Chapitre 5

EDP paraboliques. Les équations de diffusion

Contenu du Chapitre 5

Notations

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux EDP paraboliques linéaires. Si l'on considère le cas scalaire bidimensionel, c'est à dire, une fonction inconnue u définie sur un domaine ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, une EDP parabolique linéaire se met sous la forme suivante :

$$a(x,y)u_{xx}(x,y) + b(x,y)u_y(x,y) + c(x,y)u_x(x,y) + d(x,y)u(x,y) = f(x,y) \tag{5.1.1}$$

Le plus souvent dans les applications la variable y représente le temps et nous la noterons t. Le domaine D prend alors la forme suivante $D = (\Omega \subset \mathbb{R}) \times [0,T]$. L'équation (5.1.2) est alors adimensionnalisée et mise sous la forme classique suivante :

$$-u_t(x,t) + a(x,y)u_{xx}(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) + d(x,t)u(x,t) = f(x,t), \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in]0,T[\tag{5.1.2}$$

On parle aussi de problème unidimensionnel en espace.

Si la fonction u est définie sur $(\Omega \subset \mathbb{R}^n) \times [0,T]$, on définit une EDP parabolique linéaire par

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \tag{5.1.3}$$

où l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ est défini par :

$$\mathcal{L}u = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}(x,t) + c(x,t)u(x,t) \tag{5.1.4}$$

On suppose le plus souvent que les valeurs propres de la matrice $A = a_{ij}$ qui sont toutes non nulles et de même signe. On rappelle que le matrice A peut toujours être choisie symétrique du fait de la symétrie $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$ et donc que les valeurs sont réelles.

5.2 Origine des EDP paraboliques

En guise d'introduction, on va illustrer comment les lois de conservations écrites sur des milieux continus immobiles et couplées à des lois constitutives linéaires reliant le gradient d'un grandeur à son flux conduisent naturellement à des EDP paraboliques.

5.2.1 Encore des lois de conservations

Replaçons dans le cadre d'écriture des lois de conservations et reprenons les calculs sur § 4.2 :

- Loi de conservation d'une grandeur $\mathcal{A}(t) = \int_{\omega(t)} \rho(x,t)A(x,t)\,dx$ et utilisant la conservation de la masse :
$$\rho\frac{DA}{Dt} = \varphi_{\mathcal{A}} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} j_{\mathcal{A}}. \tag{5.2.1}$$
- Si le milieu est immobile, la vitesse eulérienne est alors nulle et donc l'équation de conservation donne donc :
$$\rho\frac{\partial A}{\partial t} = \varphi_{\mathcal{A}} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} j_{\mathcal{A}}. \tag{5.2.2}$$
- Si la loi constitutive du milieu (loi de comportement) est une relation linéaire entre le flux et le gradient soit :
$$j_{\mathcal{A}}(x,t) = -K(x,t).\nabla_x A(x,t) \tag{5.2.3}$$

En reportant dans l'équation 5.2.2, on obtient :

$$\rho\frac{\partial A}{\partial t} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} K(x,t).\nabla_x A(x,t) = \varphi_{\mathcal{A}} \tag{5.2.4}$$

soit

$$\rho\frac{\partial A}{\partial t} - K\Delta_x A - \nabla_x K.\nabla_x A = \varphi_{\mathcal{A}} \tag{5.2.5}$$

Dans le cas ou l'opérateur K possède de bonnes propriétés de positivité, on obtient une EDP de type parabolique.

5.2.2 L'exemple de l'équation de diffusion de la chaleur.

Dans ce paragraphe, on donne l'exemple le plus classique de loi de diffusion : l'équation de la chaleur. La variable $u(x,t)$ est alors la température que nous noterons $T(x,t)$. On considère un milieu immobile Ω de frontière $\partial\Omega$. On note $q(x,t)$ la densité de flux de chaleur à travers une surface S de normale n_x. Le flux total à travers cette surface à l'instant t vaut :

$$\int_S q(x,t).n_x\,ds \tag{5.2.6}$$

de sorte que l'échange avec l'extérieur s'exprime par :

