UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE AIX-MARSEILLE II
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE DE MARSEILLE

THÈSE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

Discipline : MÉCANIQUE
Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement le 5 janvier 2001

par

Vincent ACARY

CONTRIBUTION A LA MODÉLISATION MÉCANIQUE ET NUMÉRIQUE DES ÉDIFICES MAÇONNÉS

Directeur de thèse :
Michel JEAN

JURY

M.M.	M.	GÉRADIN	Professeur, Joint Research Centre, ISIS, Ispra, Italie	Président
	D.	AUBRY	Professeur, Ecole Centrale Paris, Chatenay Malabry	Rapporteur
	M.	FRÉMOND	Directeur de recherche, LCPC, Paris	Rapporteur
	M.	BOULON	Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble	
	O.	DÉBORDES	Professeur, Université d'Aix-Marseille II, ESM2	
	M.	FLORENZANO	Directeur de recherche CNRS, GAMSAU Marseille	
	M.	JEAN	Directeur de recherche CNRS, LMA Marseille	
	J. J.	MOREAU	Professeur émérite, Université de Montpellier II	

Thèse préparée au sein du
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, LMA CNRS UPR 7051
et du
Groupe d'études pour l'Application des Méthodes Scientifiques à l'Architecture et à l'Urbanisme,
GAMSAU/MAP UMR CNRS 694.

UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE AIX-MARSEILLE II
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE DE MARSEILLE

THÈSE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II

Discipline : MÉCANIQUE
Option : SOLIDES

présentée et soutenue publiquement le 5 janvier 2001

par

Vincent ACARY

CONTRIBUTION A LA MODÉLISATION MÉCANIQUE ET NUMÉRIQUE DES ÉDIFICES MAÇONNÉS

Directeur de thèse :
Michel JEAN

JURY

M.M.	M.	GÉRADIN	Professeur, Joint Research Centre, ISIS, Ispra, Italie	Président
	D.	AUBRY	Professeur, Ecole Centrale Paris, Chatenay Malabry	Rapporteur
	M.	FRÉMOND	Directeur de recherche, LCPC, Paris	Rapporteur
	M.	BOULON	Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble	
	O.	DÉBORDES	Professeur, Université d'Aix-Marseille II, ESM2	
	M.	FLORENZANO	Directeur de recherche CNRS, GAMSAU Marseille	
	M.	JEAN	Directeur de recherche CNRS, LMA Marseille	
	J. J.	MOREAU	Professeur émérite, Université de Montpellier II	

Thèse préparée au sein du
Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, LMA CNRS UPR 7051
et du
Groupe d'études pour l'Application des Méthodes Scientifiques à l'Architecture et à l'Urbanisme,
GAMSAU/MAP UMR CNRS 694.

SOMMAIRE

Partie I

La mécanique & les édifices composés de blocs

Préambule

Chapitre 1
Les maçonneries, phénoménologie de leurs comportements

1.1 Les matériaux et leurs comportements mécaniques 7
1.1.1 Nomenclature des maçonneries les plus usuelles 7
1.1.2 Les matériaux constitutifs 9
1.2 Eléments expérimentaux du comportement global des maçonneries. 20
1.2.1 La maçonnerie comme un matériau homogène 20
1.2.2 La maçonnerie comme une structure hétérogène 27
1.2.3 Bilans sur les comportements globaux des maçonneries 28
1.3 La maçonnerie comme un géomatériau quasi-fragile 29
1.3.1 Motivations d'une telle assimilation 29
1.3.2 Les phénomènes inélastiques dans les géomatériaux quasi-fragiles . . . 30
1.4 Conclusions et enjeux pour les modélisations 34

Chapitre 2
Modélisations macro-mécaniques des structures maçonnées

2.1 Calcul à la rupture, analyse limite et « No–Tension Material » 38
2.1.1 Historique sur l'estimation des charges extrêmes des structures maçonnées 38
2.1.2 Les « No–Tension Material (NTM) » — Equations constitutives . . . 43
2.1.3 Remarques sur la nature des comportements modélisés : Plasticité ou élasticité non linéaire ? 47
2.1.4 Traitements mathématique et numérique des NTM 50
2.1.5 Synthèse sur l'analyse limite et les NTM 52
2.2 Modélisations numériques en élasticité linéaire 53
2.3 Modélisations en plasticité non associée 54
2.3.1 Un modèle de plasticité orthotrope avec adoucissement 54

2.3.2 Commentaires 58
2.4 Modélisations en endommagement 58
2.4.1 Présentation succincte de l'endommagement scalaire 59
2.4.2 Une application à la maçonnerie de l'endommagement scalaire 59
2.4.3 Commentaires 61
2.5 Modèles couplés endommagement-plasticité 62
2.5.1 Plasticité associée et endommagement fragile en traction 62
2.5.2 Plasticité et endommagement fragile en traction et compression . . . 65
2.5.3 Commentaires 67
2.6 Problèmes liés à la modélisation de l'adoucissement 68
2.6.1 Instabilités matérielles et problèmes numériques associés 68
2.6.2 Solutions pour répondre à ces problèmes 71
2.6.3 Conclusion sur les méthodes de régularisation 76
2.7 Les milieux de COSSERAT et les structures composées de blocs 77
2.7.1 Aperçu de la cinématique 77
2.7.2 Applications aux structures composées de blocs 78
2.8 Conclusion sur les modélisations macromécaniques 81

Chapitre 3
Considérations micromécaniques dans la modélisation des maçonneries

3.1 Analyse limite et description micromécanique de la maçonnerie 86
3.2 La méthode des éléments distincts (MED) 90
3.2.1 Principes de base des méthodes MED 90
3.2.2 Commentaires. 92
3.3 Les modèles micromécaniques continus 93
3.3.1 Un modèle micromécanique semi-empirique. 94
3.3.2 Modèles d'interface élasto-plastiques avec adoucissement 94
3.3.3 Modèles d'interface basés sur des considérations tribologiques. 99
3.4 Conclusions sur la modélisation micromécanique des maçonneries. 100
3.5 Perspectives pour une modélisation micromécanique des maçonneries 101

Chapitre 4
Analyse mécanique multi-échelle des maçonneries

4.1 Démarche générale d'homogénéisation des milieux élastiques 106
4.1.1 Principes de base – Tenseurs de localisation 106
4.1.2 Choix des tenseurs de localisation : méthodes de bornes et homogénéisation périodique 107

4.2 Applications de l'homogénéisation des milieux élastiques 109
4.2.1 Quelles méthodes d'homogénéisation pour quel type de maçonneries ? 109
4.2.2 Méthodes analytiques hybrides 110
4.2.3 Méthodes numériques et homogénéisation périodique 111
4.3 Homogénéisation, Calcul à la rupture & Analyse limite 113
4.3.1 Calcul à la rupture et homogénéisation périodique 113
4.3.2 Application aux maçonneries. 114
4.4 Cas des maçonneries à constituants dissipatifs élasto-plastiques 118
4.4.1 Applications des schémas auto-cohérents aux maçonneries 118
4.4.2 Méthodes semi-analytiques pour les maçonneries périodiques 120
4.4.3 Stratégies pour l'homogénéisation des maçonneries en plasticité 123
4.5 Cas des maçonneries à constituants dissipatifs quasi-fragiles 126
4.5.1 Homogénéisation et endommagement dans les maçonneries 126
4.5.2 Milieux microfissurés pour l'endommagement et la rupture des matériaux quasi-fragiles 129
4.6 Conclusion sur l'homogénéisation des maçonneries 137

Conclusions et perspectives

Partie II

Une modélisation micromécanique discrète des maçonneries

Préambule

Chapitre 5
Equations constitutives du modèle micromécanique discret

5.1 Eléments de mécanique des milieux continus déformables 147
5.1.1 Cinématique des milieux continus déformables 148
5.1.2 Equations de conservation 155
5.1.3 Théorème des Puissances Virtuelles 157
5.1.4 Écriture des lois de comportement - Cadre thermodynamique 160
5.2 Contact unilatéral et frottement 169

5.2.1 Les liaisons unilatérales parfaites et les systèmes discrets 169
5.2.2 Cinématique et sthénique du contact pour les milieux déformables . . 174
5.2.3 Contact unilatéral - Condition de SIGNORINI 177
5.2.4 Frottement sec - Frottement de COULOMB 179
5.3 Modèles couplant contact unilatéral, frottement et adhésion 184
5.3.1 Saut de déplacement à l'interface 184
5.3.2 Comportement élastique de l'interface 184
5.3.3 Un modèle d'adhésion fragile 186
5.3.4 Un modèle adhésif/frottant avec endommagement progressif, le modèle de FRÉMOND-CANGÉMI 189
5.3.5 Pertinence du modèle de FRÉMOND-CANGÉMI pour les mortiers . . . 194
5.3.6 Problèmes de sauts solutions liés à l'adoucissement 201
5.4 Conclusion 205

Chapitre 6
La méthode de la dynamique non régulière du contact
Non Smooth Contact Dynamics Method (NSCD)

6.1 Discrétisation spatiale, spécicifités de la méthode NSCD 209
6.1.1 Généralités sur les techniques employées 209
6.1.2 Spécificités associées aux systèmes multi-corps 210
6.1.3 Relations entre variables locales et globales 212
6.1.4 Synthèse de la démarche adoptée 216
6.2 Discrétisation temporelle et conditions unilatérales 218
6.2.1 Position du problème et contexte général non linéaire 218
6.2.2 Intégration numérique des systèmes non linéaires raides 219
6.2.3 Intégration numérique en présence de conditions unilatérales 224
6.2.4 Intégration temporelle, les choix de la méthode NSCD 227
6.3 Résolutions des équations discrétisées - dynamique et liaisons unilatérales . . 234
6.3.1 Prise en compte des non linéarités matérielles et géométriques 234
6.3.2 Résolution du problème de contact frottant 235
6.3.3 Algorithme général de résolution - Méthode NSCD 241
6.3.4 Particularité des modèles de cohésion et de flexibilité 242
6.4 Commentaires et conclusions sur la méthode présentée 243

