

Chapitre 6

EDP hyperboliques. Les équations de propagation d'ondes

Contenu du Chapitre 6

6.1	Introduction	104
6.2	Origine des équations de propagation d'ondes	104
6.2.1	Vibrations mécaniques dans les milieux continus	104
6.2.2	Acoustique	107
6.2.3	Ondes électromagnétiques dans le vide	107
6.3	Propriétés	108
6.3.1	Solution de D'Alembert	108
6.3.2	Le problème de Cauchy et la condition initiale	109
6.3.3	Domaine de dépendance, d'influence et de détermination	109
6.3.4	Le problème des conditions aux limites en espace.	111
6.3.5	Conservation de l'énergie	113
6.4	Méthodes de résolution	115
6.4.1	Méthodes de séparation de variables	115
6.4.2	Solutions fondamentales et fonctions de Green	118
6.4.3	Problèmes aux valeurs propres. Modes propres et analyse modale	119
6.5	Application en domaine non borné	122
6.5.1	En Acoustique	122
6.5.2	En hydrodynamique	122
6.5.3	Électromagnétisme?	122
6.6	Exercices	123
6.6.1	Exercices sur les cordes vibrantes	123
6.6.2	Modes de plaques et de disques	123

Notations

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux EDP hyperboliques linéaires. Si l'on considère le cas scalaire, c'est à dire, une fonction inconnue u définie sur un domaine ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, une EDP hyperbolique linéaire se met sous la forme suivante :

$$a(x, y)u_{xx}(x, y) + b(x, y)u_{yy}(x, y) + c(x, y)u_x(x, y) + d(x, y)u_y(x, y) + eu(x, y) = f(x, y) \quad (6.1.1)$$

avec $a(x, y)b(x, y) < 0$.

Le plus souvent dans les applications la variable y représente le temps et nous la noterons t . Le domaine D prend alors la forme suivante $D = (\Omega \subset \mathbb{R}) \times [0, T]$. L'équation (6.1.1) est alors adimensionnée et mise sous la forme classique suivante :

$$-u_{tt}(x, t) + a(x, t)u_{xx}(x, t) + c(x, t)u_x(x, t) + d(x, t)u_t(x, t) + e(x, t)u(x, t) = f(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \forall t \in]0, T[\quad (6.1.2)$$

On parle aussi de problème unidimensionnel en espace puisque $x \in \mathbb{R}$.

Si la fonction u est définie sur $(\Omega \subset \mathbb{R}^n) \times [0, T]$, on définit une EDP hyperbolique linéaire par

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (6.1.3)$$

où l'opérateur différentiel \mathcal{L} est défini par :

$$\mathcal{L}u = -\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{i=1, j=1}^n a_{ij}(x, t)u_{x_i x_j}(x, t) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t)u_{x_i}(x, t) + c(x, t)u(x, t) \quad (6.1.4)$$

On suppose le plus souvent que les valeurs propres de la matrice $A = a_{ij}$ qui sont toutes non nulles et de même signe.

6.2 Origine des équations de propagation d'ondes

6.2.1 Vibrations mécaniques dans les milieux continus

6.2.1.a Conservation de la quantité de mouvement

Comme nous l'avons vu dans la section 3.1, la conservation de la quantité de mouvement conduit à l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{Dv(x, t)}{Dt} = \rho \gamma(x, t) = \mathbf{f} + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \sigma, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in]0, T[\quad (6.2.1)$$

où :

- $d = 1, 2, 3$ est la dimension en espace du problème
- $v(x, t) : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ est la vitesse eulérienne,
- $\gamma(x, t) : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'accélération,
- $\mathbf{f}(x, t) : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ la source d'effort volumique comme la pesanteur par exemple,
- $\sigma(x, t) : \mathbb{R}^d \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ le tenseur du second ordre des contraintes de Cauchy.

Une famille d'équation de propagation d'ondes est obtenue à partir des équations du mouvement en considérant les hypothèses suivantes :

1. L'hypothèse des petites perturbations, qui traduit une faible déformation autour de la position d'équilibre et un faible mouvement. Cette hypothèse a pour effet que l'on confonde les configurations de références et actuelles, et donc les descriptions eulériennes et lagrangiennes. Les inconnues du problème sont donc exprimées en termes de variables lagrangiennes.
2. L'hypothèse d'une mesure des déformations linéaires. La déformation $\varepsilon(X, t) : \mathbb{R}^d \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ est alors définie à partir du déplacement $u(X, t)$ de la façon suivante :

$$\varepsilon(X, t) = \frac{1}{2} (\nabla u(X, t) + \nabla^T u(X, t)) = \nabla_S u(X, t) \quad (6.2.2)$$

3. Enfin, on suppose que le milieu a un comportement linéaire, soit :

$$\sigma(X, t) = K(X, t) \bar{\otimes} \varepsilon(X, t) \quad (6.2.3)$$

où $K(X, t)$ est l'opérateur de rigidité.

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\rho \frac{d^2 u(X, t)}{dt^2} - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} (K(X, t) \bar{\otimes} \nabla_S u(X, t)) = \mathbf{f} \quad (6.2.4)$$

Si l'on considère le cas unidimensionnel ($d = 1$) homogène, on obtient :

$$\rho \frac{d^2 u(X, t)}{dt^2} - k \Delta u(X, t) = \mathbf{f} \quad (6.2.5)$$

et donc une EDP hyperbolique.