$$-\int_{\partial\Omega} q(x,t).n_x\,ds \tag{5.2.7}$$

On note $Q(x,t)$ l'apport volumique de chaleur. L'apport total de chaleur à l'instant t s'exprime donc par :

$$\int_\Omega Q(x,t)\,dx \tag{5.2.8}$$

En considérant que le milieu a une masse volumique $\rho(x)$, $[\mathsf{kg.m}^{-3}]$ et une chaleur spécifique $C(x)\,[\mathsf{J.kg}^{-1}.\mathsf{K}^{-1}]$, la quantité totale de chaleur emmagasinée à l'instant t par le milieu peut s'écrire :

$$\int_\Omega \rho C T\,dx \tag{5.2.9}$$

et sa variation

$$\frac{D}{Dt}\int_\Omega \rho C T\,dx \tag{5.2.10}$$

L'équation de conservation pour un milieu nous conduit donc à

$$\frac{D}{Dt}\int_\Omega \rho C T\,dx = \int_\Omega Q(x,t)\,dx - \int_{\partial\Omega} q(x,t).n_x\,ds \tag{5.2.11}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_\Omega \rho C T\,dx = \int_\Omega Q(x,t) - \mathrm{div}_x\, q(x,t)\,dx \tag{5.2.12}$$

soit localement, si cette dernière équation est valable quelque soit le volume d'intégration :

$$\rho C\frac{DT}{Dt} = Q - \mathrm{div}_x\, q, \qquad \text{(Loi de conservation de la Chaleur)} \tag{5.2.13}$$

On suppose que la loi constitutive du matériau suive la *loi de Fourier* :

$$q(x,t) = -k(x,t)\nabla_x T(x,t) \tag{5.2.14}$$

où $k(x,t)\,[\mathsf{J.m}^{-1}.\mathsf{K}^{-1}]$ est la conductivité. En substituant cette équation constitutive dans la loi de conservation(5.2.13), on obtient l'*équation de diffusion de la Chaleur* :

$$\rho C\frac{DT}{Dt} - \mathrm{div}_x\, k(x,t)\nabla_x T(x,t) = Q \tag{5.2.15}$$

Pour un matériau homogène et sans source volumique, on écrit :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{k}{\rho C}\Delta T = D\Delta T, \quad D = \frac{k}{\rho C} > 0 \tag{5.2.16}$$

o'u $D\,[\mathsf{m}^2.\mathsf{s}^{-1}]$ est la diffusivité thermique. Enfin, si le milieu est immobile, la dérivée particulaire se confond avec la dérivée partielle par rapport au temps, soit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\Delta T = 0, \quad D > 0 \tag{5.2.17}$$

Interprétation des conditions aux limites Les conditions aux limites peuvent s'interpréter de la manière suivante :

– Les *conditions de Dirichlet* correspondent à imposer une température constante sur les bords du milieu Ω
– Les *conditions de Neumann* correspondent à imposer un flux de chaleur sur les bords du milieu Ω. Si on veut isoler le milieu, il suffit d'imposer un flux nul.
– Les *conditions mixtes de Robin* peuvent être utilisées, par exemple, pour modéliser grossièrement un processus de radiation linéaire.

D'autres processus de diffusion

5.2.1 Note de Rédaction

```
Un mot sur d'autres types de diffusion :
   - Darcy
   - Fick
   - Diffusion de particules et mouvement Brownien. Travaux d'Einstein.
     http ://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation
```

D'autres applications

5.2.2 Note de Rédaction

```
The heat equation arises in the modeling of a number of phenomena and is often used in financial
mathematics in the modeling of options. The famous Black-Scholes option pricing model's differenti
equation can be transformed into the heat equation allowing relatively easy solutions from a
familiar body of mathematics. Many of the extensions to the simple option models do not have
closed form solutions and thus must be solved numerically to obtain a modeled option price.
```

5.3 Propriétés des EDP paraboliques

5.3.1 Conditions aux limites naturelles et questions d'unicité

Considérons que le problème est posé sur un cylindre en espace–temps : $\{(x,t), \Omega \times \mathbb{R}^+\}$. Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, les conditions de Dirichlet et Neumann ont un sens pour les EDP paraboliques. A la différence des EDP elliptiques (voir Chapitre 5), ces conditions en espace doivent être définies pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, soit