Chapitre 7
Applications aux structures maçonnées

7.1 Obtention d'un équilibre 247

7.1.1 Position du problème . . . 247
7.1.2 Alternatives envisagées . . . 249
7.1.3 Commentaires et conclusion . . . 255
7.2 Tests de validation sur des structures académiques . . . 258
7.2.1 Cas des appareils de joints vifs . . . 258
7.2.2 Cas des appareils de joints de mortier cohésif . . . 271
7.3 Applications à l'étude d'édifices monumentaux . . . 279
7.3.1 Difficultés des modélisations - Nécessité de l'interdisciplinarité . . . 279
7.3.2 Acquisition des données & stéréo-photogrammétrie numérique . . . 282
7.3.3 Détection des contacts et discrétisation des interfaces . . . 283
7.3.4 Une première tentative : Le Palais des Papes . . . 289
7.3.5 Le projet d'étude de la priorale Notre-Dame d'Aleyrac . . . 294
7.4 Conclusion . . . 304

BIBLIOGRAPHIE i

Table des figures xxi

Liste des tableaux xxv

Annexes

Annexe A Rappels de calcul à la rupture et d'analyse limite 1
A.1 Calcul à la rupture . . . 2
A.1.1 Modes de chargement dépendant de n paramètres . . . 2
A.1.2 Domaine admissible pour les contraintes . . . 3
A.1.3 Chargement potentiellement supportable . . . 4
A.1.4 Construction de $\mathcal{K}$ par l'intérieur . . . 5
A.1.5 Construction de $\mathcal{K}$ par l'extérieur . . . 6
A.2 Analyse limite . . . 9
A.2.1 Réponse à un chargement à n paramètres . . . 9
A.2.2 Propriétés des chargements limites . . . 10
A.2.3 Nouvelle interprétation de $\mathcal{K}$ . . . 10
A.2.4 Approche de $\mathcal{K}$ par l'intérieur - Méthode statique . . . 10
A.2.5 Approche de $\mathcal{K}$ par l'extérieur - Méthode cinématique . . . 10
A.2.6 Cas des comportements plastiques non-associés . . . 11
A.3 Exemple didactique de la différence entre calcul à la rupture et analyse limite 11

Annexe B
Rudiments d'analyse convexe

B.1 Ensembles et fonctionnelles convexes 14
B.1.1 Ensembles convexes et cônes 14
B.1.2 Fonctionnelles convexes 15
B.2 Semi-continuité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 16
B.3 Fonctions convexes conjuguées. 17
B.3.1 Fonction conjuguée d'une fonction numérique 17
B.3.2 Fonctions duales. 18
B.3.3 Ensemble et cône polaires 19
B.4 Sous-différentiabilité des fonctionnelles convexes 20
B.5 Monotonie des multi-applications sous-différentielles 21

Annexes **1**

Première partie

La mécanique
&
les édifices composés de blocs

Préambule

La littérature sur la mécanique de maçonneries est dense. Il suffit de constater que plus de dix articles paraissent chaque année et que ce nombre ne cesse de croître, pour conclure que ce sujet de recherche est toujours d'actualité. On ne dressera pas une revue exhaustive de ces travaux ; on se contentera seulement d'évoquer les travaux les plus récents ou les plus marquants.

Le premier objectif de ce travail est de définir quels sont les principaux traits du comportement mécanique des maçonneries. Nous verrons qu'ils s'articulent autour de trois points importants :

- L'existence de trois échelles d'études semble être pertinente : une échelle macroscopique qui schématiquement est celle de la structure, une échelle mésoscopique correspondant à l'appareillage des blocs et enfin, une échelle microscopique, échelle de la particule élémentaire du Mécanicien.
- La coexistence de deux comportements principaux : l'endommagement fragile et la plasticité non associée. Ces deux comportements sont, de plus, intimement couplés.
- Une hétérogénéité forte, associée à un caractère cristallin plus ou moins marqué.

Ces caractéristiques de comportement rendent les tentatives de modélisation difficiles. Elles sont pourtant communes à de nombreux géomatériaux quasi-fragiles, dont la maçonnerie peut d'ailleurs être considérée comme un de leur composite. Nous verrons au travers des modélisations présentées, que ces tentatives sont le plus souvent issues de milieux spécialistes des géomatériaux. La présentation des principaux travaux s'appuiera sur ces caractéristiques en présentant par échelle d'étude la prise en compte des différents comportements.

Le second objectif est de mettre en évidence les écueils sur les lesquelles s'achoppent les modélisations à l'échelle macroscopique — modélisations macromécaniques. En effet, le caractère hétérogène ainsi que la présence d'adoucissement constituent de réelles difficultés à la prise en compte du comportement des maçonneries.

Cette constatation nous conduira naturellement vers les modélisations, qui tiennent compte de considérations microscopiques dans leur démarche — modélisations microscopiques. La distinction ne sera pas faite entre micromécanique et mésomécanique. Nous verrons qu'elles correspondent en fait à envisager respectivement le milieu comme discret ou continu à l'échelle mésoscopique. Deux types d'approches sont considérés. La première tente de résoudre directement le problème de micromécanique aussi coûteux soit-il. La seconde préfère construire un modèle macromécanique basé sur des considérations micromécaniques. On entend, par là, la prise en compte de relations bilatérales entre les deux échelles (couplage fort). Cette démarche constitue

l'objet de l'homogénéisation.

Pour terminer cette partie, nous tenterons de montrer qu'il manque une approche micromécanique discrète des maçonneries, qui tient compte à la fois du caractère unilatéral et non régulier des joints ainsi que de leur cohésion et de leur endommagement.

CHAPITRE 1

Les maçonneries, phénoménologie de leurs comportements

———————— oOo ————————

a maçonnerie est avant tout l'Art du maçon. En cela, le terme « maçonnerie » recouvre tout ouvrage construit de pierres, de briques, d'agglomérés ou tout autre élément servant à la construction, compactés entre eux par la gravité. Du point de vue de la mécanique, cela correspond bien évidemment à des comportements et des réponses très variés. Dans ce chapitre, nous tâcherons de préciser et de décrire les types usuels de maçonnerie ainsi que leurs matériaux constitutifs afin de pouvoir discuter, dans la suite, de manière plus aisée de la pertinence des modélisations mécaniques choisies. On essaiera, dans la mesure du possible, de donner une description de la mécanique des matériaux indépendamment de toute modélisation [a], dont l'étude sera l'objet du chapitre 2. Enfin, le comportement des maçonneries sera placé dans un cadre plus large qui est celui des géomatériaux quasi-fragiles.

[a] « Rien n'est donné. Tout est construit » précisait G. Bachelard (La formation de l'esprit scientifique, 1938, p14) pour qui tout travail scientifique est le résultat d'une construction de l'esprit et non de la donnée immédiate d'une réalité physique.

———————— oOo ————————

Plan du Chapitre 1

1.1 Les matériaux et leurs comportements mécaniques 7
1.1.1 Nomenclature des maçonneries les plus usuelles 7
1.1.2 Les matériaux constitutifs 9
1.2 Eléments expérimentaux du comportement global des maçonneries. 20
1.2.1 La maçonnerie comme un matériau homogène 20
1.2.2 La maçonnerie comme une structure hétérogène 27
1.2.3 Bilans sur les comportements globaux des maçonneries 28
1.3 La maçonnerie comme un géomatériau quasi-fragile 29
1.3.1 Motivations d'une telle assimilation 29
1.3.2 Les phénomènes inélastiques dans les géomatériaux quasi-fragiles . 30
1.4 Conclusions et enjeux pour les modélisations 34

Avant de se lancer dans une quelconque entreprise de modélisation, il semble bon de préciser quel est l'objet de l'attention du modélisateur et comment cet objet se manifeste auprès de lui. En clair, pour le sujet qui nous intéresse, il paraît utile de définir ce que sont les édifices maçonnés et, en particulier, son constituant, la maçonnerie. De même, préciser comment ils se comportent, d'un point de vue mécanique, aux vues des constatations expérimentales et physiques, est le passage obligé d'une modélisation saine. Sans prétendre à la précision d'un spécialiste des techniques expérimentales, nous donnerons les grandes lignes du comportement des maçonneries. Ce chapitre est dédié à ce travail.

Dans un premier temps, nous décrirons les constituants les plus usuels des maçonneries et comment ils peuvent être assemblés pour former les principaux types de maçonneries (§ 1.1).

Ensuite, nous donnerons quelques indications sur le comportement global des maçonneries (§ 1.2). Parler de comportement global sous-entend que l'on considère la maçonnerie comme un matériau à part entière, homogène et continu. Nous verrons au § 1.2.1.b que les essais expérimentaux, les plus usuels, la considère comme telle. La plupart des résultats qu'ils fournissent cherche à définir un matériau homogène équivalent. Un point de vue complémentaire consiste à considérer la maçonnerie non plus comme un matériau mais comme une structure. Nous dirons quelques mots sur ces démarches au § 1.2.2.

Préciser le centre d'intérêt de notre étude ne veut pas autant dire que l'on ne se préoccupe pas des sujets afférents. Pour mieux comprendre les multiples aspects du comportement des maçonneries, nous les replacerons, dans le contexte plus général du comportement des géomatériaux quasi-fragiles (§ 1.3).

Enfin, pour conclure ce chapitre, nous essaierons de dégager les principaux comportements de maçonneries afin de préciser les enjeux qui guideront les modélisations présentées dans les chapitres suivants.