6.2.1.b Équation des cordes vibrantes et des poutres

Nous allons considérer dans ce paragraphe des illustrations classiques de l'équation de propagation d'ondes mécaniques dans les solides unidimensionnels.

L'équation du mouvement des barres en traction-compression Considérons une barre rectiligne et homogène de longueur L et de section S . On notera par $u(x, t)$ le déplacement d'une section de cette barre. L'effort normal dans la barre, c'est à dire l'intégrale de la contrainte de Cauchy sur une section dans la direction longitudinale, sera noté $N(x, t)$. Les équations du mouvement de la barre sont données par

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial x} = N_{ext}, \quad x \in]0, L[, t \in]0, T[\quad (6.2.6)$$

Si on considère une loi de comportement linéaire donnée par la loi de Hooke (élasticité linéaire),

$$\frac{N}{S} = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.2.7)$$

où E est le module d'Young du matériau, on obtient une équation hyperbolique linéaire de propagation des ondes élastiques dans la barre :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = N_{ext} \quad (6.2.8)$$

L'équation du mouvement des barres en torsion De la même manière, en supposant que les sections restent planes dans leur mouvement, on peut considérer l'équation du mouvement en torsion des barres. Soit $\theta(x, t)$ l'angle de torsion et $\Gamma(x, t)$ le couple de torsion, l'équation du mouvement de torsion s'écrit :

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \Gamma_{ext}, \quad x \in]0, L[, t \in]0, T[\quad (6.2.9)$$

où I_θ est l'inertie de torsion de la barre. De la même façon que précédemment, une loi de comportement linéaire,

$$\Gamma = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (6.2.10)$$

où G est le module de torsion et J l'inertie géométrique de la section conduit à l'équation du mouvement de torsion :

$$I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \Gamma_{ext}, \quad x \in]0, L[, t \in]0, T[\quad (6.2.11)$$

L'équation du mouvement des poutres en flexion Dans le cas des poutres en flexion, les équations du mouvement ne sont plus aussi simples. Il faut en effet considérer la flèche $v(x, t)$ de la poutre et la pente $\alpha(x, t)$ que fait la poutre avec son axe de symétrie. Cela conduit aussi système couplé suivant :

$$\begin{cases} \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial T}{\partial x} = T_{ext}, & x \in]0, L[, t \in]0, T[\\ \rho I_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial M}{\partial x} = T \end{cases} \quad (6.2.12)$$

où $T(x, t)$ et $M(x, t)$ sont respectivement l'effort tranchant et le moment de flexion dans la poutre et I_α est l'inertie de flexion de la poutre. En supposant des comportements linéaires, on obtient un système couplé de propagation d'ondes. Une autre hypothèse est souvent faite sur la cinématique de la déformation conduit aux poutres de Bernoulli. On suppose que

$$\alpha(x, t) = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.2.13)$$

qui conduit alors à une équation aux dérivées partielles du type :

$$\rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = T_{ext}, \quad (6.2.14)$$

6.2.1.c L'équation des cordes vibrantes

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à un cas particulier de l'équation de poutres en flexion qui est l'équation des cordes vibrantes. Pour cela, de nouvelles hypothèses sont faites. En particulier, on suppose que l'effort normal varie peu dans la corde et reste égale à un effort extérieur imposé N_{ext} et que les effets de la pesanteur sont négligeables. Sous ces hypothèses, l'équation des cordes vibrantes prend la forme :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad x \in]0, L[, t \in]0, T[\quad (6.2.15)$$

avec $C = \sqrt{\frac{N_{ext}}{\rho}}$ qui est la célérité des ondes dans la corde.

Dans les paragraphes suivants, nous donnons deux autres adaptations de l'équation du mouvement des phénomènes de propagation d'ondes bien particuliers.

6.2.2 Acoustique

Les équations de l'acoustique linéaire conduisent à des équations de propagation de type hyperbolique. La grandeur intéressante pour décrire les propagation d'ondes acoustiques est l'écart de pression par rapport à une pression moyenne, que l'on note $p(x, y, z)$.

Sans entrer dans les détails, les équations de l'acoustique sont déduites de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en supposant de plus que :

- l'écoulement est adiabatique
- l'hypothèse des petites perturbation est vérifiée, ce qui permet de linéarise la pression autour de la pression moyenne
- l'entropie du milieu reste constante (phénomène réversible)

Grâce a cet ensemble d'hypothèses, l'équation de propagation des ondes acoustiques s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, t \in]0, T[\quad (6.2.16)$$

où $c = \sqrt{\gamma r T_0}$ est la vitesse des ondes acoustiques dans le milieu.

6.2.3 Ondes électromagnétiques dans le vide

$$\begin{cases} \Delta E - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta B - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (6.2.17)$$

ε_0 permittivité du vide, μ_0 perméabilité magnétique.

6.2.1 Note de Rédaction

- Terminer la rédaction
- Donner l'exemple des ondes planes monochromatique.

