Travaux Pratiques 4
Une équation non linéaire.
L'équation de Korteweg-de Vries et les solitons

Objectif du TP4 :

- Réaliser une simulation numérique sous FEMLAB d'une équation non linéaire dans le mode `PDE modes - PDE, General form`.
- Étudier les propriétés d'un modèle particulier non linéaire.

On rappelle que le mode `PDE modes - PDE, General form` prend en compte un système d'EDP de la forme suivante :

$$\begin{cases} d_a \dfrac{\partial u}{\partial t} + \nabla.\Gamma = F \text{ sur } \Omega \\ n_x.\Gamma = G - \dfrac{\partial R}{\partial u}^T \mu \text{ sur } \partial\Omega \\ R = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où les fonctions Γ, F, G et R sont des fonctions des variables indépendantes, des variables dépendantes, u et des leurs dérivées.

1 L'équation de Korteweg-de Vries et les solitons

L'équation de Korteweg-de Vries modélise un phénomène de vagues bien particulier, qui se propagent sans changer de forme, ni perdre d'énergie : il s'agit des solitons. De tels phénomènes sont observés naturellement comme par exemple les vagues solitaires produites par les écluses et les péniches dans les canaux; les mascarets qui se produisent dans la Garonne ou dans la Seine en sont des exemples typiques.

Un modèle simple d'écoulement en eau peu profonde (grand rapport en la profondeur et les dimensions horizontales du domaine) est donné par le modèle de "Saint Venant" (Shallow water) qui est déduit des équations de Navier–Stokes. Dans le cas unidimensionnel, il est donné par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} + \dfrac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{g}{\rho}\dfrac{\partial h}{\partial x} \end{cases} \tag{2}$$

où

- $h(x,t)$ est la hauteur de la colonne d'eau
- $u(x,t)$ est la vitesse du fluide supposée constante dans chaque colonne d'eau
- g est la gravité et ρ la masse volumique de l'eau.

Dans ce modèle, l'amplitude de la vague peut être du même ordre de grandeur que la profondeur.

L'équation de KdV et des solitons peut être déduite des équations de Navier Stokes sans viscosité en tenant compte du fait que la profondeur du fluide h est plus petite que l'échelle longitudinale L sur laquelle se produit le phénomène mais pas trop (c'est $\delta = L/h \approx 10$)), et que l'amplitude de la vague est plus petite que la profondeur ($\epsilon = A/h \approx 0$). On obtient alors l'équation de Korteweg–de Vries adimensionnée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (1 + \frac{3}{2}\epsilon)u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\delta^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{3}$$

Nous choisirons de simuler le modèle adimensionnel suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{4}$$

dont on connaît une solution analytique pour des conditions aux limites nulles à l'infini. En pratique, nous remplacerons ces conditions par des conditions de périodicité de la solution sur un domaine borné:

$$x \in [-L, L], \quad u(-L,t) = u(L,t) \quad \text{Conditions de périodicité} \tag{5}$$

2 Condition initiale et solution analytique

- **Question 1.** Supposer que la solution u peut se mettre sous la forme $u(x,t) = F(x-ct)$ (Propagation). Quelle équation différentielle ordinaire doit satisfaire F ?
- **Question 2.** Intégrer une fois cette équation en tenant compte des conditions aux limites à l'infini. Montrer que l'équation différentielle ordinaire obtenu peut être mise sous la forme (Multiplier par F') :

$$\frac{dF}{\sqrt{cF^2 - 2F^3}} = dt \tag{6}$$

- **Question 3.** Montrer, soit analytiquement, soit à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, que la solution est :

$$u(x,t) = F(x-ct) = \frac{c}{2\text{ch}^2\,\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)} \tag{7}$$

- **Question 4.** Donner une interprétation physique à cette solution.

On choisira pour conditions initiales dans la suite :

$$u(x,0) = u^0(x) = \frac{2}{\text{ch}^2(x)} \tag{8}$$

3 Simulation d'un modèle adimensionnel

- **Question 5.** Récrire l'équation (4) et les conditions aux limites (5) sous la forme (1). On posera $u_1 = u, u_2 = u_{xx}$.
- **Question 6.** Récrire la condition initiale (8) en termes des variables dépendantes du système (1).
- **Question 7.** Réaliser une simulation sous Femlab.
- **Question 8.** Vérifier numériquement que l'équation (4) vérifie la conservation de la masse[1], i.e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = \text{Cste} \tag{9}$$

- **Question 9.** Vérifier numériquement que l'équation (4) vérifie la conservation de l'énergie[2], i.e.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}u^2\,dx = \text{Cste} \tag{10}$$

4 Interaction de deux solitons.

On peut montrer en réalité qu'un nombre infini de quantités peuvent être conservées par l'équation de KdV (4). En pratique, cela se traduit par l'existence de solutions avec de multiples solitons, qui peuvent interagir sans changer de forme ou d'énergie globale.

- **Question 10.** Choisir une condition initiale avec deux solitons d'amplitude différente et donc se propageant à vitesse différente. Réaliser une étude numérique de leur interaction.

5 Une onde sinusoïdale en condition initiale.

Pour terminer, essayons d'envisager un autre type de conditions initiales.

- **Question 11.** Choisir une condition initiale sinusoïdale centrée en $x = 0$ à $t = 0$. Réaliser la simulation numérique.
- **Question 12.** Observer et interpréter les phénomènes physiques suivants :
  1. Dans une première phase $[0, t_B]$, la pente de l'onde est accentuée. Influence du terme uu_x ?
  2. Dans une seconde phase $[0, nt_B], n \approx 36$, on observe un train de solitons émis et ceci de façon périodique.
  3. Enfin, après un temps de simulation assez long, on obtient un phénomène quasi-périodique où l'on voit réapparaître la fonction sinus.

1. Cela peut se déduire de $u_t + (3u^2 + u_{xx})_x = 0$
2. Cela peut se déduire de $u(u_t + 6uu_x + u_{xxx})) = 0$