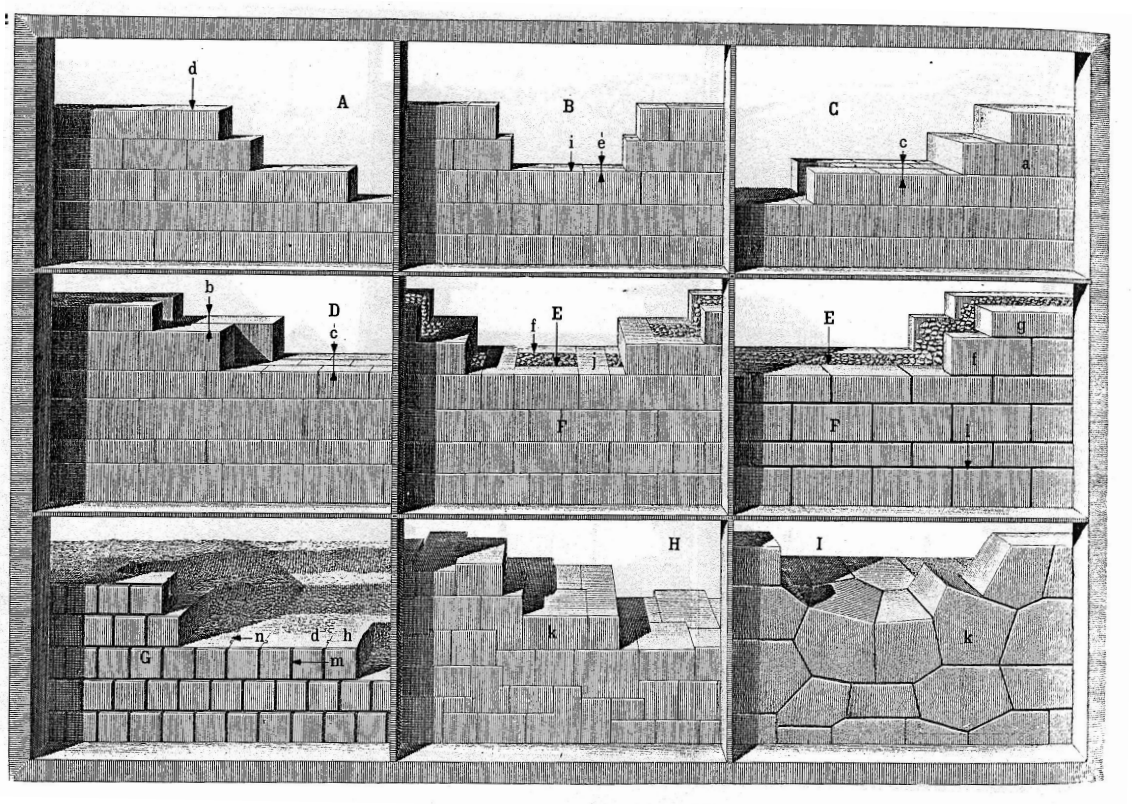
1.1 Les matériaux et leurs comportements mécaniques

1.1.1 Nomenclature des maçonneries les plus usuelles

Deux familles de maçonneries peuvent être différenciées par leur constitution : le *blocage* et l'*appareil*. Le blocage est une maçonnerie d'éléments de différentes tailles, jetés pêle-mêle dans un bain de mortier. *A contrario*, l'appareil est une maçonnerie d'éléments posés et non jetés : chaque élément est adapté, éventuellement équarri ou taillé, pour occuper une place déterminée.

Le blocage peut être utilisé de plusieurs manières : seul pour constituer des éléments structuraux ou en fourrure entre deux appareils constituant les parements. A une échelle macroscopique, celle de la structure par exemple, le blocage apparaît comme homogène et de faible anisotropie. Il peut être considéré à l'instar du béton comme un matériau composite biphasé relativement homogène.

L'appareil se caractérise et se définit par un ordre, plus ou moins marqué, dans l'arrangement



A.	Appareil simple, régulier, allongé, plein-sur-joint	a.	Assise parpaigne, cubique en boutisses
B.	Appareil double, régulier, harpé en carreaux et boutisses	b. c. d.	assises allongées en carreaux
		b.	assise double
C.	Appareil triple, régulier, à alternance d'assises cubiques et d'assises allongées	c.	assise triple
		d. e. f. g.	Carreau
D.	Appareil triple, à alternance d'assises régulières allongées	e.	Carreau double
		f.	Carreau de champ
E. F.	Maconnerie Fourée	g.	Carreau à plat
E.	Fourrure	h. i. j.	Boutisse
F.	Appareil de revêtement	i.	Boutisse parpaigne
G.	Appareil de revêtement, régulier, plein-sur-joint en carreaux et boutisses, à bossage en table simluant un appareil cubique	j.	Boutisse parpaigne formant chaînage
		k.	Pierre de taille
		l.	Joint refendu
H.	Appareil double, polygonal rectangle	m.	Faux jiont
I.	Appareil double, polygonal	n.	Tenon

FIGURE 1.1 – *Différents types d'appareils, d'après (*PÉROUSE DE MONTCLOS, *1988)*

de ses éléments. Pour décrire cet ordre et donc pour définir l'appareil, dégageons les deux éléments de bases de la maçonnerie en appareillage de blocs :

– Les *éléments*. L'appareillage des éléments définit leur statut de *boutisse, carreau ou parpaing*. Les boutisses sont les éléments dont la plus grande dimension est dans l'épaisseur de la construction. Le carreau présente sa plus grande dimension en parement. Le parpaing est élément traversant toute l'épaisseur de la maçonnerie. Les carreaux peuvent être appelés parpaings dans un appareil simple, pour les boutisses on parle de boutisses parpaignes.

– Le *joint*. Il est défini dans l'appareil comme l'espace entre deux éléments. Il définit aussi implicitement la couche de matériau qui le remplit. Dans la cas où le matériau est absent, on parle de *joint vif*.

Plusieurs types d'appareils sont couramment rencontrés (voir figure 1.1) :

– L'appareil irrégulier est celui qui est le moins ordonné au niveau de ces éléments. Il est constitué d'éléments de grosseur variable et de formes irrégulières. Là encore, dans le cas où le joint est épais et incertain, ce type d'appareil peut, en première approximation, être considéré comme homogène.
– L'appareil assisé présente une régularité plus grande. Une assise est un rang d'éléments de même hauteur posés de niveau ou rampant. Dans l'appareil assisé, on définit le joint de lit qui sépare deux assises et le joint-montant qui sépare deux éléments dans l'assise. Même si, dans l'appareil assisé, les joint de lits ne sont pas forcément rectilignes, ils apportent à la structure maçonnée une certaine anisotropie donnée par la direction des joint-montants.
– L'appareil à assises régulières est un appareil assisé constitué d'éléments de longueurs variables mais de même hauteur. Les joints de lits sont alors rectilignes. L'appareil régulier possède les mêmes caractéristiques mais en plus chaque assise est constituée d'éléments dont les longueurs en parement varient en alternance. Enfin, un dernier appareil que nous décrirons et qui sera souvent utilisé par la suite, est l'appareil plein-sur-joint où les joints montants sont au milieu des éléments des assises supérieures et inférieures.

Sur la figure 1.2, les vestiges d'une maçonnerie fourrées sont représentés. Ces clichés permettent de mettre en évidence la fourrure et le parement en appareil à assises régulières.

Premiers commentaires mécaniques. On remarque à travers cette nomenclature succincte deux caractères importants qui distinguent les maçonneries et qui ont une influence considérable sur le comportement mécanique des structures maçonnées : leur homogénéité ou leur hétérogénéité, leur isotropie ou leur anisotropie.

Si la relative homogénéité du blocage, ou de certains appareillages irréguliers se révèle mieux adaptée à des modélisations macromécaniques, nous verrons que les fortes hétérogénéités des appareils réguliers obligent à considérer, de plus près, la microstructure.

1.1.2 Les matériaux constitutifs

1.1.2.a Les éléments

Les matériaux utilisés pour les éléments sont généralement la pierre, la brique ou les agglomérés de béton[1]. A l'image de la plupart des géomatériaux, le comportement mécanique des éléments est de type fragile ou quasi-fragile. Ils sont le plus souvent décrits par les fabricants par leurs caractéristiques d'élasticité linéaire et leur résistance en traction et en compression supposant en première approche une rupture brutale du matériau.

1. On peut trouver plus rarement le tuileau qui est un fragment de tuile utilisé en assise régulière, ou la terre cru.

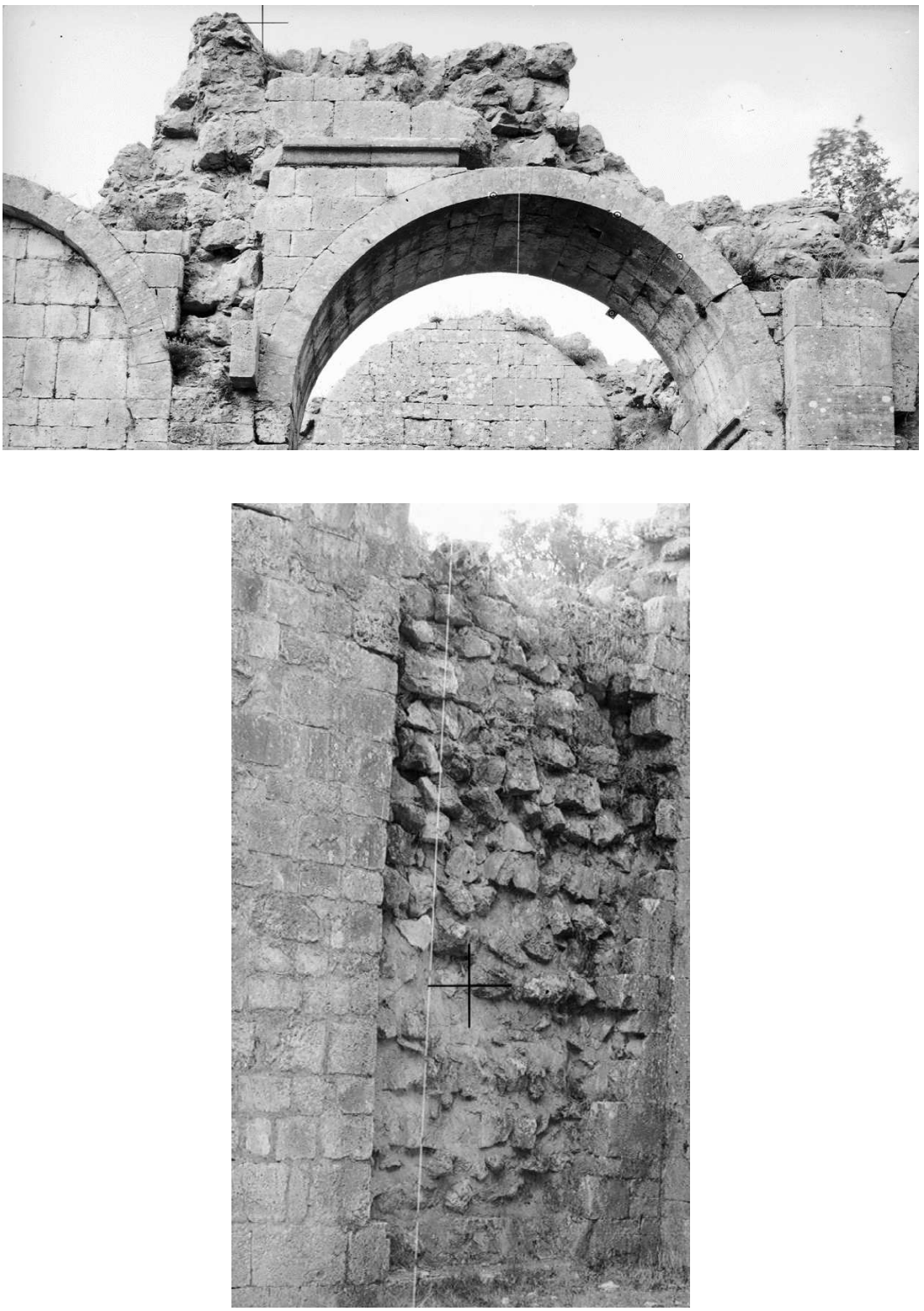


FIGURE 1.2 – *Détails d'un appareil de parement en joints vifs et du blocage mis à nu — Prieuré N.D. D'Aleyrac, Drome(26)*

Une description plus fine de leurs comportements inélastiques fait apparaître deux mécanismes principaux : endommagement et plasticité. A notre connaissance, peu d'études ont été réalisées pour décrire les phénomènes inélastiques propres aux maçonneries. Toutefois, nous verrons qu'il est possible de tirer des enseignements précieux, sur ce sujet, en discutant des géomatériaux quasi-fragiles (voir § 1.3).