6.3 Propriétés

6.3.1 Solution de D'Alembert

Construction de la solution Pour établir la solution de D'Alembert de l'équation hyperbolique homogène suivante,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \quad (6.3.1)$$

on effectue le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \eta = x + ct \\ \xi = x - ct \end{cases} \quad (6.3.2)$$

Ce changement de variables, conduit aux relations suivantes sur les dérivées :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}, & \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right), & \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \end{cases} \quad (6.3.3)$$

L'équation (6.3.1) devient alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (6.3.4)$$

Si l'on considère que cette équation est posée pour \mathbb{R} entier et que les solutions et les dérivées sont nulles à l'infini, l'équation (6.3.4) peut être facilement intégrée de la façon suivante :

$$\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} = f_1(\xi) \quad (6.3.5)$$

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad (6.3.6)$$

où f est la primitive de f_1 .

On constate donc qu'une solution sur le domaine non bornée $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se met sous la forme :

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (6.3.7)$$

où f et g sont deux fonctions arbitraires que l'on suppose au moins deux fois continûment différentiables¹. On parle pour cette forme de solution de *solution de D'Alembert*.

Interprétation physique de cette solution Les propriétés remarquables suivantes de la solution de D'Alembert peuvent être notées :

- De la même manière que pour les équations transport, la solution fait apparaître la propagation à une célérité c d'une onde qui peut se décomposer comme :
 1. une onde progressive $f(x - ct)$ se propageant avec une célérité c vers les x positifs.
 2. une onde régressive $g(x + ct)$ se propageant avec une célérité c vers les x négatifs.
- On constate de plus que toute les ondes se propagent à la même célérité. Ceci est caractéristique de l'équation d'ondes du second ordre. Pour un milieu dispersif, par exemple si on ajoute un terme de dispersion $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ comme dans l'équation de KdV, on constate que les ondes ne propagent pas à la même vitesse suivant leurs amplitudes et leurs formes.

¹Cette condition de différentiabilité assure la régularité des solutions en u . Comme souvent pour les systèmes hyperboliques, il est intéressant de considérer des solutions faibles sous forme de distributions ou ces conditions peuvent être relaxées.

– Le détermination de la forme des ondes, c'est à dire le choix des fonctions f et g est réalisée par la donnée des conditions initiales comme nous allons le voir dans la prochaine partie.

(RENARDY & ROGERS, 1993, p.30) (EUVRARD, 1994, p.78)

6.3.2 Le problème de Cauchy et la condition initiale

On introduit le problème dit de Cauchy des équations hyperboliques :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u^0(x), x \in \mathbb{R} \\ \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v^0(x), x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (6.3.8)$$

Le problème de Cauchy fait clairement référence au problème de Cauchy des EDO pour lesquelles on applique une condition initiale. Pour un problème du second ordre, cette condition initiale précise la valeur de la fonction et de sa dérivée en temps.

En s'appuyant sur le solution de D'Alembert (6.3.7), les conditions initiales conduisent à :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = u^0(x) \\ c(f'(x) + g'(x)) = v^0(x) \end{cases} \quad (6.3.9)$$

en intégrant la seconde équation en espace, on obtient :

$$c(f(x) + g(x)) = \int_0^x v^0(s) ds + cK \quad (6.3.10)$$

d'où la détermination de f et g par rapport aux conditions initiales :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2} \left[u^0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x v^0(s) ds + K \right] \\ g(x) = \frac{1}{2} \left[u^0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x v^0(s) ds - K \right] \end{cases} \quad (6.3.11)$$

La solution complète du problème est donc donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [u^0(x + ct) + u^0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v^0(s) ds \quad (6.3.12)$$

6.3.3 Domaine de dépendance, d'influence et de détermination

Comme on l'a dit précédemment la solution est constituée de deux ondes qui propagent les fonctions, et donc les conditions initiales à une célérité c . La remarque suivante peut donc être faite : la solution en un point $M(x, t)$ du demi-plan $t > 0$ est déterminée par seulement une partie des données sur le bord du demi plan. Plus précisément, La solution en M est déterminée par la donnée de

1. $u^0(x)$ au point $A(x - ct, 0)$ et au point $B(x + ct, 0)$
2. $v^0(x)$ sur le segment $[A, B]$

La figure 6.1 illustre cette propriété.

Du point de vue de la condition initiale, on voit que cette condition est transportée à la célérité c . Sur la figure 6.1, on a représenté par des régions hachurées les régions où la solution dans le demi-plan $t > 0$ dépend des conditions initiales imposées sur le segment $[A, B]$. On constate qu'en dehors de ces régions que

