Travaux Pratiques 1
Une première approche de FEMLAB : l'équation de Poisson

Objectifs du TP1 :
- Prendre en main FEMLAB et définir les principales étapes d'une simulation sous FEMLAB
- Vérifier par l'expérimentation numérique les principales propriétés des équations elliptiques.

1 L'équation de Poisson sur le disque unité

Nous allons considérer l'équation de Poisson posée sur le disque unité du plan:

$$\Delta u(x,y) = f(x,y), \forall x \in \Omega, \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{1}$$

La simulation numérique de cette équation sera réalisée en utilisant le mode `PDE modes - Classical PDEs` de FEMLAB .

1.1 Problème de Dirichlet homogène

Pour commencer, considérons des conditions de Dirichlet et un problème homogène. On est conduit à simuler le problème classique de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \forall x \in \Omega \\ u(x,y) = 0, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

1. Réaliser la simulation complète de ce problème sous FEMLAB en identifiant les principales étapes de la modélisation et de la simulation
2. Tracer les solutions obtenues par une isocouleur.
3. Comparer à la solution analytique !!

1.2 Problème de Dirichlet non homogène

Considérons maintenant le problème de Dirichlet non homogène :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), \forall x \in \Omega \\ u(x,y) = 0, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

1. Réaliser la simulation complète de ce problème sous FEMLAB en choisissant une valeur constante pour $f \equiv 1$.
2. Tracer les solutions obtenues par une isocouleur
3. Vérifier que la fonction,
$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{4} \tag{4}$$
est la solution du problème et comparer la aux résultats obtenus.

1.3 Problème mixte de Dirichlet-Neumann homogène

Considérons maintenant le problème mixte de Dirichlet-Neumann homogène :

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, \forall x \in \Omega \\ u(x,y) = 0, \forall x \in \partial\Omega_1 \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial_{\mathrm{N}x}} = 1, \forall x \in \partial\Omega_2 \end{cases} \tag{5}$$

avec

$$\begin{cases} \partial\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \\ \partial\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1, y < 0\} \end{cases} \tag{6}$$

1. Réaliser la simulation complète de ce problème sous FEMLAB
2. Tenter le problème de Neumann pur ...

2 D'autres géométries simples

On pourra considérer les géométries suivantes.

2.1 Le cas d'un anneau

On considère un anneau défini par :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1/2\} \tag{7}$$

On pourra tenter de faire varier les conditions sur le bord intérieur (Neumann ou Dirichlet)

2.2 Le cas du carré unité

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \tag{8}$$

On pourra choisir de résoudre le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = f(x, y), \forall x \in \Omega \\ u(x, y) = 0, \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{9}$$

avec

$$f(x, y) = -2\pi^2 \cos(2\pi x) \sin^2(\pi y) - 2\pi^2 \sin^2(\pi x) \cos(2\pi y) \tag{10}$$

On comparera alors avec la solution analytique :

$$u(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y) \tag{11}$$

2.3 Le cas de deux domaines

On considère deux domaines :

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0, 0 < y < 1\} \tag{12}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < x < 2, 0 < y < 1\}, \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 2, 0 < y < 1\} \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

sur lesquels on pose les équations suivantes :

$$\begin{cases} \nabla(c_1.\nabla u(x, y)) = 1, \forall x \in \Omega_1, u(x, y) = 0, \forall x \in \Gamma_1, \\ \nabla(c_2.\nabla u(x, y)) = 1, \forall x \in \Omega_2, u(x, y) = 0, \forall x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{15}$$

On impose de plus la continuité de la solution sur le frontière commune $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 1, 0 < y < 1\}$

1. Réaliser la simulation complète de ce problème sous FEMLAB
2. Donner une interprétation des champs de vecteurs c_1 et c_2 dans le cas des membranes et des équilibres thermiques.

3 Un problème d'électrostatique

On considérera le problème de champ électrique, E généré par deux conducteurs dans le vide. On rappelle que le champ électrique est donné par :

$$E(x) = -\nabla V(x) \tag{16}$$

où $V(x)$ est le potentiel électrique. On a en particulier que $rot E(x) = 0$. L'équation de Poisson pour une densité de charges ρ s'écrit quant à elle :

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{17}$$

où ε_0 est la permittivité du vide.

Le problème du champ électrique revient donc à résoudre de l'équation de Poisson pour le potentiel électrique $V(x)$ pour $\rho = 0$.

On considérera la géométrie représentée sur la figure 1 et on discutera de l'importance du rapport R/L si on souhaite effectuer cette simulation dans un espace infini.

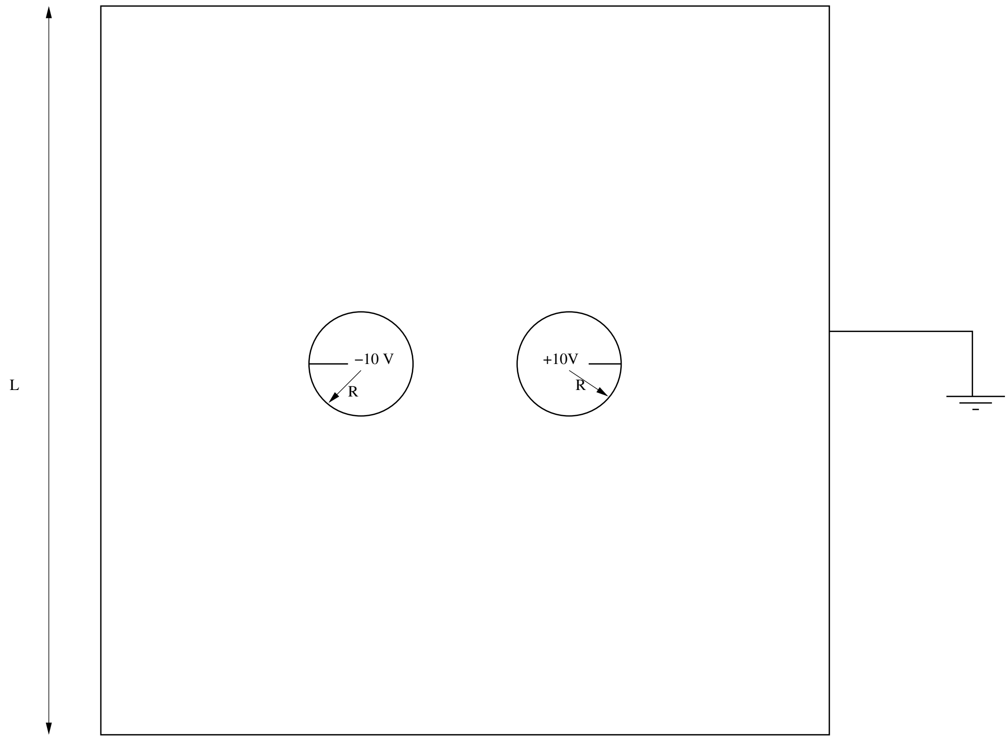

FIG. 1 – *Équation de Poisson en électrostatique*