Ces comportements sont caractérisés par des tests de résistance en traction-compression identiques à ceux pratiqués sur le béton. Il s'agit des tests de traction-compression uniaxiale, compression biaxiale et triaxiale, des test brésiliens et de flexion trois points. Pour ces derniers, on trouvera dans (Cardani & Meda, 1999) une description complète des essais de mesures directes et indirectes des résistances en traction sur des marbres.

Les normes techniques de construction donnent habituellement les résistances en compression des éléments. Ils dimensionnent en effet les structures porteuses massives comme les murs et les poteaux, qui doivent reprendre le poids propre des structures. Les résistances à la traction sont généralement données par des résistances à la flexion des éléments. Cela peut facilement se comprendre sachant que les éléments sont rarement mis en défaut en traction directe mais par flexion suite à des tassements différentiels. Nous verrons par la suite que les résistances en traction des joints sont généralement beaucoup plus faibles. Ils constituent par la même le point faible des maçonneries en traction directe.

Dans le tableau 1.1, on donne à titre indicatif quelques propriétés mécaniques des matériaux constituants des éléments des maçonneries usuelles. Pour les matériaux creux comme les briques creuses ou les agglomérés, les valeurs de résistances en compression sont données dans le sens vertical alors que les valeurs de résistance en traction sont données dans le sens transverse.

1.1.2.b Les joints

Les joints-vifs La caractérisation mécanique des joints-vifs se réduit à la description du frottement entre deux éléments. Devant la complexité des phénomènes se produisant aux interfaces entre les éléments (usure, interactions physico-chimiques, production de troisième corps, *etc.*....), on se cantonne le plus souvent à une loi de frottement de Coulomb . Ce choix résulte d'un point de vue purement phénoménologique ignorant la tribologie des interfaces entre géomatériaux, mais convient en première analyse pour corroborer les essais expérimentaux.

Les expériences menées par Armand *et al.* (1997) montrent que cette hypothèse est souvent suffisante. On reporte sur la figure 1.3 les principaux résultats d'essais de cisaillement entre deux blocs de marbre de Dionysos pour des vitesses de cisaillement allant de $0,01\,\mathsf{m.s}^{-1}$ à $0,1\,\mathsf{m.s}^{-1}$ et des pressions normales variant de $3,00\,\mathsf{kN}$ à $10\,\mathsf{kN}$. On constate que pour des vitesses faibles, on suit une loi de frottement de Coulomb classique, où le seuil de glissement est proportionnel à la pression normale. Dans le cas d'une pression normale faible, un cycle d'adaptation est tout de même remarqué. Pour des vitesses élevées, on remarque des pics sur la réaction tangentielle lors des changements de signe de la vitesse de sollicitation. Ce type de réponse est traditionnellement interprété en distinguant un coefficient de frottement statique plus élevé que le coefficient de

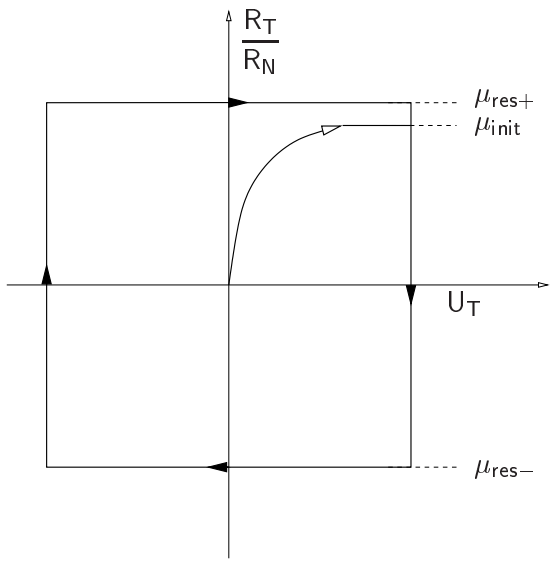
	Masse Volumique (Kg/ m^3)	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Résistance traction (MPa)	Résistance compression (MPa)
Grès des Vosges [a]	2000	30	0.3	-	150
Granit [b]	2600	40 – 70	0.2 – 0.3	-	70 – 280
Calcaire [b]	2000 – 2600	20 – 70	0.2 – 0.3	25 – 30	20 – 200
Marbre [b]	2600 – 2900	50 – 100	0.2 – 0.3	10 – 20	50 – 180
Béton [c]	2300	30	0.2	3	30
Agglomerés [d]	2000	-	-	5	15
Brique creuse [e]	3000	5	0.3	8	20
Brique pleine [f] ancienne	3000	8.7	0.16	3.45	40
Brique pleine [f] moderne	3000	14.7	0.22	3.14	64

[a] d'après Keryvin (1999)
[b] d'après Gere & Timoshenko (1990)
[c] d'aprés Lemaitre & Chaboche (1988)
[e] Société Bouyer-Leroux, masse volumique du matériau
[f] d'après Atkinson *et al.* (1989)

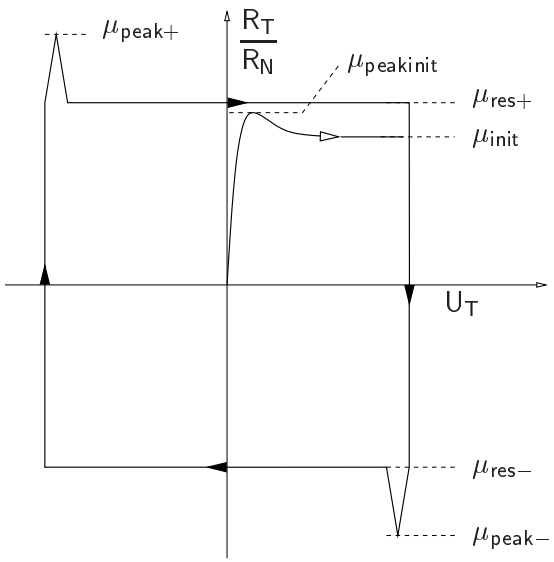
Tableau 1.1 – *Propriétés mécaniques des éléments*

frottement dynamique. Les auteurs remarquent d'ailleurs une variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement qui varie de $0,90$ pour de faibles vitesses ($0,01\,\mathrm{m.s^{-1}}$) à $0,60$ pour des vitesses plus élevées ($0,1\,\mathrm{m.s^{-1}}$) .

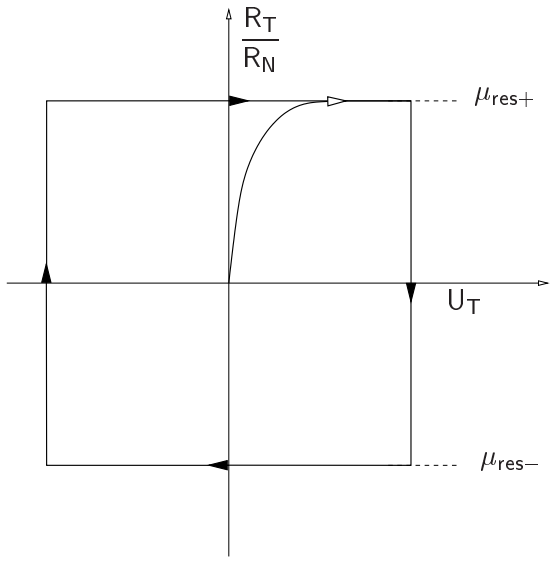
Pour une caractérisation plus fine des joints-vifs, les nombreuses études menées sur le comportement des interfaces dans les massifs rocheux fissurés effectuées par les géomécaniciens pourraient être intéressantes. Les considérations tribologiques comme la forme des aspérités, leur croissance et leur usure sont alors prises en compte (Selvadurai & Boulon, 1995 ; Mròz & Giambanco, 1996 ; Plesha, 1995).



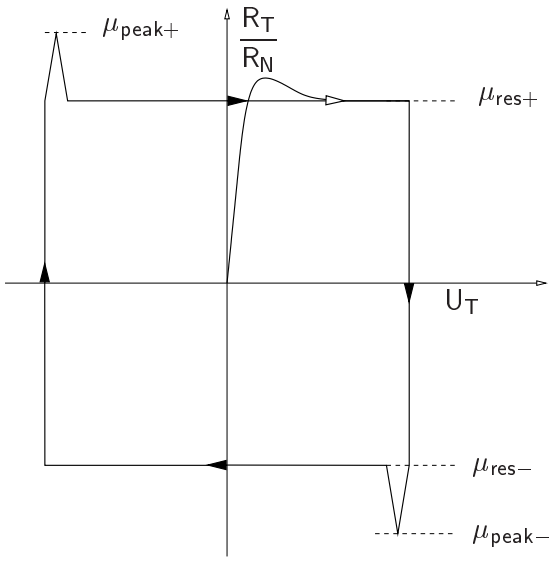
(a) Pression normale faible, vitesse faible



(b) Pression normale faible, vitesse élevée



(c) Pression normale élevée, vitesse faible



(d) Pression normale élevée, vitesse élevée

FIGURE 1.3 – *Essais de cisaillement cyclique sur un marbre de Dionysos - Réaction tangentielle en fonction du déplacement tangentiel (d'après (ARMAND et al., 1997))*

Les joints de mortier Le mortier est le matériau standard de liaison entre les éléments. Il est habituellement constitué d'un granulat, d'un liant et d'eau. Le séchage et les liaisons physico-chimiques se produisant dans le liant assurent la cohésion du mortier. Les mortiers se subdivisent en deux catégories principales : les mortiers plastiques et les mortiers durcis.