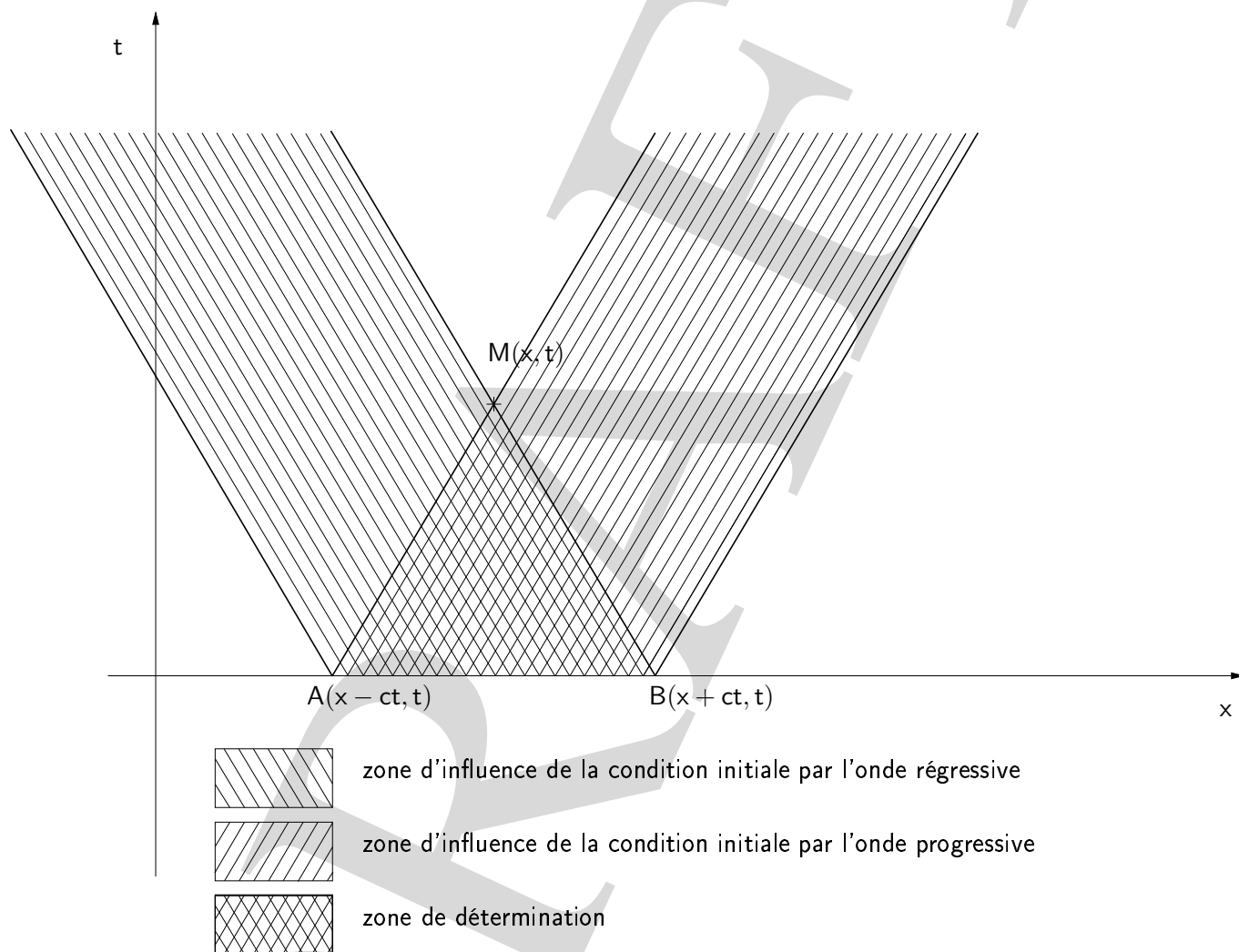


FIG. 6.1 – Domaine d'influence et de détermination

la condition initiale n'influe pas sur la solution. Ceci est une grande différence avec les opérateurs elliptiques et paraboliques. En particulier, si on change les conditions initiales sur $[A, B]$, on ne change pas les valeurs de la solution en dehors des zones hachurées.

(COURANT & HILBERT, 1962, p. 438)

6.3.4 Le problème des conditions aux limites en espace.

Tout comme pour les équations de transport, les droites $x \pm ct = cste$ sont les caractéristiques de l'équation hyperbolique. On vient de voir qu'elles transportent les conditions initiales du problème. De même les conditions aux limites données pour $x = 0$ vont être transportées par les droites caractéristiques. D'une manière plus générale, les conditions imposées à la solution $u(x, t)$ sur une courbe $\Gamma(x, t)$ vont être transportées. Il vient alors des questions de compatibilités des conditions aux limites et des conditions initiales aux intersections des domaines d'influence de chacune. En cas d'incompatibilité, des solutions moins régulières devront être définies en ajoutant des conditions de raccord, si besoin, entre les domaines.

6.3.4.a Réflexion des ondes

6.3.1 Note de Rédaction

Traiter le problème de la réflexion simple pour une condition aux limites du type $u(x = 0, t) = 0$, puis $u(x = 0, t) = 0$ et $u(x = 1, t) = 0$

(SCHWARTZ, 1965, p. 438)

6.3.4.b Un exemple de conditions mixtes

Considérons dans ce paragraphe un exemple où on impose des conditions mixtes sur des courbes du plan, x, t . Les points A, B, C sont définis comme sur la figure 6.2 et on définit les conditions suivantes :

$$\begin{cases} u(x, t) = 0, \forall x \in [O, A], \\ u(x, t) = x - 1, \forall x \in [A, B], \\ u(x, t) = x, \forall x \in [O, C] \end{cases} \quad (6.3.13)$$

Repartons de la solution de D'Alembert, $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$ et tâchons de déterminer les formes des ondes, c'est à dire les fonctions f et g en fonction des conditions (6.3.13) :