– Les *conditions de Dirichlet* reviennent à imposer :

$$u(x,t) = g(x,t), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega, \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{5.3.1}$$

– Les *conditions de Neumann* reviennent à imposer :

$$\nabla u(x,t).n_x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x} = h(x,t), \forall x \in \Gamma \subset \partial\Omega, \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{5.3.2}$$

Par contre, une condition supplémentaire doit être ajoutée sur tout le domaine Ω qui est une condition initiale en temps, soit :

$$u(x, t = t_0) = u^0(x), \forall x \in \Omega, t_0 \in \mathbb{R} \tag{5.3.3}$$

Dans le suite, on choisira le plus souvent $t_0 = 0$ par soucis de simplicité.

Questions d'unicité De la même manière que pour les équations elliptiques, on peut montrer que la condition aux limites de Dirichlet conduisent à l'unicité de la solution. Contrairement aux équations elliptiques, nous verrons de plus que la condition de Neumann conduit elle aussi à un résultat d'unicité. Introduisons une nouvelle fois trois problèmes académiques :

1. Le *Problème de Dirichlet* sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s'énonce ainsi : trouver une fonction scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \\ u(x,t) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x,t) = u^0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{5.3.4}$$

2. Le *Problème de Neumann* sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s'énonce ainsi : trouver une fonction scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \\ \nabla u(x).n_x = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n_x} = h(x), \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x,t) = u^0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{5.3.5}$$

3. Le *Problème mixte de Dirichlet-Neumann* sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ s'énonce ainsi : trouver une fonction scalaire $u : \Omega \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega_1, t \geq 0 \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n_x} = h(x), \quad x \in \partial\Omega_2, t \geq 0 \\ u(x,t) = u^0(x), \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{5.3.6}$$

avec

$$\begin{cases} \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_1 = \partial\Omega \\ \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_1 = \emptyset \end{cases} \tag{5.3.7}$$

Afin de donner une preuve d'unicité simple, on considère un ensemble Ω inclu dans $\mathbb{R}$ donné par le segment $]a, b[$. Considérons maintenant deux solutions u_1 et u_2 à un de ces problèmes. La différence de ces deux solutions $v = u_2 - u_1$ est donc donnée par un de ces problèmes avec des conditions aux limites homogènes. Définissons maintenant une énergie associée au système par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_a^b v^2(x,t)dx \tag{5.3.8}$$

La dérivée par rapport au temps de cette énergie est :

$$\frac{d\,E(t)}{d\,t} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\partial v^2(x,t)}{\partial t}\,dx = \int_a^b v\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\,dx = \int_a^b v\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\,dx \tag{5.3.9}$$

La dérivation sous le signe intégral peut se justifier pour $t \geq 0$ facilement [1]. La dernière expression est donnée par l'équation parabolique. Si on réalise maintenant une intégration par parties, on obtient :

$$\frac{d\,E(t)}{d\,t} = \left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=a}^b - \int_a^b \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx = -\int_a^b \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx \leq 0 \tag{5.3.10}$$

du fait des conditions aux limites.

Nous pouvons donc conclure que l'énergie décroît au cours du temps. Ce résultat permet de conclure à l'unicité de la façon suivante. En admettant que l'énergie est continue en $t = 0$[2], le fait que $v^0 \equiv 0$ entraîne que $E(0) = 0$. Par définition, l'énergie $E(t)$ est positive ; on a vu qu'elle était aussi décroissante. Cela entraîne que $E(t) = 0, \forall t \geq 0$. Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que l'énergie n'est autre que la norme $\mathcal{L}^2$ et donc $\|v(x,t)\|_{\mathcal{L}^2} = 0, \Rightarrow v(x,t) = 0$. On a donc unicité de la solution.

Remarque 5.3.1

La décroissance de l'énergie dans le temps peut s'écrire :

$$E(t) \leq E(0), \forall t \geq 0 \tag{5.3.11}$$

soit

$$\|v(x,t)\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|v(x,0)\|_{\mathcal{L}^2}, \forall t \geq 0 \tag{5.3.12}$$

ou encore

$$\|u_2(x,t) - u_1(x,t)\|_{\mathcal{L}^2} \leq \|u_2(x,0) - u_1(x,0)\|_{\mathcal{L}^2}, \forall t \geq 0 \tag{5.3.13}$$

L'application $u(.,0) \mapsto u(.,t)$ est donc continue au sens de la norme $\mathcal{L}^2(a,b)$, i.e, en moyenne quadratique. En d'autres termes, on a continuité par rapport aux conditions initiales.