Les mortiers plastiques possèdent la propriété d'avoir une « ouvrabilité » très bonne. L'ouvrabilité n'est pas une grandeur scientifiquement quantifiable mais répond aux exigences du chantier. Elle est la combinaison de la plasticité, de la compacité et de la cohérence de mortier avant séchage. Cette facilité de mise en oeuvre se fait au détriment des autres propriétés du mortier, en particulier des propriétés mécaniques.

A contrario, les mortiers durcis possèdent un certain nombre de propriétés concernant la résistance mécanique. Ces mortiers répondent à des exigences de tenue à la traction directe, de souplesse pour pouvoir absorber d'éventuelles fissurations, et de bonne adhérence avec les éléments. Ces paramètres des mortiers sont contrôlés par le choix des liants et de leur pourcentage respectif dans le mélange.

Les caractéristiques mécaniques des mortiers sont donc très diverses suivant leur conception et leur emploi.

Le sable est le granulat habituellement employé. Il est inerte dans la réaction chimique mais participe à la compacité du mortier durci. Dans les constructions modernes, il doit répondre à des exigences de granulométrie pour conférer au mortier son homogénéité.

Le liant peut être de nature variée. Citons quelques liants usuels :

- Les mortiers anciens et traditionnels sont à base de chaux. Ils possèdent une plasticité très bonne mais leur résistance mécanique est faible et leur cure lente. La chaux grasse, obtenue par extinction de la chaux vive en la laissant vieillir, est la base du mortier traditionnel rencontré dans les édifices anciens. Pour des raisons de coût, la chaux hydratée sèche est utilisée aujourd'hui. La cure de la chaux s'effectue lentement par carbonatation sous l'effet du gaz carbonique de l'air. Ce processus peut être fortement ralenti et gêné par l'humidité et le froid. Une fois encore, les propriétés mécaniques peuvent être très dispersées suivant la mise en œuvre.
- Le deuxième liant employé couramment est le ciment Portland. C'est le ciment qui entre dans la composition des bétons. Il offre de très bonnes caractéristiques mécaniques au mortier mais le rend malaisé à travailler. De plus, il a un faible pouvoir de rétention d'eau.
- Le ciment de maçonnerie est lui aussi un liant usuel. Il est composé de ciment Portland, d'un remplissage minéral inerte (calcaire) et d'adjuvants mouillants et hydrofuges. Les adjuvants donnent la plasticité et le pouvoir de rétention d'eau qu'offrent les mortiers à la chaux mais en conservant les avantages mécaniques du ciment Portland.
- La terre argileuse constitue elle aussi un type de liant utilisé dans les constructions anciennes. On le reconnaît à son effritement et à sa résistance au temps généralement mauvaise. Il constitue souvent le mortier servant de liant au blocage dans les constructions anciennes.

Type	Ciment Portland	Ciment de maçonnerie	Chaux vive ou Chaux grasse	Résistance en compression MPa
M	1	1	-	17
M	1	-	1/4	15
S	1/2	1	-	13
S	1	-	1/2	12
N	1	-	1	5
N	-	1	-	4
O	1	-	1	2.5
K	1	-	1	1.5
K	-	-	1	0.5

TABLEAU 1.2 – *Propriétés mécaniques des joints suivant le dosage - Source : Norme ACNOR A179*

On donne dans le tableau 1.2 quelques caractéristiques de mortier suivant le dosage de ses constituants. On peut remarquer que les résistances en compression des mortiers sont très sensibles au dosage. Il en est généralement de même en traction.

En plus de leurs caractéristiques intrinsèques, la mise en oeuvre des mortiers influe sensiblement sur leurs caractéristiques mécaniques. Par exemple, la teneur en eau des mortiers ainsi que le temps de séchage sont très importants. Le pouvoir de rétention d'eau des mortiers est donc à comparer avec le pouvoir d'absorption des éléments. De même, la capacité d'adhérence du mortier dépend beaucoup des éléments et de leur état de surface. On peut d'ailleurs noter que si l'adhérence est parfaitement réalisée, les ruptures en traction directe se font au cœur du joint. On renvoie le lecteur intéressé par l'aspect physico-chimique de la caractérisation mécanique des mortiers et en particulier des mortiers anciens aux travaux de MOROPOULOU *et al.* (1997, 2000a,b).

Les tests de caractérisation mécanique des mortiers. Deux grands types de tests sont réalisés pour caractériser le comportement mécanique. Le premier type est identique au test sur bétons sur le matériau seul. On teste alors les propriétés élastiques, les résistances en traction-compression du mortier seul comme un matériau à part entière. Un deuxième type de test se fait sur des petits assemblages de façon à prendre en compte l'interaction entre les éléments et le mortier. Des assemblages caractéristiques sont représentés sur les figures 1.4 et 1.5.

Il est clair que seul le premier type de test est intéressant pour une maçonnerie de blocage, où la définition des joints n'est pas précisée. Dans les tests sur des micro-assemblages ou sur les prismes, on fait l'hypothèse d'appareil assisé et même régulier. Les différents facteurs géométriques du joint (épaisseur, longueur et largeur) entrent alors en jeu. Ces derniers essais mesurent les résistances propres de chaque matériau ainsi que l'adhérence entre les phases et les effets de bord. On caractérise alors le comportement du joint comme une interface par son comportement normal en traction et compression, et son comportement tangentiel en cisaillement.

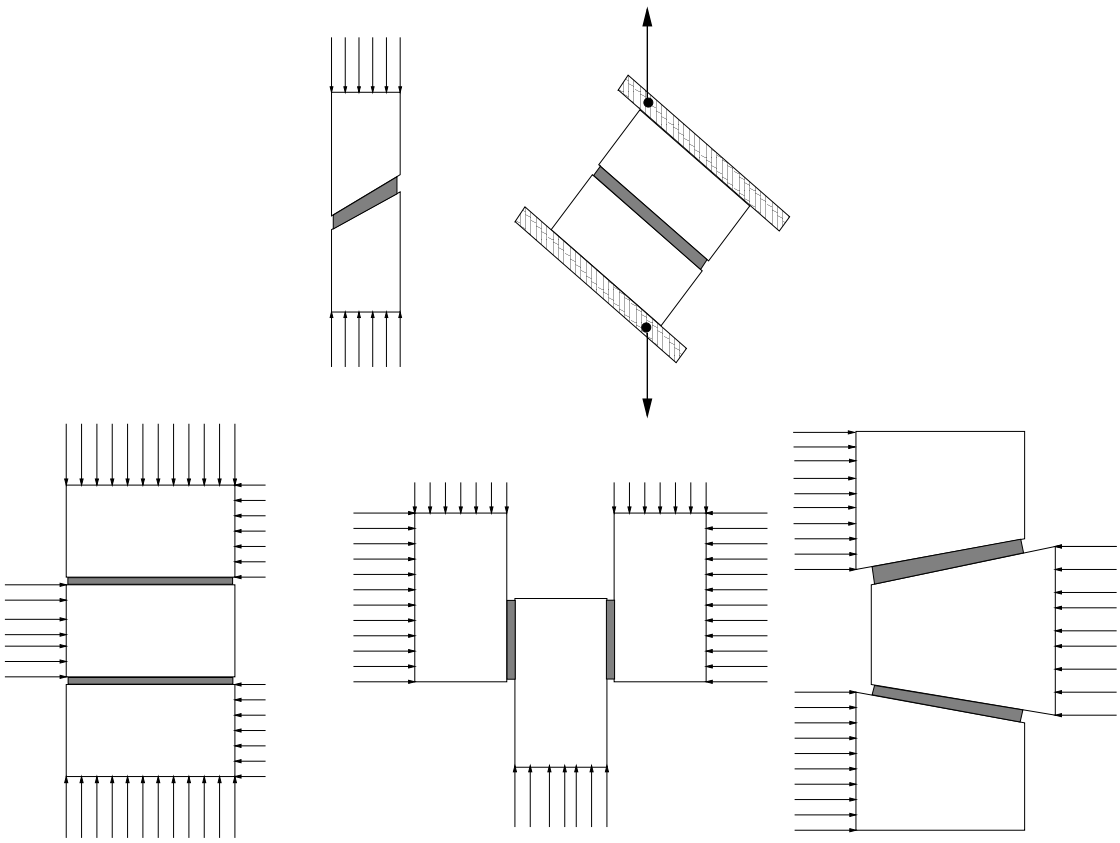


FIGURE 1.4 – *Tests de mortier sur des micro-assemblages*

Les grandes lignes du comportement des mortiers Un comportement normal caractéristique en traction est représenté sur la figure 1.6(a). On peut remarquer une première partie élastique suivie d'une partie ou le matériau s'adoucit rapidement. Comme nous l'avons déjà remarqué dans la partie précédente, ce type de comportement est caractéristique des géomatériaux sollicités en traction. La rupture intervient par microdécohésions, coalescence et finalement apparition de macrofissures. Sur un essai de décharge, on constate que les caractéristiques élastiques sont fortement dégradées et que les déformations résiduelles sont faibles (DRYSDALE *et al.*, 1979). Le cadre mécanique pour décrire ce type de phénomène semble être celui de la mécanique de l'endommagement.