1. La première condition aux limites revient $u(x, t) = 0$, sur $\Gamma = [O, A] = \{x = ct, (x, ct) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$ soit

$$\forall x \in [0, 1], f(2x) = -g(0) \quad (6.3.14)$$

En choisissant, $s = 2x$ comme abscisse curviligne de Γ , on obtient :

$$\forall s \in [0, 2], f(s) = -g(0), \quad (6.3.15)$$

2. La seconde condition aux limites revient $u(x, t) = x - 1$, sur $\Gamma = [A, B] = \{x = ct, (x, ct) \in [1, 2] \times [1, 2]\}$ soit

$$\forall x \in [1, 2], f(2x) + g(0) = x - 1 \quad (6.3.16)$$

En choisissant, $s = 2x$ comme abscisse curviligne de Γ , on obtient :

$$\forall s \in [2, 4], f(s) = -g(0) + \frac{s}{2} - 1 \quad (6.3.17)$$

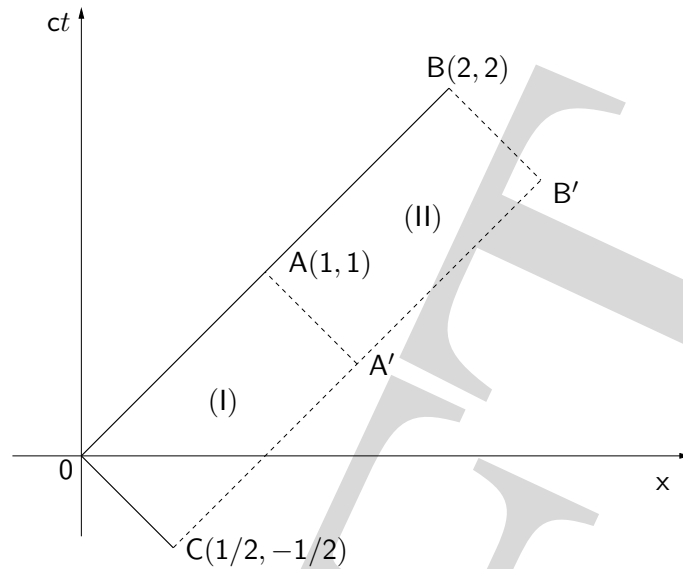


FIG. 6.2 – Un exemple de conditions mixtes

3. La troisième condition aux limites revient $u(x, t) = x$, sur $\Gamma = [O, C] = \{x = -ct, (x, ct) \in [0, 1/2] \times [0, -1/2]\}$ soit

$$\forall x \in [0, 1/2], f(0) + g(2x) = x \tag{6.3.18}$$

soit

$$\forall s \in [0, 1], g(s) = -f(0) + \frac{s}{2} \tag{6.3.19}$$

Les conditions (6.3.16) et (6.3.19) imposent d'une part que $f(0) = -g(0)$ et d'autre part en appliquant $s = x + ct$ dans la première condition et $s = x - ct$ dans la troisième le système suivant :

$$\begin{cases} f(x + ct) = -g(0), x + ct \in [0, 2] \\ g(x - ct) = -f(0) + \frac{x-ct}{2}, x - ct \in [0, 1] \end{cases} \tag{6.3.20}$$

soit, dans la région (I) sur la figure,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(x - ct), \tag{6.3.21}$$

De la même manière, en appliquant $s = x + ct$ dans la deuxième condition et $s = x - ct$ dans la troisième, on obtient dans la région (II) sur la figure,

$$u(x, t) = (x - 1), \tag{6.3.22}$$

Conclusions et remarques

1. La solution est complètement déterminée sur les régions (I) et (II) qui correspondent aux zones de recouvrement des conditions mixtes.
2. Sur le segment $[A, A']$, les deux solutions coïncident. Par contre, les gradients sont égaux à $\nabla u = [1/2, -1/2]^T$ dans (I) et $\nabla u = [1, 0]^T$ dans (II). On constate donc que la non régularité des conditions aux limites est propagée dans tout le domaine. Contrairement aux opérateurs elliptiques et paraboliques, l'opérateur hyperbolique n'est pas régularisant. Dans le cas du problème de Cauchy, si $u^0 \in C^k$ et $v^0 \in C^{k-1}$, alors la solution est C^k dans la zone de détermination.

6.3.5 Conservation de l'énergie

Considérons un problème unidimensionnel générique posé sur un segment $[0, L]$:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \in]0, L[, t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), x \in]0, L[\\ \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v^0(x), x \in]0, L[\end{cases} \quad (6.3.23)$$

avec les différents type de conditions aux limites :

– Dirichlet :

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \quad t > 0 \quad (6.3.24)$$

– Neumann :

$$u_x(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0 \quad t > 0 \quad (6.3.25)$$

– Mixte Neumann-Dirichlet

$$u(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0 \quad t > 0 \quad (6.3.26)$$

