, on obtient :

$$\frac{r^2 a'' + r a'}{a} = -\frac{b''}{b} = k \in \mathbb{R} \tag{4.4.23}$$

soit

$$r^2 a''(r) + r a'(r) - k a(r) = 0 \tag{4.4.24}$$

$$b''(\theta) + k b(\theta) = 0 \tag{4.4.25}$$

L'équation (4.4.25) donne :

- si $k = 0$, $b(\theta) = \alpha\theta + \beta$. La fonction b soit être de plus 2π-périodique, donc $\alpha = 0$
- si $k < 0$, $b(\theta) = \alpha e^{-\mu\theta} + \beta e^{\mu\theta}$: impossible (Solution finie)
- si $k > 0, k = \mu^2$, $b(\theta) = \alpha \cos \mu\theta + \beta \sin \mu\theta$ avec $\mu = n \in \mathbb{N}$

[8]En coordonnées polaire, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$

Finalement, on conclut que :

$$b(\theta) = \alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta, n \in \mathbb{N} \tag{4.4.26}$$

L'équation (4.4.24) pour $k = n^2$ donne :

$$r^2 a''(r) + ra'(r) - n^2 a(r) = 0 \tag{4.4.27}$$

On cherche des solutions sous la forme r^p et donc $(p(p-1) + p - n^2)r^p = 0$, d'où $p = \pm n$:

- Si $n > 0$, $a_n(r) = c_n r^n + c_{-n} r^{-n}$ avec des solutions bornées soit $c_{-n} = 0$
- Si $n = 0$, $r^2 a''(r) + ra'(r) = 0 = (ra')' = 0$ soit $a(r) = k_1 + k_2 \ln r$ avec des solutions bornées : $k_2 = 0$

Finalement et par superposition, les seules solutions acceptables sont de la forme :

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 0} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) r^n \tag{4.4.28}$$

Il faut donc maintenant traiter la condition aux limites, c'est à dire :

$$\sum_{n\geq 0} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) R^n = g(\theta) \tag{4.4.29}$$

Là encore, la décomposition en série de Fourier de $g(\theta)$ apparaît naturellement :

$$g(\theta) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \tag{4.4.30}$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta \tag{4.4.31}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta\, d\theta \tag{4.4.32}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin n\theta\, d\theta \tag{4.4.33}$$

D'où, par identification,

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) (\frac{r}{R})^n \tag{4.4.34}$$

Equation de Poisson voir exercices 4.7

4.4.3 Noyau de Laplace, de Poisson et fonctions de Green

4.4.3.a Retour sur l'exemple du disque de Rayon R

Essayons d'écrire la solution (4.4.25) sous forme intégrale à partir de l'expression des coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi)\, d\phi \qquad (4.4.35) \\ &+ \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \cos n\phi\, d\phi \cos n\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\phi) \sin n\phi\, d\phi \sin n\theta \right) (\frac{r}{R})^n \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} g(\phi)\, d\phi + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{r}{R}\right)^n \left(\int_0^{2\pi} g(\phi) \cos(n(\theta - \phi))\, d\phi \right) \right] \qquad (4.4.36) \end{aligned}$$

On souhaite maintenant inverser la somme et le signe intégral. Pour cela, il faut montrer la convergence normale de la série. Nous avons la majoration suivante :

$$\forall \phi, \left| \left(\frac{r}{R}\right)^n g(\phi) \cos(n(\theta - \phi)) \right| \leq \|g\|_\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n = z_n \tag{4.4.37}$$

et la série $\sum z_n$ converge. On peut inverser le signe somme et la signe intégral :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} g(\phi)\, d\phi + \int_0^{2\pi} \left(g(\phi) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n(\theta - \phi)) \right) d\phi \right] \tag{4.4.38}$$

Or

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n(\theta - \phi)) = Re \left[\sum_{n\geq 1} \left(\frac{r}{R}\right)^n [\exp(i(\theta - \phi))]^n \right] \tag{4.4.39}$$

$$= Re \left[\frac{\frac{r}{R} \exp(i(\theta - \phi))}{1 - \frac{r}{R} \exp(i(\theta - \phi))} \right] \tag{4.4.40}$$

$$= \frac{rR\cos(\theta - \phi) - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \phi)} \tag{4.4.41}$$

d'où

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\theta - \phi)} g(\phi)\, d\phi \tag{4.4.42}$$