❑

5.3.2 Principes de Maximum

Dans cette partie, on étend les principes de maximum donnés pour les EDP elliptiques dans le § 4.3.2 pour un opérateur parabolique de la forme[3] :

$$\mathcal{L}u = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j}(x,t) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i}(x,t) + c(x,t)u(x,t) \tag{5.3.14}$$

[1] La continuité de $v^2(x,t)$ et de sa dérivée suffit

[2] Résultat assez délicat à démontrer

[3] Pour plus de détails, voir (Renardy & Rogers, 1993, Chap 4)

On considérera les solutions définies sur $Q = \Omega\times]0,T[$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de l'équation parabolique $\mathcal{L}u(x,t) = f(x,t)$. On définit les ensembles suivants :

$$D = \Omega\times]0,T] \quad (5.3.15)$$
$$\Sigma = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\}) \quad (5.3.16)$$

Les hypothèses suivantes sont faites pour le reste de cette partie :

1. Les coefficients a_{ij}, b_i et c sont continues sur l'adhérence, $\bar{D}$,
2. La solution est suffisamment régulière, i.e., $u \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}(\bar{D})$,
3. La matrice a_{ij} est symétrique et définie positive $\forall(x,t) \in \bar{D}$, c'est à dire $\mathcal{L}$ est parabolique.

Les principes de maximum pour les EDP paraboliques affirment que le maximum de la solution u doit être sur le bord Σ sous des conditions de signe de c et de f.

Théorème 5.3.1 (Principe de maximum faible) Supposons que $\mathcal{L}u \geq 0$ (ou respectivement $\mathcal{L}u \leq 0$) sur un domaine borné Ω et que $c(x) = 0$ dans D. Alors la solution u atteint son maximum (respectivement son minimum) sur Σ.

Si de plus $\mathcal{L}u > 0$ alors la fonction u ne peut atteindre nulle part son maximum sur $\Omega \times \{T\}$.

❑

Preuve : La preuve de ce théorème découle de la preuve du Théorème 4.3.1 pour les équations elliptiques en remarquant que la preuve est toujours valable pour une matrice seulement semi-définie positive pourvu qu'il existe au moins un vecteur ξ indépendant de x tel que $\xi_i a_i j \xi_j > 0$

❑

Théorème 5.3.2 (Principe de maximum fort) Supposons que $\mathcal{L}u \geq 0$ (ou respectivement $\mathcal{L}u \leq 0$) en un domaine Ω. Soit $M = \sup_D u$ ($M = \inf_D u$). Si on suppose que $u = M$ sur un point $(x_0, t_0) \in D$ et que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. Si $c(x) = 0$ dans Ω et M arbitraire
2. Si $c(x) \leq 0$ et $M \geq 0$ ($M \leq 0$),
3. $M = 0$ et $c(x)$ est arbitraire .

alors la solution $u = M$ sur $\bar{\Omega} \times [0, t_0]$.

❑

Preuve : Voir (Renardy & Rogers, 1993, Chap 4, p. 122)

❑

5.3.1 Note de Rédaction

`Illustrer les principes de maximum sur une solution unidimensionnelle simple.`

5.4 Méthodes de résolution analytique

5.4.1 Séparation des variables dans le cas unidimensionnel borné en espace

On va envisager un cas particulier d'équation parabolique pour $D^+ = (\Omega \subset \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ avec Ω borné :

$$u_t - \nu u_{xx} = 0, \nu > 0, \quad \forall (x,t) \in D^+ \tag{5.4.1}$$

pour laquelle on va chercher une solution par séparation des variables :

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{5.4.2}$$

On obtient aisément l'égalité suivante si $u \neq 0$:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \nu \frac{X''(t)}{X(t)} = \lambda \tag{5.4.3}$$

soit

$$\begin{cases} T'(t) = \lambda T(t) \\ X''(x) = \dfrac{\lambda}{\nu} X(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T(t) = Ce^{\lambda t} \\ X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda/\nu}x} + Be^{-\sqrt{\lambda/\nu}x} \end{cases} \tag{5.4.4}$$

On obtient donc une solution générale une équation de la forme :

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\left(Ae^{\sqrt{\lambda/\nu}x} + Be^{-\sqrt{\lambda/\nu}x}\right) \tag{5.4.5}$$

Afin de préciser les solutions de l'EDP parabolique (5.4.1), il convient d'envisager des conditions aux limites.