Des études précises du comportement tangent sous sollicitations cycliques ont été réalisées par HAMID *et al.* (1979), ATKINSON *et al.* (1989) et GUO (1991) concernant les mortiers modernes et par ARMAND *et al.* (1997) pour les mortiers anciens. Ces travaux ont permis de mettre en évidence les comportements communs suivants :

– les joints de maçonnerie révèlent un pic en contraintes au premier cycle. Ce pic reflète lui aussi une partie élastique suivie d'une phase d'adoucissement (*voir* figure 1.6(b)). La rigidité tangentielle du joint dépend à la fois de la contrainte tangentielle et normale. La phase adoucissante peut être décrite par une hyperbole. La cohésion décrite par ce pic est

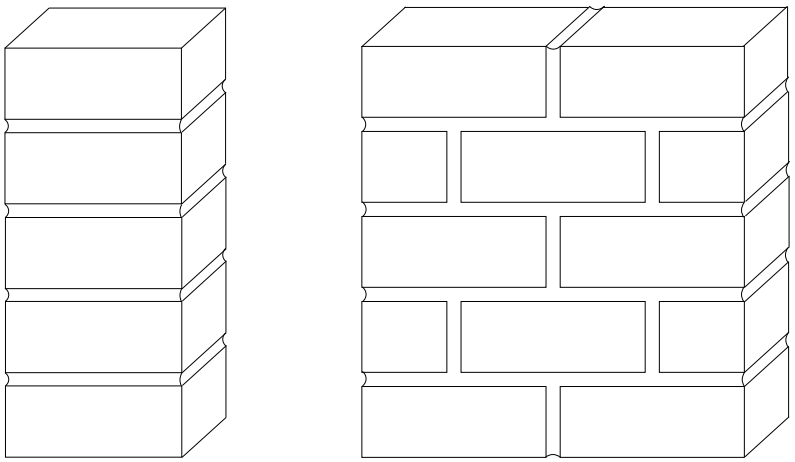
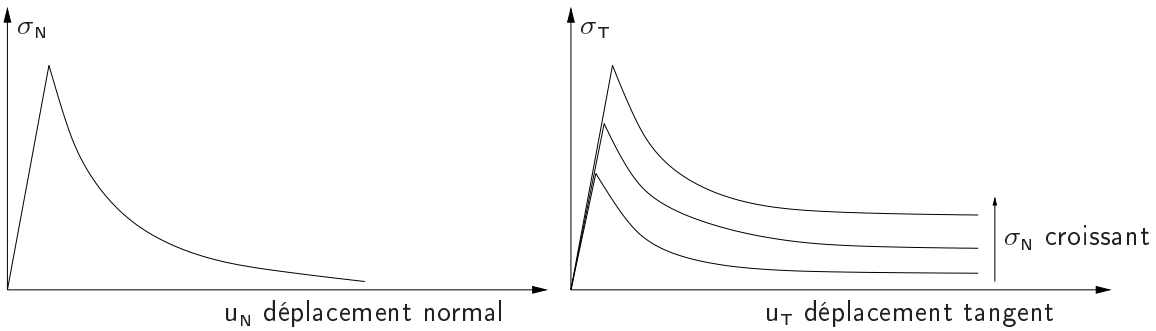


FIGURE 1.5 – *Evaluation de la résistance en compression des assemblages joint/mortier sur des prismes maçonnés*



(a) Comportement normal en traction directe (b) Comportement tangent en cisaillement

FIGURE 1.6 – *Comportements caractéristiques des joints de mortier*

par contre très sensible aux conditions expérimentales.

- Les cycles supplémentaires présentent une contrainte de cisaillement résiduelle proportionnelle à la pression normale. Cette contrainte ne semble pas sensible au nombre de cycles, i.e., le joint s'accommode.
- Une dilatation normale du joint est constatée inversement proportionnelle à la pression normale.
- La cohésion tangentielle et la contrainte résiduelle semble suivre correctement le critère de MOHR-COULOMB.

Ces résultats peuvent s'interpréter par un comportement d'endommagement pour la cohésion et un comportement plastique non associé pour la contrainte résiduelle. Notons au passage que c'est type de comportement que nous chercherons à modéliser dans la deuxième partie de ce travail. On illustre sur les figures 1.7 et 1.8 deux réponses caractéristiques de joints de mortier moderne

et ancien sous sollicitation cyclique de cisaillement.

De même, on trouvera des valeurs quantitatives pour différents mortiers en terme d'énergie de rupture en mode I en mode III dans les travaux de Van Der Pluijm (1993, 1992).

Les expériences sur les prismes (*voir* figure 1.5) apportent une information supplémentaire quant à l'effet de structure apporté par l'appareil. Elles constituent les essais de références en compression uniaxiale. Cette information est cependant toute relative car l'interprétation des résultats et leur extrapolation sur des structures complètes, bien que largement étudiées, restent ardues.

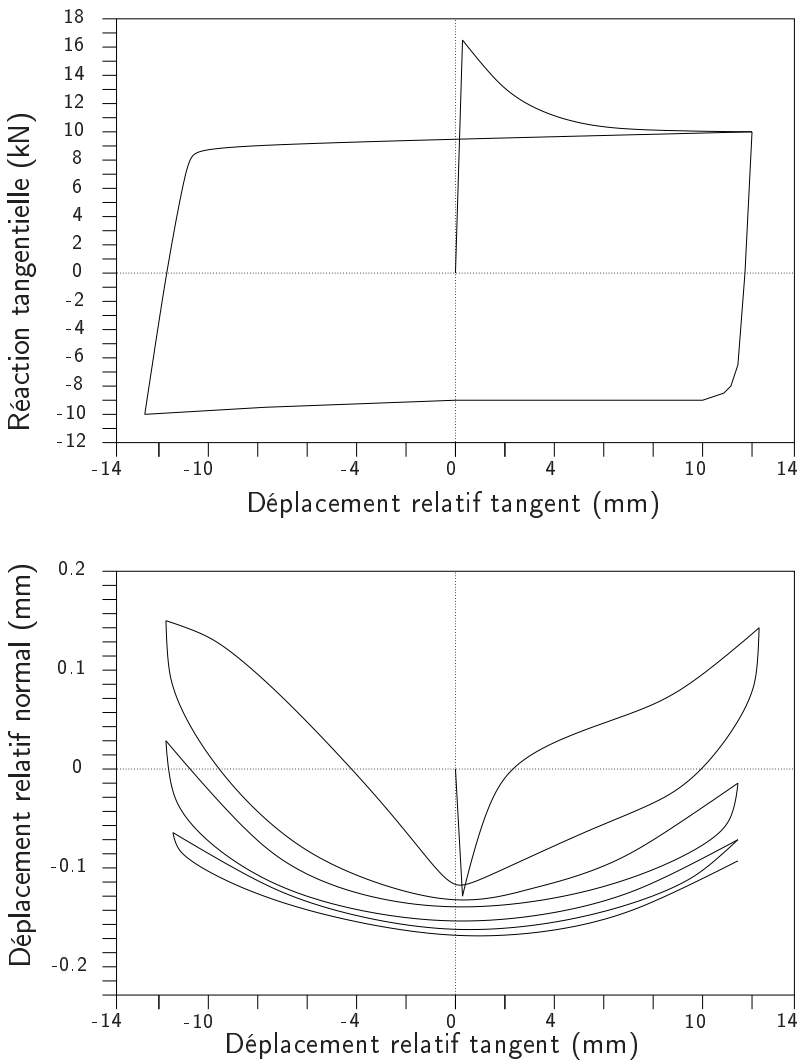


Figure 1.7 – *Comportement tangent d'un joint de mortier moderne sous sollicitation cyclique, d'après (*Atkinson *et al., 1989) - épaisseur du joint :* 13 mm - *Surface du joint :* $100 \times 420\,\mathrm{mm}^2$ - *Pression normale :* $13,7\,\mathrm{kN}$

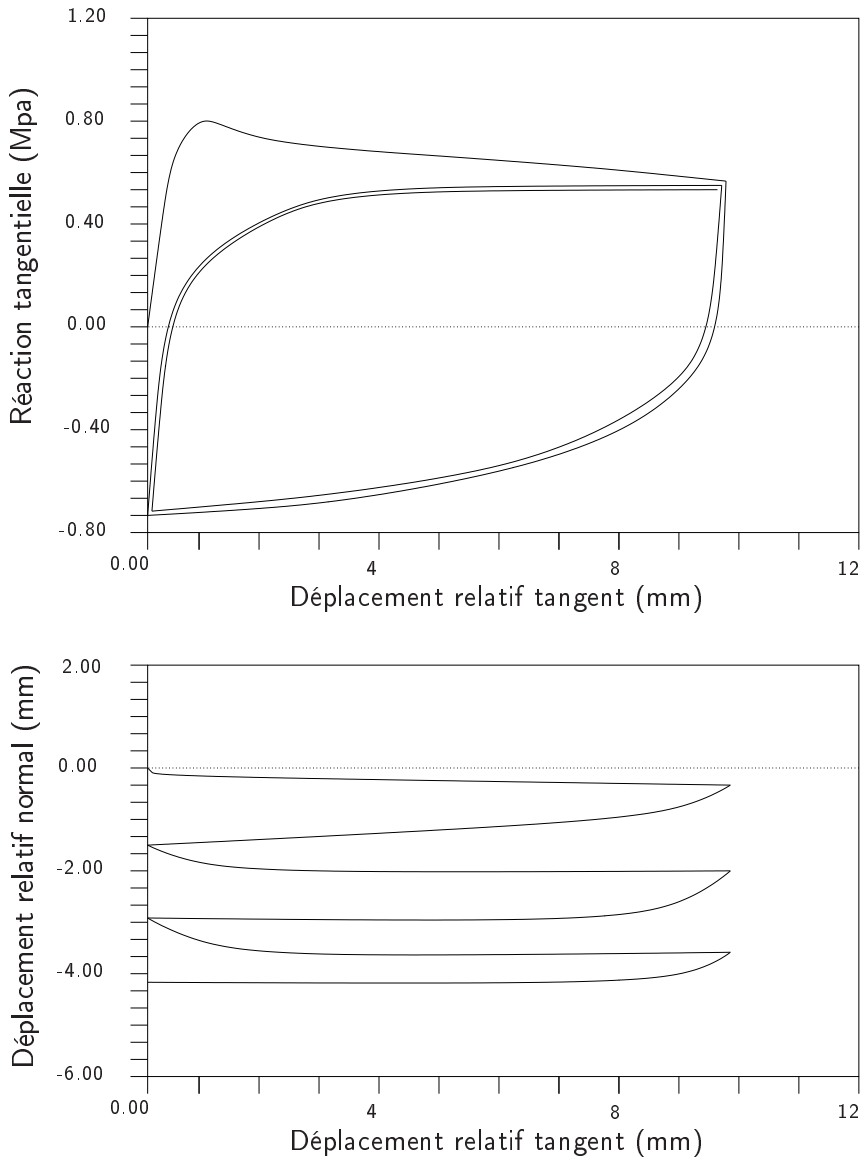


FIGURE 1.8 – *Comportement tangent d'un joint de mortier ancien sous sollicitation cyclique, d'après (*ARMAND *et al., 1997) - Vitesse de sollicitation :* $0,05\,\mathrm{mm.s^{-1}}$*, Pression normale : 1* MPa

1.2 Eléments expérimentaux du comportement global des maçonneries.

Dans la partie précédente, on s'est attaché à décrire les matériaux et les éléments constituant les maçonneries. Il apparaît évident que le comportement global des maçonneries ne se résume pas aux comportements de chacune de ses phases. La microstructure de la maçonnerie, les proportions de ses constituants, le comportement des interfaces entre constituants sont autant de facteurs importants dans la réponse mécanique à l'échelle de la structure.