On écrit encore ce résultat sous la forme suivante :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \theta - \phi) g(\phi)\, d\phi \tag{4.4.43}$$

avec pour noyau intégral $K(r,\omega)$, appelé encore *Noyau de Laplace* sur le disque, défini par :

$$K(r,\omega) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(\omega)} \tag{4.4.44}$$

soit encore sous forme de convolution :

$$u(r,\theta) = [K(r,.) \star g(.)](\theta) \tag{4.4.45}$$

REMARQUE 4.4.2

1. On voit que la solution $u(r,\theta)$ dépend en tout point de la donnée au bord $g(\theta)$. En d'autres termes, un changement des conditions aux bords entraîne un changement de la solution partout dans le domaine. Ceci est caractéristique des EDP elliptiques
2. On voit que u est $\mathcal{C}^\infty$ (même analytique) pour une donnée g continue, On dit que Δ^{-1} est régularisant (énorme différence avec les EDP de transport).

Ces remarques peuvent se transposer sur des problèmes plus généraux que celui du disque, voir (GARABEDIAN, 1964 ; RENARDY & ROGERS, 1993).

❑

4.4.3.b Du noyau de Laplace aux fonctions de Green

4.4.2 **NOTE DE RÉDACTION**

`Considérer l'équation de Poisson et introduire les fonctions de Green pour le cas non homogène. (ELŻANOWSKI, 2003, p. 52)(HOWELL, 2004, p. 3-11)`

4.5 Applications plus que classiques

4.5.1 Élasticité linéaire des solides – Statique.

cf.EUVRARD (1994) RAVIART & THOMAS (1992)

4.5.2 Écoulement de Stokes ?

On rappelle le système de Stokes ici où on le place dans la partie Méca Flu. ?

4.5.3 Méthodes numériques associées

4.6 Applications en domaine non borné

EUVRARD (1994) KERSALÉ (2004)

4.6.1 Équations intégrales

4.6.2 Fonction de Green

4.6.3 Applications

élasticité linéaire problème de Boussinesq
Fluide : Champ de vitesse autour d'un profil d'aile.

4.6.4 Méthode numérique associée

Méthodes des singularités (Boundary Element Method)

4.7 Exercices

(RENARDY & ROGERS, 1993) HOWELL (2004)

Problème de Dirichlet sur le cercle de unité

Resoudre un cas particulier de Problème de Dirichlet sur le cercle unité :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 1, \forall x \in \Omega & \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\} \\ u(x,y) = 0, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.7.1}$$

Solution :

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{4} \tag{4.7.2}$$

Problème de Dirichlet sur le carre unité

On considère le carré unité plan :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \tag{4.7.3}$$

Résoudre le problème de Dirichlet sur Ω

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), \forall x \in \Omega \\ u(x,y) = 0, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.7.4}$$

avec

$$f(x,y) = -2\pi^2 \cos(2\pi x) \sin^2(\pi y) - 2\pi^2 \sin^2(\pi x) \cos(2\pi y) \tag{4.7.5}$$

Solution :

$$u(x,y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) \tag{4.7.6}$$

To Do List for this chapter

1. Vérifier les unités dans les tableaux (cf Femlab)
2. Faire le tour du matériel suivant : EUVRARD (1994), (RENARDY & ROGERS, 1993), ELŻANOWSKI (2003), HOWELL (2004), RAVIART & THOMAS (1992), KERSALÉ (2004).
3. Faire apparaître plus clairement les hypothèses de la section 4.2.2
4. Deux mots sur le cadre fonctionnel général et le problème elliptique abstrait
5. Caser les exemples académiques vectorielles de l'élasticité tridimensionnelle et de Stokes (Ecoulements visqueux stationnaires.)
6. Aborder les problème en domaine non borné en option.
7. Intégrer les différents types de solutions analytiques des équations de Laplace, Poisson, Helmholtz.
   http ://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/lpde/lpdetoc3.htm