Conditions de Dirichlet Précisons le domaine D^+ pour simplifier les calculs :

$$D^+ = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < x < 1, 0 < t < \infty\} \tag{5.4.6}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \forall t > 0 \tag{5.4.7}$$

et la condition initiale :

$$u(x,0) = f(x), \forall x \in]0,1[\tag{5.4.8}$$

On peut vérifier que les solutions du type (5.4.5) respectent les conditions aux limites si et seulement si

$$\frac{\lambda}{\nu} = -n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}^* \tag{5.4.9}$$

Dans ce cas,la famille de solutions se réduit à :

$$u(x,t) = Ae^{-n^2\pi^2\nu t}\sin(n\pi x) \tag{5.4.10}$$

Afin de satisfaire la condition initiale (5.4.8), on envisage, comme dans le cas des équations elliptiques, une décomposition de la fonction f en série de Fourier de sinus.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin n\pi x, \quad \alpha_n = 2\int_0^1 f(x) sin(n\pi x)\, dx \tag{5.4.11}$$

On obtient alors une solution :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-n^2\pi^2\nu t}\sin(n\pi x), \quad A_n = \alpha_n \tag{5.4.12}$$

Conditions de Neumann Considérons des conditions de Neumann sur le même domaine D^+ :

$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) = 0, \forall t > 0 \tag{5.4.13}$$

et la condition initiale :

$$u(x,0) = f(x), \forall x \in]0,1[\tag{5.4.14}$$

De la même manière, on obtient une solution de la forme

$$u(x,t) = Ae^{-n^2\pi^2\nu t}\cos(n\pi x) \tag{5.4.15}$$

et si on considère la décomposition de la fonction f en série de cosinus de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \cos n\pi x, \quad \beta_0 = \int_0^1 f(x)dx, \quad \beta_n = 2\int_0^1 f(x)cos(n\pi x)\,dx \tag{5.4.16}$$

On obtient :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{-n^2\pi^2\nu t}\cos(n\pi x), \quad A_n = \beta_n \tag{5.4.17}$$

Conclusions sur les conditions aux limites Contrairement aux EDP elliptiques générales, on pourra verifier que le problème de Neumann pur est bien posé.

5.4.2 Transformée de Fourier et domaine non borné

Considérons, dans cette partie, une équation parabolique de diffusion écrite sur un domaine non borné unidimensionnel, $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_t = \nu u_{xx}, & \forall x \in \mathbb{R},\ \forall t > 0, \\ u(x,0) = u^0(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.4.18}$$

Ce problème modélise par exemple la diffusion de la chaleur dans une barre de longueur infinie. Les conditions aux limites ne sont pas précisé explicitement dans ce problème mais mous supposerons que

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = C(t) \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{5.4.19}$$

Pour résoudre ce problème, on fait appel usuellement à la transformée de Fourier (TF). On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ s'écrit :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx \tag{5.4.20}$$

et la transformée inverse[4] :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x}\hat{f}(\xi)\,d\xi \tag{5.4.21}$$

[4] Pour plus de détails, on lira l'annexeB

Si on réalise une TF en espace de l'équation (5.4.18), on obtient :

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} - \nu\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = 0 \tag{5.4.22}$$

$$\text{avec } \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dx = \frac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} \tag{5.4.23}$$

$$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,dx \tag{5.4.24}$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x}e^{-2i\pi\xi x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\xi\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,dx \tag{5.4.25}$$

$$= (2i\pi\xi)^2\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}u(x,t)\,dx \tag{5.4.26}$$

$$= -(2\pi\xi)^2\hat{u}(\xi,t) \tag{5.4.27}$$

et

$$\hat{u}(\xi,0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}u^0(x)\,dx = \hat{u}^0(\xi) \tag{5.4.28}$$