Si pour le blocage, relativement homogène à une échelle macroscopique, une loi des mélanges peut sembler suffisante pour déterminer les caractéristiques élastiques moyennes, il n'en est pas de même pour les appareils. L'hétérogénéité alliée au caractère « cristallin » de la structure génère alors une forte anisotropie et non linéarité du comportement global.

Toutefois, le caractère hétérogène, voire discret, des maçonneries est rarement mis en évidence dans les résultats expérimentaux. Dans les essais traditionnels, la maçonnerie est considérée, implicitement, comme un matériau, à part entière, homogène et continu. La prise en compte en compte de la microstructure est seulement mis en évidence par une anisotropie au niveau global. Dans un premier temps (§ 1.2.1), nous décrirons les travaux expérimentaux la maçonnerie comme un matériau homogène et continu.

Ensuite (§ 1.2.2), nous discuterons des rares travaux expérimentaux qui considèrent la maçonnerie comme un structure hétérogène. Nous verrons qu'il est alors difficile de dégager des traits de comportement valables pour une large classe de maçonneries.

1.2.1 La maçonnerie comme un matériau homogène

Les comportements qui sont décrits dans ce paragraphe sont représentatifs d'un comportement global des maçonneries comme un matériau à part entière. Nous verrons que les dimensions des systèmes mécaniques étudiés sont au moins dix fois supérieures à celles des éléments. Cette règle est dictée par le soucis de décrire un comportement global d'un matériau à partir du comportement d'un système hétérogène. En quelques sortes, les essais expérimentaux traditionnels fournissent un comportement homogénéisé de la maçonnerie vue comme un matériau.

Après une brève évocation du comportement élastique des maçonneries (§ 1.2.1.a), nous donnerons quelques éléments des essais expérimentaux usuels. Les principaux critères de rupture seront abordés dans le même temps. Même si quelques efforts de modélisation sont faits pour écrire ces critères, ils sont le plus souvent associés de manière intime aux essais pratiqués.

Les études cherchent à préciser des comportements, le plus souvent, plans. Les sollicitations « hors-plan » sont généralement moins étudiées. Elles sont pourtant importantes si l'on considère la réponse des structures au vent ou leurs ancrages dans les fondations. De même, des structures un peu plus particulières comme les ouvrages de soutènement sont principalement sollicitées « hors-plan ».

Le contenu de cette partie est largement inspiré des travaux de Anthoine (1992), qui a réalisé

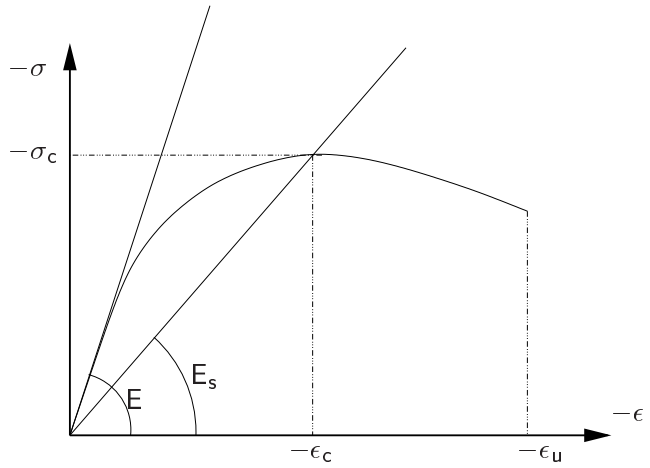


FIGURE 1.9 – *Évaluation des propriétés élastiques par un essai de compression uniaxial*

une étude très complète concernant les approches expérimentales et empiriques des maçonneries en chargement plan. Nous donnerons dans le § 1.2.1.b les grandes lignes des essais expérimentaux qui sont réalisés sur les maçonneries de façon à fournir aux lecteurs les clés de lecture des divers critères de rupture exposés aux § 1.2.1.c et 1.2.1.d et les préoccupations des spécialistes concernant les chargements appliqués.

1.2.1.a Le comportement élastique et les relations contraintes-déformations

Curieusement, le comportement élastique global des maçonneries a suscité peu d'attention de la part des expérimentateurs. Cela peut peut-être s'expliquer par le fait que l'on dimensionne généralement les structures maçonnées à la rupture. La connaissance des critères de rupture est alors fondamentale si l'on veut appliquer les méthodes du calcul à la rupture et chercher des états ultimes.

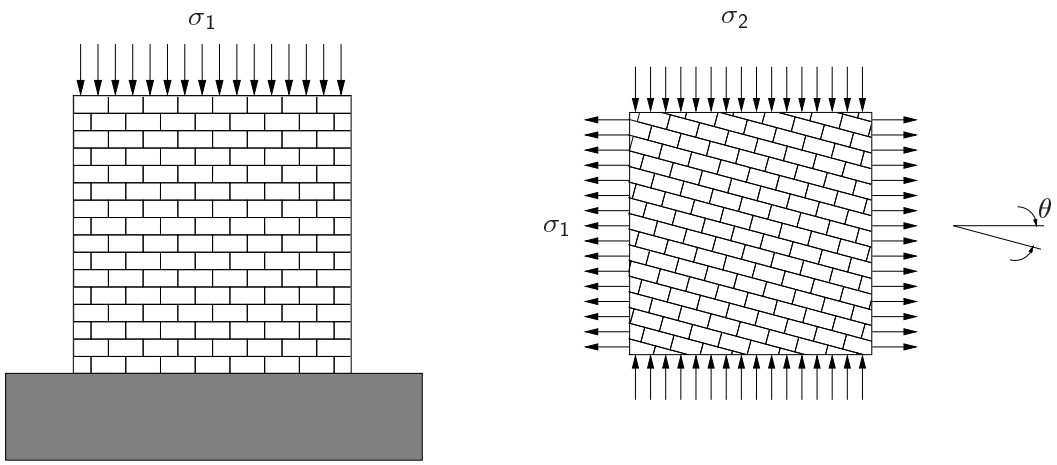
On représente sur la figure 1.9 un essai de compression uniaxial perpendiculaire aux joints de lit. A partir de ce type de courbes, de nombreuses formules empiriques ont été proposées pour évaluer, dans le cas général, les propriétés élastiques des maçonneries à partir de leur résistances ultimes en compression. Donnons par exemple, la formule retenue dans l'Eurocode 6 :

$$E_s = 1000\sigma_c \quad G = 0,4E_s$$

Le module de cisaillement G correspond à une valeur du coefficient de Poisson choisi à 0.25.

Bien que la cohérence mécanique de ces formules soit plus que discutable, elles sont utilisées dans beaucoup de normes de construction. Nous verrons dans le § 4.1 que des approches théoriques comme l'homogénéisation permettent d'obtenir des expressions rigoureuses des caractéristiques élastiques en fonction des composants, en particulier, dans le cas des appareils réguliers.

Les relations complètes contraintes-déformations sont rarement rapportées dans leur intégralité. Si l'on reprend la figure 1.9, les valeurs recherchées sur ce type d'essai sont la contrainte



(a) Évaluation de la résistance en compression uniaxiale des maçonneries

(b) Essai général biaxial - Etude de l'anisotropie induite par θ

FIGURE 1.10 – *Essais sous des états de contraintes homogènes*

maximale ou critique σ_m et la déformation ultime ϵ_u. L'Eurocode 6 donne des valeurs approximatives ne tenant pas compte des constituants de la maçonnerie : $\epsilon_m = 0,002$ et $\epsilon_u = 0,00035$.

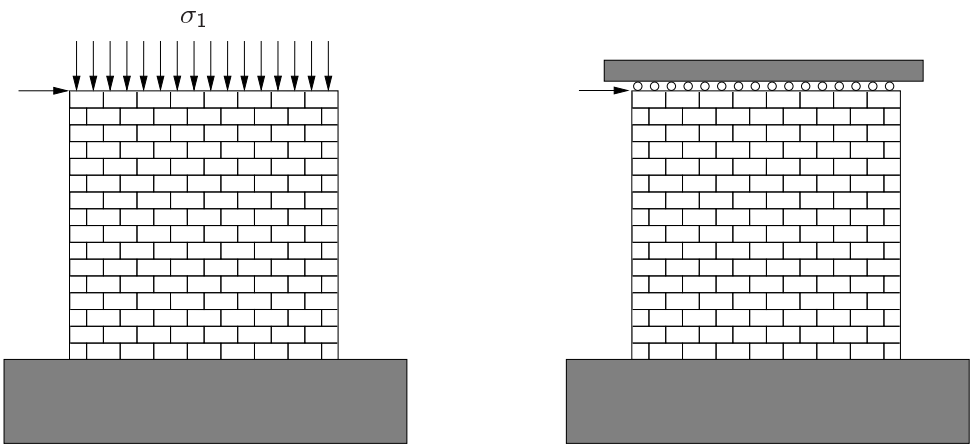
1.2.1.b Les essais mécaniques sur les panneaux

Les tests décrits dans cette partie sont les tests traditionnellement pratiqués pour mesurer les résistances ultimes des maçonneries. Ils sont réalisés sur des panneaux dont la taille caractéristique est au moins d'un ordre supérieur à la dimension caractéristique des éléments.

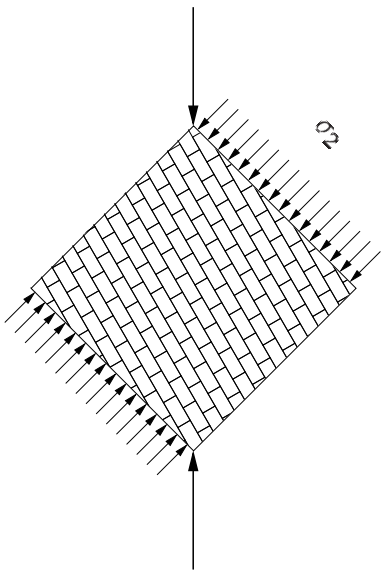
Essais sous des états de contraintes homogènes. A l'image des essais pratiqués sur des matériaux homogènes, une première classe d'essais met en jeu un état de contraintes homogènes en moyenne dans le panneau. L'essai uniaxial le plus couramment pratiqué est le test de compression (*voir* figure 1.10(a)). Comme nous le verrons par la suite, les essais de traction se font rarement en traction directe. Ils sont en effet difficilement reproductibles et très sensibles aux conditions de mise en oeuvre. Les essais biaxiaux sont réalisés, quant à eux, en double compression ou traction-compression. Pour les mêmes raisons, ils sont rarement pratiqués en double traction directe.

