Travaux Pratiques 3
Équation de propagation d'ondes. Régime transitoire et analyse modale.

Objectif du TP3 :

- Réaliser une simulation numérique sous FEMLAB d'une équation de propagation d'ondes en régime transitoire.
- Réaliser un calcul numérique sous FEMLAB des modes propres d'une équation de propagation

1 L'équation de propagation d'ondes en régime transitoire.

Nous allons considérer l'équation de propagation des ondes posée sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$d_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla.(c\nabla u) = f, \forall x \in \Omega \tag{1}$$

La simulation numérique de cette équation sera réalisée en utilisant le mode `PDE modes - Wave Equation` de FEMLAB. Le problème modélisé sera celui de la vibration des membranes. Sachant que u représente le déplacement transversal de la membrane, on donnera un sens physique à d_a et c et f.

1.1 Problème sur un disque plan en régime transitoire

Commençons par considérer un disque plan de rayon R :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < R\} \tag{2}$$

et sa circonférence :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = R\} \tag{3}$$

On suppose que le disque est homogène et dans un premier temps que $f \equiv 0$. On considérera deux types de conditions aux limites :

1. Le premier type de conditions aux limites reviendra à imposer un déplacement nul Γ.
2. Le second type de conditions aux limites reviendra à laisser libre la membrane sur les bords.

On pourra choisir pour conditions initiales une surface de révolution basée sur une sinusoïde et une vitesse nulle. On pourra faire varier le nombre de période de la sinusoïde.

Questions :

1. Réaliser la simulation complète de ce problème sous FEMLAB en identifiant les principales étapes de la modélisation et de la simulation.

2. Atteint t-on un régime permanent ? Que faudrait-il ajouter pour atteindre un régime permanent ? Dans ce cas, comment aurait on pu simuler directement le régime permanent ? Vérifier votre réponse par une simulation FEMLAB. Pourquoi le second type de conditions aux limites peut être problématique pour atteindre un régime permanent ?

4. La forme de la condition initiale est elle conservée dans le temps? Le mouvement est il périodique?

1.2 Problème plan sur un carré en régime transitoire

Commençons par considérer un carré de coté 2 :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \tag{4}$$

et ses cotés :

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = -1, -1 < y < 1\} && (5)\\
\Gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 1, -1 < x < 1\} && (6)\\
\Gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 1, -1 < y < 1\} && (7)\\
\Gamma_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = -1, -1 < x < 1\} && (8)
\end{aligned}$$

On considère la condition aux limites suivante : la membrane est fixée sur Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4. On choisira la condition initiale suivante :

$$u^0(x,y) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{(2l+1)\pi y}{2}\right), \quad k,l \in \mathbb{N} \tag{9}$$

$$u_t^0(x,y) = 0 \tag{10}$$

Questions :

5. Réaliser la simulation complète de ce problème sous FEMLAB en identifiant les principales étapes de la modélisation et de la simulation.

6. Le mouvement est il périodique ? Quelle est la valeur de la période suivant le choix de k et l ?

On considère la condition aux limites suivante : la membrane est fixée sur Γ_1 Γ_2 et Γ_3 et libre sur Γ_4. On choisira les conditions initiales suivantes :

$$u^0(x,y) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{(2l+1)\pi(y+1)}{4}\right) \quad k,l \in \mathbb{N} \tag{11}$$

$$u_t^0(x,y) = 0 \tag{12}$$

Questions :

7. Mêmes questions (5 et 6)

2 Calcul des modes propres d'une équation de propagation des ondes.

On traitera la questions suivantes sur les exemples précédents du disque et du carré.

Questions :

8. Calculer les 10 premiers modes propres de la membrane.

9. Appliquer une force volumique sinusoïdale et mettre en évidence les phénomènes de résonance.