On obtient donc une EDO paramétrée par ξ :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \hat{u}(\xi,t)}{\partial t} + (2\pi\xi)^2\nu\hat{u}(\xi,t) = 0\\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}^0(\xi)\end{cases} \tag{5.4.29}$$

dont la solution est donnée directement par :

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}^0(\xi)e^{-(2\pi\xi)^2\nu t} \tag{5.4.30}$$

Pour connaître la solution du problème initial, il reste à appliquer une transformée de Fourier inverse[5]

$$u(x,t) = u^0(x)\star \mathrm{TF}^{-1}(e^{-(2\pi\xi)^2\nu t}). \tag{5.4.31}$$

Rappelons que la fonction $e^{-\pi x^2}$ est invariante par transformée de Fourier F, i.e.

$$\mathrm{TF}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\xi^2} \tag{5.4.32}$$

et que

$$\forall k \neq 0, \mathrm{TF}(\frac{1}{|k|}f(\frac{x}{k})) = \hat{f}(k\xi) \tag{5.4.33}$$

On obtient donc,

$$\widehat{e^{-\alpha\pi x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi^2} \tag{5.4.34}$$

d'où on déduit :

$$\mathrm{TF}^{-1}(e^{-(2\pi\xi)^2\nu t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} \tag{5.4.35}$$

La solution du problème de diffusion sur un domaine unidimensionnel non borné est donc donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}u^0(x)\star e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{\mathbb{R}} u^0(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\nu t}}\,ds \tag{5.4.36}$$

ou encore

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{\mathbb{R}} u^0(x-s)e^{-\frac{(s)^2}{4\nu t}}\,ds \tag{5.4.37}$$

[5]On rappelle que la transformée inverse d'un produit de transformée est le produit des fonctions, soit $\mathrm{TF}^{-1}(\hat{a}.\hat{b}) = a\star b$

On note généralement le noyau intégral de l'équation de la chaleur par :

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} \tag{5.4.38}$$

la solution s'exprimant alors :

$$u(x,t) = u^0(x) \star K(x,t) = \int_{\mathbb{R}} u^0(s) K(x-s,t)\, ds \tag{5.4.39}$$

Justifications mathématiques a posteriori. (EUVRARD, 1994, p. 49–50) Quelques justifications a posteriori peuvent être données concernant le calcul de la solution précédente. Supposons pour cela que la condition initiale $u^0(x)$ soit continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Dès lors , les formules (5.4.36) et (5.4.39) ont un sens pour $t > 0$ du fait de l'exponentielle, $e^{-\frac{x^2}{4\nu t}}$ qui garantit que l'intégrale en ait un. De plus, l'équation (5.4.36) est indéfiniment dérivable sous le signe somme grâce encore a l'exponentielle décroissante.

Pour $t = 0$, le problème est plus délicat. La condition aux limites doit être comprise comme

$$\lim_{t \to 0, t>0} u(x,t) = u^0(x) \tag{5.4.40}$$

avec $u^0(x)$ supposée continue en x. Cette interprétation résulte en particulier du fait que la famille de fonction

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} e^{-\frac{x^2}{4\nu t}} \tag{5.4.41}$$

converge au sens des distributions vers la distribution de Dirac δ. L'équation de convolution prend alors tout son sens pour une distribution de Dirac en zéro. Le lien entre les fonction de Green, le noyau intégral et les distributions de Dirac est très fort. Il sera discuté dans la section 5.4.4.

