Devoir libre
Modèles mathématiques pour la physique
A rendre le 30/11/2004

Consignes de rédaction :
- Soyez concis et précis. Une part sensible de la note tiendra compte de vos efforts de rédaction.
- Attachez plus d'importance à l'explication du déroulement des calculs plutôt qu'à une simple énumération d'équations.

Exercice 1 : Classement des équations différentielles

On supposera que la fonction u est une fonction scalaire définie sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer le type et mettre sous forme canonique les équations suivantes :

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$
$$x^2\, u_{xx} - y^2\, u_{yy} = 0 \tag{2}$$
$$y^2\, u_{xx} - x^2\, u_{yy} = 0 \tag{3}$$

Exercice 2 : EDP de transport et méthodes des caractéristiques

Considérons l'équation de transport suivante :

$$u_x + u_y = u^3 \tag{4}$$

pour $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et avec les conditions suivantes :

$$u(x,y) = y, x = 0, 0 < y < 3 \tag{5}$$

1. Résoudre cette équation par la méthode des caractéristiques.
2. Quel est le domaine de définition maximum de la solution?
3. Quel interprétation physique peut on donner à la solution sur les bords du domaine de définition?

Exercice 3 : Équation d'advection–diffusion

Considérons l'équation d'advection-diffusion suivante :

$$u_t + cu_x - \nu u_{xx} = 0, t > 0, x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

avec $c \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathbb{R}_+$.

1. Interpréter les différents termes de l'équation. On précisera quel est le type de l'équation dans les cas
   1. $c = 0, \nu > 0$
   2. $c \neq 0, \nu = 0$
   3. $c \neq 0, \nu > 0$.

On suppose que la condition initiale est donnée par la gaussienne centrée :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{7}$$

2. Décrire qualitativement les solutions auxquelles on peut s'attendre dans chaque cas.
3. Résoudre le problème analytiquement. Confirmer les attentes *a priori* de la question 2.
4. Montrer que l'énergie décroît au cours du temps pour une solution nulle à l'infini.