Définissons l'énergie totale $E(t)$ comme l'intégrale suivante :

$$E(t) = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} u_t^2 + u_x^2 \right) dx \quad (6.3.27)$$

et montrons que cette énergie est conservée, i.e., $\frac{dE(t)}{dt} = 0$

Multiplions l'équation hyperbolique par u_t et intégrons par rapport a la variable d'espace x :

$$\int_0^L \frac{1}{c^2} u_{tt} u_t dx = \int_0^L u_{xx} u_t dx \quad (6.3.28)$$

soit

$$\int_0^L \frac{1}{2c^2} \frac{\partial u_t^2}{\partial t} dx = \int_0^L u_{xx} u_t dx \quad (6.3.29)$$

Intégrons maintenant par parties le second membre de l'équation

$$\int_0^L u_{xx} u_t dx = [u_t u_x]_0^L - \int_0^L u_{tx} u_x dx \quad (6.3.30)$$

$$= [u_t u_x]_0^L - \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} u_x^2 dx \quad (6.3.31)$$

$$(6.3.32)$$

Le terme entre crochet est directement annulé pour des conditions de Neumann. Pour des conditions de Dirichlet, il convient de noter quelles sont valables pour tout $t > 0$, ce qui entraîne que $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$, on obtient donc :

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2} u_x^2 dx = \frac{d}{dt} \int_0^L \frac{1}{2c^2} u_t^2 dx \quad (6.3.33)$$

$$(6.3.34)$$

On peut donner par exemple pour l'équation des cordes vibrantes un signification physique aux termes de l'énergie totale. Considérant que $\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{N}$, le terme,

$$E_c(t) = \int_0^L \frac{1}{2} \rho u_t^2 \quad (6.3.35)$$

représente l'énergie cinétique de la corde et le terme

$$E_p(t) = \int_0^L \frac{1}{2} N u_x^2 \quad (6.3.36)$$

l'énergie potentielle élastique de la corde.

Unicité et continuité par rapport aux conditions initiales Comme pour l'équation de la chaleur, la conservation de l'énergie permet de démontrer l'unicité des solutions et la continuité par rapport aux conditions initiales.

(EUVRARD, 1994, p. 89) Seconde démonstration de (RENARDY & ROGERS, 1993, p.32)

6.4 Méthodes de résolution

6.4.1 Méthodes de séparation de variables

(RENARDY & ROGERS, 1993, p.29)

On va envisager un cas particulier d'équation hyperbolique pour $D^+ = (\Omega \subset \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$ avec Ω borné :

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad \forall (x, t) \in D^+ \quad (6.4.1)$$

pour laquelle on va chercher une solution par séparation des variables :

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (6.4.2)$$

On obtient aisément l'égalité suivante si $u \neq 0$:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (6.4.3)$$

soit

$$\begin{cases} T''(t) - c^2 \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} T(t) = C e^{c\sqrt{\lambda}t} + D e^{-c\sqrt{\lambda}t} \\ X(x) = C' e^{\sqrt{\lambda}x} + D' e^{-\sqrt{\lambda}x} \end{cases} \quad (6.4.4)$$

On obtient donc une solution générale une équation de la forme :

$$u(x, t) = (C e^{c\sqrt{\lambda}t} + D e^{-c\sqrt{\lambda}t}) (C' e^{\sqrt{\lambda}x} + D' e^{-\sqrt{\lambda}x}) \quad (6.4.5)$$

Afin de préciser les solutions de l'EDP hyperbolique (6.4.1), il convient d'envisager des conditions aux limites. Nous allons envisager un domaine borné D^+ de la forme

$$D^+ = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < x < 1, 0 < t < \infty\} \quad (6.4.6)$$

Conditions de Dirichlet Les conditions aux limites de Dirichlet s'écrivent :

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (6.4.7)$$

Concernant la condition initiale, il convient d'imposer à la fois $u(x, 0)$ mais aussi $u_t(x, 0)$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = v^0(x), \quad \forall x \in]0, 1[\quad (6.4.8)$$

Comme pour le cas de l'équation de la chaleur, les conditions aux limites imposent la condition suivante sur λ :

$$\lambda = -n^2 \pi^2, n \in \mathbb{N} \quad (6.4.9)$$

Dans notre cas, la famille de solution se réduit donc à :

$$u(x, t) = (A \cos(n\pi ct) + B \sin(n\pi ct)) \sin(n\pi x) \quad (6.4.10)$$

et sous réserve de convergence de la série, on peut envisager une solution générale de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)) \sin(n\pi x) \quad (6.4.11)$$

Il convient des lors de respecter les conditions initiales. Une fois de plus, on considère un développement en série de Fourier des conditions initiales :

$$u^0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin k\pi x, \quad a_k = 2 \int_0^1 u(s) \sin(k\pi s) ds \tag{6.4.12}$$

$$v^0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\pi x, \quad b_k = 2 \int_0^1 v(s) \sin(k\pi s) ds \tag{6.4.13}$$

$$\tag{6.4.14}$$

Pour effectuer l'identification des constantes A_n et B_n , nous pouvons effectuer la dérivation de (6.2.16) et appliquer les développements. Pour la condition initiale $u(x, 0) = u^0(x)$, on obtient :

$$u(x, 0) = u^0(x) \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(n\pi x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin k\pi x \rightarrow A_n = a_n \tag{6.4.15}$$

En supposant que la série est dérivable terme à terme ², on écrit

$$u_t(x, 0) = v^0(x) \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c B_n \sin(n\pi x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k\pi x \rightarrow B_n = \frac{b_n}{n\pi c} \tag{6.4.16}$$