Principe de Maximum et décroissance de l'énergie On peut vérifier sur cette solution particulière que le principe de maximum est vérifié. En effet, on a

$$|u(x,t)| = \int_{\mathbb{R}} u^0(s) K(x-s,t)\, ds \tag{5.4.42}$$

$$\leq \|u^0\|_\infty \int_{\mathbb{R}} K(x-s,t)\, ds = \|u^0\|_\infty \tag{5.4.43}$$

et donc

$$|u(x,t)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x,t=0)| \tag{5.4.44}$$

Propriétés régularisantes de l'opérateur différentiel De la même façon que pour les équations elliptiques, on peut noter que

1. On voit que la solution $u(x,t)$ dépend en tout point de la donnée initiale $u^0(x)$. En d'autres termes, un changement de condition initiale entraîne un changement de la solution partout dans le domaine. Ceci est caractéristique des EDP paraboliques
2. On voit que u est $\mathcal{C}^\infty$ (même analytique) pour une donnée u^0 simplement continue, On dit que $(-\frac{\partial}{\partial t} + \Delta)^{-1}$ est régularisant (énorme différence avec les EDP de transport).

En fait, les hypothèses de continuité de la solution initiale peuvent être affaiblies. Des conditions initiales discontinues peuvent être choisies.

Diffusion et non pas propagation Une remarque importante peut être faite en étudiant la forme intégrale de la solution(5.4.39). Si on choisit une solution initiale représentée par une fonction constante sur un intervalle $[a, b]$ et nulle partout ailleurs, on remarque que la solution est non nulle partout pour $t = \varepsilon$ arbitrairement petit. La communication de la solution initiale au reste du domaine s'est fait en quelque sorte à une vitesse infinie. On parle pour ce type de *phénomène de diffusion*. La diffusion est un phénomène de nature très différente de la propagation qui met en jeu une vitesse finie de propagation (systèmes hyperboliques).

Considérons pour illustrer ce phénomene la donnée initiale suivante

$$u^0(x) = \begin{cases} 2T & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases} \tag{5.4.45}$$

La solution (5.4.36) peut alors s'ecrire

$$u(x,t) = \frac{T}{\sqrt{\pi \nu t}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{(s)^2}{4\nu t}}\, ds \tag{5.4.46}$$

$$= \frac{2T}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}}^{+\infty} e^{-v^2}\, dv \tag{5.4.47}$$

Il est commode pour décrire la solution d'introduire la fonction "Erreur", Erf et la fonction "erreur complémentaire" $Erfc$ définies par

$$Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-v^2}\, dv, \quad Erfc(z) = 1 - Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-v^2}\, dv. \tag{5.4.48}$$

et illustrée sur la Figure 5.1

La solution (5.4.37) s'ecrit alors

$$u(x,t) = TErfc(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}) \tag{5.4.49}$$

Problème non homogène (terme source) Considérons maintenant le problème équivalent à (5.4.18) avec un terme source mais homogène du point de vue de la condition initiale :

$$\begin{cases} u_t - \nu u_{xx} = f(x,t), & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ u(x,0) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.4.50}$$

La transformée de Fourier de ce problème conduit à l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \hat{u}_t + \pi^2 \xi^2 \nu \hat{u} = \hat{f}, & \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \\ \hat{u}(\xi,0) = 0, \forall \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.4.51}$$

La solution de cette EDO peut être déterminée comme la somme d'une solution générale de l'équation homogène et une solution particulièr3. La solution générale de l'équation homogène est identiquement nulle dans notre cas ; il ne reste plus qu'à déterminer une solution particuliere par la méthode de la variation de la constante, soit une solution de la forme :

$$\hat{u}(\xi,t) = k(\xi,t) e^{-4\pi^2 \nu \xi^2 t} \tag{5.4.52}$$

En substituant dans (5.4.51), il reste :

$$\frac{\partial k(\xi,t)}{\partial t} e^{-4\pi^2 \nu \xi^2 t} = \hat{f}(\xi,t) \tag{5.4.53}$$

