Travaux Pratiques 2
Équation de diffusion de la chaleur en régime transitoire.

Objectif du TP2 :

- Réaliser une simulation numérique sous FEMLAB d'une équation de diffusion de la chaleur en régime transitoire.
- Étude d'un modèle très simple de disque de freins.

1 L'équation de la chaleur

Nous allons considérer l'équation de la chaleur posée sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$:

$$d_a \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla.(c\nabla u) = f, \forall x \in \Omega \tag{1}$$

La simulation numérique de cette équation sera réalisée en utilisant le mode `PDE modes - Heat Equation` de FEMLAB.

1.1 Problème plan sur un disque avec une source de chaleur surfacique

Commençons par considérer un disque plan de rayon R :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < R\} \tag{2}$$

et sa circonférence :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = R\} \tag{3}$$

On suppose que le disque est homogène. On suppose de plus que le disque est soumis à source de chaleur surfacique constante $f(x, y) = f_0$ et que la température initiale du disque est constante et homogène.

On considérera deux types de conditions aux limites :

1. Le premier type de conditions aux limites reviendra à imposer une température constante sur Γ.
2. Le second type de conditions aux limites reviendra à imposer un flux de chaleur sortant sur Γ.

Questions :

1. Réaliser la simulation complète de ce problème sous FEMLAB en identifiant les principales étapes de la modélisation et de la simulation.

2. Tracer les solutions obtenues par une isocouleur dans le régime transitoire et dans le régime permanent si il est atteint. Interpréter la physique de la solution et des conditions aux limites.

3. Comment aurait on pu simuler directement le régime permanent ? Vérifier votre réponse par une simulation FEMLAB.

4. Pourquoi le second type de conditions aux limites peut être problématique pour atteindre un régime permanent ?

1.2 Problème tridimensionnel

On se place maintenant sur un disque de $\mathbb{R}^3$ d'épaisseur e,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 < R, -e/2 < z < e/2\} \tag{4}$$

et de circonférence :

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = R, -e/2 < z < e/2\} \tag{5}$$

On considérera toujours les deux types de conditions aux limites sur la circonférence Γ. Par contre, on envisagera deux nouveaux types de sources de chaleur et de flux :

1. Dans le premier cas, on supposera que la source de chaleur volumique est nulle et que l'on impose des flux de chaleur surfaciques.
2. Dans le second cas, on supposera que la source de chaleur volumique est constante et que l'on impose pas des flux de chaleur surfaciques mais plutôt une température constante

Questions :

5. Réaliser la simulation complète de ce problème sous FEMLAB en identifiant les principales étapes de la modélisation et de la simulation.

6. Tracer les solutions obtenues par une isocouleur dans le régime transitoire et dans le régime permanent si il est atteint. Interpréter la physique de la solution.

7. Pour quelles type de condition aux limites et pour quelles hypothèses sur l'épaisseur retrouve-t-on la solution dans $\mathbb{R}^2$ du paragraphe précédent ?

2 Échauffement par effet Joule

On considère un modèle simple d'échauffement par effet Joule d'un câble en acier de section carré donné en millimètres par

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 100\} \tag{6}$$

soumis à une différence de potentiel de $100V$ aux extrémités dans le mode dédie `Electromagnatics - Conductive Media DC` :

$$-\nabla.(\sigma\nabla V - J_{ex}) = Q_j \tag{7}$$

On suppose que l'effet Joule est égal à la puissance électrique dissipée dans le fil, soit

$$Q = |J.E| = \frac{1}{\sigma(T)}|J|^2 = \sigma(T)|\nabla V|^2 \tag{8}$$

1. On effectuera dans un premier temps un calcul de thermique découplé en se donnant une valeur caractéristique de Q.
2. On effectuera ensuite une simulation couplée entre thermique et milieux conducteurs en régime transitoire grâce au mode `Heat Transfer - Conduction`. On tachera de trouver le régime stationnaire et d'évaluer l'échauffement de la surface du fil en fonction du potentiel électrique imposé et du courant dans le fil.

Annexe

On donne dans le tableau suivant les grandeurs et les unités caractéristiques du transfert de chaleur dans l'acier.

Grandeur	Notation	Unité	Valeurs pour l'acier
Conductivité	λ	$[\mathsf{W.m^{-1}.K^{-1}}]$	52
Masse volumique	ρ	$[\mathsf{kg.m^{-3}}]$	7870
Chaleur spécifique	C	$[\mathsf{W.s.kg^{-1}.K^{-1}}]$	$0.133\,\mathsf{W.h.kg^{-1}.K^{-1}}$
Capacité thermique	$\kappa = \rho C$	$[\mathsf{W.s.m^{-3}.K^{-1}}]$	$1045\,\mathsf{W.h.m^{-3}.K^{-1}}$
Diffusivité	$D = \dfrac{\lambda}{\rho C}$	$[\mathsf{m^2.s^{-1}}]$	$19,6.10^{-3}\,\mathsf{m^2.h^{-1}}$

Table 1: Grandeurs et unités caractéristiques du transfert de chaleur dans l'acier