On obtient donc une solution de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n\pi x) \left[a_n \cos(n\pi ct) + \frac{b_n}{n\pi c} \sin(n\pi ct) \right] \tag{6.4.17}$$

Mise en garde d'ordre mathématique La résolution qui a été faite par séparations doit être utilisées avec précaution. En effet, pour pouvoir utiliser la série de sinus (ou de cosinus) des hypothèses sur la parité de la fonction et on considère en réalité une fonction périodique \tilde{u} qui prolonge u sur \mathbb{R} . Cette fonction respecte l'équation des ondes pour $x \in \mathbb{R}$. Dans notre cas, on impose uniquement des conditions de Dirichlet sur u , qui doivent être satisfaites par la condition initiale. La fonction \tilde{u} peut alors avoir des discontinuités qui vont se propager suivant les droites caractéristiques ($x - ct = \text{Cste}$ et $x + ct = \text{Cste}$) émanant des points d'abscisse n . Ces lignes de discontinuités nous de \tilde{u} et donc de u ne peuvent pas être prise en compte directement par des solutions sous forme de série. Il faut envisager un autre concept de solutions : solutions faibles.

Dans le cas où on impose une régularité plus forte aux conditions initiales et à leur prolongement, la solution par séparation des variables peut être envisager. Sinon, cette solution est une solution forte entre les droites $x \pm ct = \text{Cste}$.

6.4.1 Note de Rédaction

Une illustration numérique serait bienvenue

Un lien avec les systèmes hyperboliques du premier ordre aussi

A partir de la solution de D'Alembert Une autre solution, plus élégante consiste à se servir de la solution de D'Alembert (6.3.7)³. Pour cela, on utilise la formule trigonométrique,

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \tag{6.4.18}$$

²Condition de dérivation sous le signe \sum ?

³Nécessite peut être de prolonger la solution de façon périodique sur \mathbb{R}

qui donne avec (6.2.17) :

$$\frac{1}{2} [u^0(x+ct) + u^0(x-ct)] = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin(k\pi x) \cos(k\pi ct) \quad (6.4.19)$$

De la même manière, nous déduisons que

$$\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v^0(\xi) d\xi = \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{b_k}{k\pi} [\cos(k\pi(x+ct)) - \cos(k\pi(x-ct))] \quad (6.4.20)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{k\pi c} \sin(k\pi x) \sin(k\pi ct) \quad (6.4.21)$$

En reportant dans (6.3.7) les deux expressions, on obtient :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k\pi x) \left[a_k \cos(k\pi ct) + \frac{b_k}{k\pi c} \sin(k\pi ct) \right] \quad (6.4.22)$$

Conditions de Neumann Les conditions aux limites de Neumann s'écrivent :

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0, \quad \forall t > 0 \quad (6.4.23)$$

Concernant la condition initiale, une fois de plus, il convient d'imposer, à la fois $u(x, 0)$ mais aussi $u_t(x, 0)$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad u_t(x, 0) = v^0(x), \quad \forall x \in]0, 1[\quad (6.4.24)$$

On peut montrer facilement que la solution qui respectent les conditions de Neumann peut s'écrire :

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\pi x) \left[a_n \cos(n\pi ct) + \frac{b_n}{n\pi c} \sin(n\pi ct) \right] \quad (6.4.25)$$

où les a_n et b_n correspondent à la décomposition en cosinus de Fourier des conditions initiales.

Interprétation : modes propres Les termes successifs de la série (6.3.2) sont appelés *modes propres* du domaine considéré. Les valeurs discrètes $\omega_k = k\pi c$ pour lesquelles le problème a une solution qui réponds aux conditions aux limites sont appelées *Pulsations propres*. On définit naturellement les fréquences propres par $f_k = \frac{1}{2}kc$ et les périodes propres par $T_k = 2/kc$.

La formule (6.3.2) exprime que la solution peut être donnée par une somme infinie de modes propres. Cette approche est au cœur de l'*analyse modale* ou *analyse harmonique*. On parle aussi pour (6.3.2) de décomposition modale.

Illustration sur les modes propres de poutre encastrée libre Considérons à nouveau l'équation de poutre en traction-compression (6.2.6)

6.4.2 Note de Rédaction

Illustration modes propres de Poutres en traction-compression. Modes Encastrée libre. voir (LANNE *et al.*, 1992)

6.4.2 Solutions fondamentales et fonctions de Green

(RENARDY & ROGERS, 1993, p. 158)

DRAFT

6.4.3 Problèmes aux valeurs propres. Modes propres et analyse modale

On présente dans cette partie une méthode de résolution des équations hyperboliques en domaine borné appelée l'analyse modale ou encore la méthode des harmoniques. Cette approche généralise la méthode de séparation de variables présentée dans la partie 6.4.1 pour un domaine, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ borné et limité par une surface $\Gamma = \partial\Omega$ fermée et suffisamment régulière.