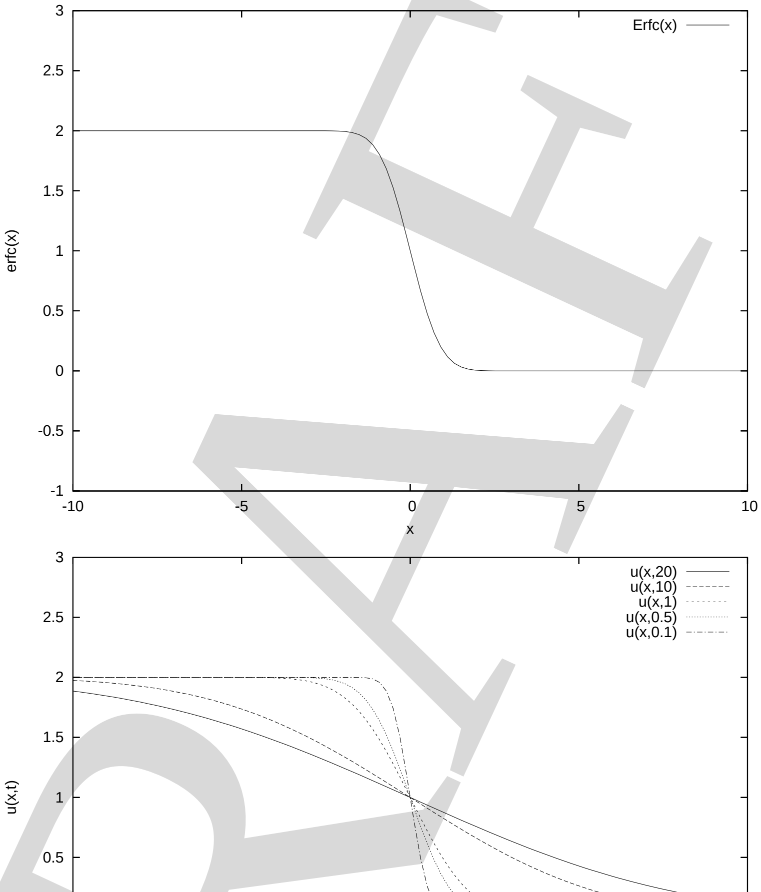

FIG. 5.1 – Fonction “erreur complémentaire” $Erfc$ et solution (5.4.37)

d'où

$$k(\xi,t) = \int_0^t \hat{f}(\xi,\tau)e^{4\pi^2\nu\xi^2\tau}\,d\tau \tag{5.4.54}$$

La transformée de Fourier de la solution est donc :

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_0^t \hat{f}(\xi,\tau)e^{4\pi^2\nu\xi^2(t-\tau)}\,d\tau \tag{5.4.55}$$

Par transformée inverse, on obtient :

$$u(x,t) = \int_0^t f(x,\tau) \star K(x,\tau)\,d\tau \tag{5.4.56}$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(x-y,\tau) \star K(y,\tau)\,d\tau dy \tag{5.4.57}$$

5.4.3 Méthodes de similitudes

(Howell, 2004, p. 3-26)

5.4.4 Solutions fondamentales et fonctions de Green

(Renardy & Rogers, 1993)(Elżanowski, 2003)(Howell, 2004)

`http ://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation`

5.4.5 Méthodes numériques associées

5.5 EDP paraboliques et terme de reaction et de transport

5.5.1 L'équation de réaction–diffusion

cf Smoller (1983)

5.5.2 L'équation d'advection–diffusion et Fokker–Planck

L'équation de Fokker-Planck est en quelque sorte intermédiaire entre l'équation de transport et celle de la chaleur. Il s'agit d'une équation très classique de la physique des plasmas, qui modélise un gaz de particules dans la situation suivante :

- entre deux collisions, chaque particule suit instantanément le mouvement rectiligne uniforme défini par sa vitesse ;
- lors de collisions, les vitesses des particules entrées en collision sont très faiblement modifiées, de sorte que l'effet des collisions peut être représenté, à l'ordre dominant, par un processus de diffusion.

Choisir en Fokker–Planck et Advection–Diffusion

Résolution de l'équation unidimensionnelle en exercices.

$$\begin{aligned} &\partial_t f - v.\nabla_x f - \Delta_v f = 0, \quad t > 0, \quad x, v, \in \mathbb{R}^n \\ &f|_{t=0} = f_0 \end{aligned} \tag{5.5.1}$$

Golse (2003–2004)

5.6 Exercices

Exercice 1 : Problème non homogène avec terme de transport

Résoudre le problème d'advection–diffusion suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathrm{I\!R},\ t > 0 \tag{5.6.1}$$

avec pour conditions initiales un Dirac en $x = 0$. Donner une interpretation de la condition initiale et de la solution.

Exercice 2 : une illustration du phenomene de diffusion

(Euvrard, 1994, p. 51–53)