On appelle une solution stationnaire de l'équation hyperbolique suivante,

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - \Delta_x u = 0, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (6.4.26)$$

une solution de la forme

$$u(x, t) = U(x)V(t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (6.4.27)$$

Pour une telle forme de solution, l'équation (6.4.26) devient

$$\frac{\Delta_x U}{U} = \frac{V''(t)}{V} = \lambda \in \mathbb{R} \quad (6.4.28)$$

soit

$$\begin{cases} \Delta_x U(x) - \lambda U(x) = 0 \\ V''(t) - \lambda c^2 V(t) = 0 \end{cases} \quad (6.4.29)$$

On reconnaît ici le même type de problème que celui résolu par la méthode de séparation des variables.

On définit maintenant des conditions Dirichlet homogènes sur le bord du domaine sous la forme

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, t \in [0, T] \quad (6.4.30)$$

qui se traduisent par

$$U(x) = 0, \quad x \in \Gamma \quad (6.4.31)$$

pour une solution non triviale, $V(t) \neq 0$.

Comme pour le problème unidimensionnel, ces conditions aux limites n'autorisent que des valeurs exceptionnelles pour λ . Ce résultat est précisé dans le théorème suivant dit le théorème de Dirichlet.

Théorème 6.4.1 (Théorème de Dirichlet) Le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta_x U(x) - \lambda U(x) = 0 & x \in \Omega \\ U(x) = 0 & x \in \Gamma \end{cases} \quad (6.4.32)$$

n'admet que la solution nulle sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de λ strictement négatives,

$$\lambda_k = -\omega_k^2, \quad k \in \mathbb{N} \quad (6.4.33)$$

Pour chacune de ces valeurs, λ_k , le problème (6.4.32) admet une nombre fini, $p(k) \in \mathbb{N}^*$ de solutions linéairement indépendantes, notée $U_{k,p(k)}$ qui appartient à $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

□

Modes et pulsation propres

Définition 6.4.1 On désigne par modes propres les solutions $U_{k,p(k)}$ de norme 1 dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$ correspondants à $\lambda_k = -\omega_k^2$ telle que les U_{pk} pour $k \in \mathbb{N}$ et $j = 1, \dots, p(k)$ soient deux à deux orthogonales dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Les modes propres forment alors une base hilbertienne des fonctions de $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Les valeurs ω_k sont appelées les pulsations propres du système. □

On rappelle que l'espace $\mathcal{L}^2(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions f de carré sommable, c'est à dire mesurables et telles que

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty. \quad (6.4.34)$$

L'espace $\mathcal{L}^2(\Omega)$ est un espace hilbertien pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \quad (6.4.35)$$

La norme associée est donnée par

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} f(x)^2 dx \right)^{1/2} \quad (6.4.36)$$

Les modes propres constituent donc une base orthonormée qui vérifie,

1. la normalité

$$\|U_{k,j}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} = 1 \quad k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, p(k) \quad (6.4.37)$$

2. et l'orthogonalité

$$\langle U_{k,j}, U_{l,i} \rangle = 0, \quad \forall i, j, k, l, i \neq j, k \neq l \quad (6.4.38)$$

La résolution de l'équation harmonique

$$V''(t) + \omega_k^2 c^2 V(t) = 0 \quad (6.4.39)$$

conduit a des solutions de la forme

$$V_k(t) = a \cos(c\omega_k t) + b \sin(c\omega_k t). \quad (6.4.40)$$

La forme la plus générale de solutions stationnaires est donc donnée par :

$$u_k(x, t) = \sum_{j=1}^{p(k)} U_{k,j}(x) (a_{k,j} \cos(c\omega_k t) + b_{k,j} \sin(c\omega_k t)). \quad (6.4.41)$$

Décomposition modale Si on considère la donnée des conditions initiales,

$$\begin{cases} u(x, t) = u^o(x), x \in \Omega \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v^o(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (6.4.42)$$

une méthode consiste à rechercher les solutions de l'équation (6.4.26) sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x, t) \quad (6.4.43)$$

en décomposant les conditions initiales sur la base des modes propres,

$$\begin{cases} u^0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{p(k)} U_{k,j}(x) a_{k,j} \\ v^0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{p(k)} U_{k,j}(x) b_{k,j} c \omega_k \end{cases} \quad (6.4.44)$$

Pour calculer les produits scalaires nécessaires à la détermination des coefficients $a_{k,j}$ et $b_{k,j}$ les conditions initiales doivent appartenir à $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Remarque Les valeurs de λ doivent être nécessairement négatives. En effet, la formule de Green nous donne

$$\int_{\Omega} (\nabla U)^2 dx = - \int_{\Omega} \nabla U \cdot U dx = -\lambda \int_{\Omega} U^2 dx \quad (6.4.45)$$

6.4.3 Note de Rédaction

- Exemples :
 - membranes circulaires et des membranes rectangulaires (SCHWARTZ, 1965 ; LALANNE *et al.*, 1992)
 - Sphere ?
- Propriétés : Orthogonalité, décomposition, Résonance ,....

6.5 Application en domaine non borné

(EUVRARD, 1994, Chap. 10)

6.5.1 En Acoustique

6.5.2 En hydrodynamique

6.5.3 Électromagnétisme ?

DRAFT

6.6 Exercices

6.6.1 Exercices sur les cordes vibrantes

pincées et frappées (SCHWARTZ, 1965)

6.6.2 Modes de plaques et de disques

(SCHWARTZ, 1965)

DRAFT