Ces tests sont aussi bien réalisés sur du blocage que sur des appareils. Pour les essais biaxiaux, l'influence sur l'anisotropie de la maçonnerie de l'angle d'assises θ, par rapport aux contraintes principales dans le panneau, est souvent étudiée (*voir* figure 1.10(b)).

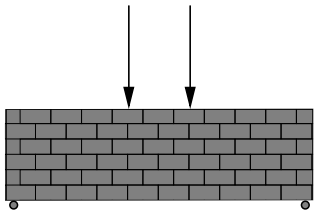
Essais sous des états de contraintes hétérogènes. Le but de ces essais est de simuler des chargements réels qui peuvent être rencontrés dans les structures (*voir* figure 1.11). Ils per-



(a) Essais de cisaillement



(b) Essai brésilien



(c) Essai de flexion 4 points

FIGURE 1.11 – *Essais sous des états de contraintes hétérogènes*

mettent aussi des mesures indirectes de résistances à la traction. A l'inverse des essais précédents, l'état des contraintes est hétérogène et n'est pas déterminé statiquement (i.e. il dépend de la loi de comportement moyenné dans le panneau). Ces tests sont particulièrement intéressants pour révéler les effets de la microstructure sur la réponse mécanique de la structure globale sous un chargement donné. Par contre, ils sont difficilement exploitables pour extraire une information pertinente sur les grandeurs mécaniques intrinsèques des éléments.

1.2.1.c Critères uniaxiaux

De nombreux critères uniaxiaux sont présents dans la littérature. De part leur dépendance aux matériaux utilisés, il est difficile de dégager un critère caractéristique uniaxial pour les maçonneries. Nous nous contenterons de donner ici un exemple de critère semi-empirique.

L'un des premiers critères est dû à Hilsdorf (1969). Considérant un prisme identique à celui de la figure 1.5, on note les grandeurs associées aux briques par un exposant b et respectivement pour les mortiers par un exposant m. Le rapport entre l'épaisseur du joint et la hauteur de la brique est exprimé par le coefficient $\alpha = \frac{h^m}{h^b}$. Enfin, l'auteur suppose un état de contraintes satisfaisant les équations d'équilibre sous une pression imposée p :

$$\boldsymbol{\sigma}^b = \begin{bmatrix} \sigma^b & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^b & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\sigma}^m = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^b}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^b}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}. \tag{1.2.1}$$

L'hypothèse d'un critère de rupture de Mohr-Coulomb pour la brique et le mortier nous conduit à :

$$\frac{\sigma^b}{\sigma_T^b} + \frac{p}{\sigma_C^b} \leq 1 \qquad -\frac{\sigma^b}{\alpha\sigma_T^m} + \frac{p}{\sigma_C^m} \leq 1 \tag{1.2.2}$$

On obtient une expression de la pression maximale admissible par le prisme sous la forme suivante :

$$p_{max} = \sigma_C^b \frac{\sigma_T^b + K\sigma_C^m}{\sigma_T^b + K\sigma_C^b} \quad \text{avec } K = \alpha\frac{\sigma_T^m}{\sigma_C^m} \tag{1.2.3}$$

Ce critère bien que rudimentaire est cohérent avec les modes de rupture observés : rupture initiée par les fissures verticales et la fracture des éléments, rupture en compression des mortiers. De plus, il précise l'influence de certains paramètres. Clairement, la résistance ultime augmente avec la résistance de ses constituants et avec la diminution de l'épaisseur de mortier par rapport à la hauteur des briques (diminution de α).

De nombreuses améliorations de ce critère ont été proposées[2]. En particulier, Biolzi (1988) propose un état de contraintes cinématiquement admissible obtenu par voie numérique.

1.2.1.d Critères biaxiaux

Pour des maçonneries de type blocage, on note peu d'anisotropie lors de tests biaxiaux. Il en est de même pour les maçonneries renforcées ou fortement chaînées. On obtient alors des critères de rupture isotropes similaires à ceux obtenus pour le béton (*voir* figure 1.12).

Comme on l'a précisé précédemment, les critères biaxiaux permettent de mettre en évidence l'anisotropie engendrée par l'appareil. Cette anisotropie est principalement due à la faiblesse relative des joints devant les éléments. Elle peut être accentuée par l'anisotropie éventuelle des éléments (briques creuses, agglomérés). Nous donnons ici quelques résultats caractéristiques d'essais biaxiaux dus à Page (1980, 1981, 1983).

2. On peut en effet remarquer que le précédent état de contraintes ne respecte pas les conditions aux limites sur les surfaces latérales.

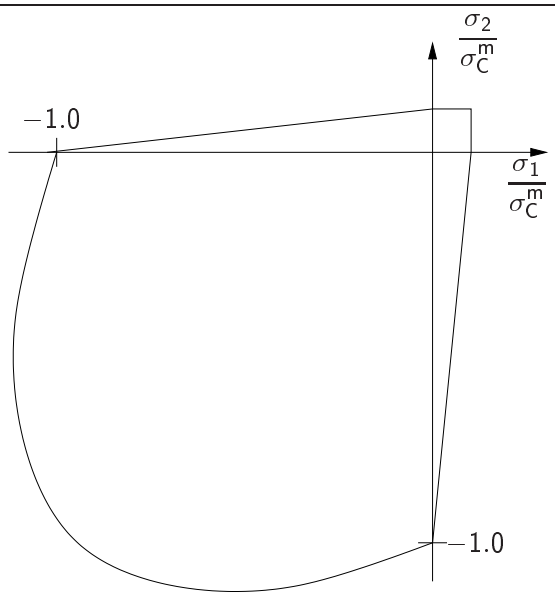


FIGURE 1.12 – *Critère de rupture biaxial isotrope*

Sur la figure 1.13, on représente le critère de rupture projeté dans le plan (σ_1, σ_2) pour un essai de traction compression. On note que le critère de rupture décroît brutalement avec l'angle. Pour un angle de $\theta = 90°$, on retrouve un essai de traction directe où l'on peut constater que le seuil de rupture varie linéairement avec la pression de confinement. L'ensemble des autres courbes présente une concavité plus ou moins marquée souvent synonyme de rupture fragile. Selon PAGE (1983), la rupture se produit principalement suivant des plans normaux au panneau, dans des mécanismes mettant en jeu le plus souvent la rupture des joints, en particulier, lorsque la compression est faible.

Sur la figure 1.14, on illustre d'après (PAGE, 1981) les critères de rupture biaxiaux en double compression en fonction de θ. Pour la plupart des rapports de contraintes σ_1/σ_2, la rupture se produit des plans parallèles aux surfaces libres du panneau. Comme nous l'avons évoqué au § 1.3, ce faciès de rupture est caractéristique des géomatériaux quasi-fragiles. Ce mode de rupture est aussi couramment rencontré dans le cas des murs composites ou fourrés ; les interfaces entre les couches créant des surfaces mécaniquement faibles. Si une contrainte principale domine, la rupture s'effectue de manière orthogonale aux surfaces libres, par glissement et rupture dans les joints. Dans ce dernier cas, l'anisotropie due à l'orientation des joints joue un rôle important, qui est renforcé par l'anisotropie induite des joints fracturés.

Si on laisse de coté les méthodes purement empiriques où les critères sont approchés par des surfaces sans interprétation mécanique supplémentaire, la plupart des critères sont construits en s'inspirant de remarques d'ordre phénoménologique en combinant des critères associés au mode de rupture observés.

La plus simple de ces approches consiste à postuler un critère en traction maximum sur les contraintes principales. Les valeurs de contraintes sont mesurées sur des essais biaxiaux de traction-compression. La simplicité de ce critère permet une mise oeuvre aisée en ce qui concerne

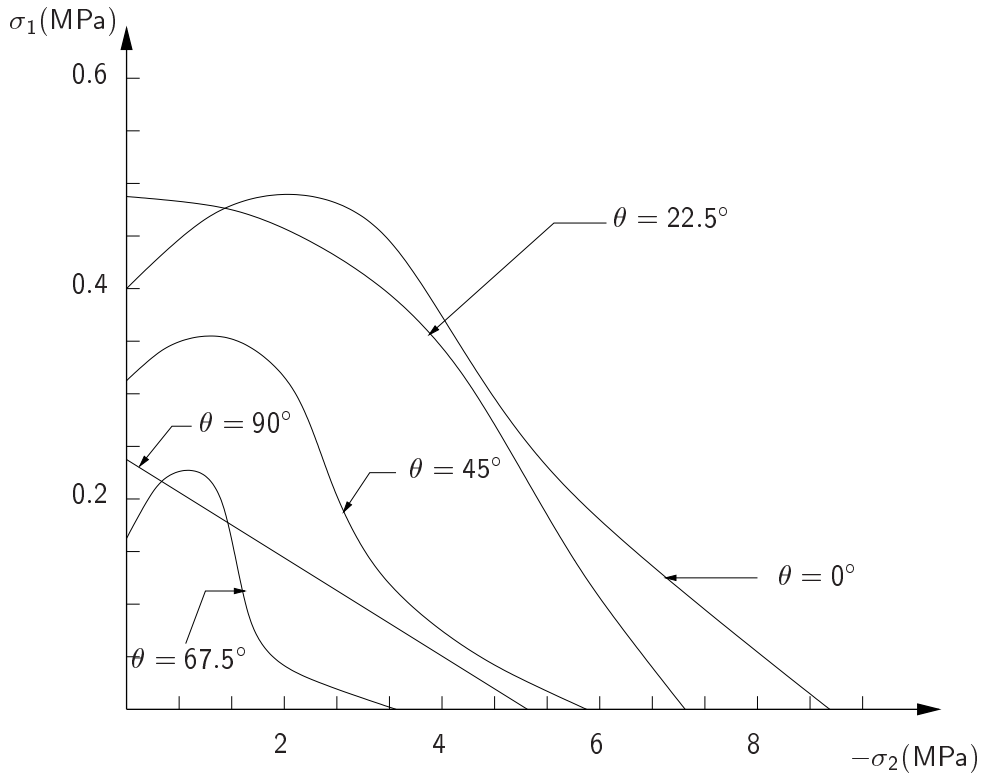


FIGURE 1.13 – *Test biaxial traction-compression (d'après (*PAGE, *1983))*

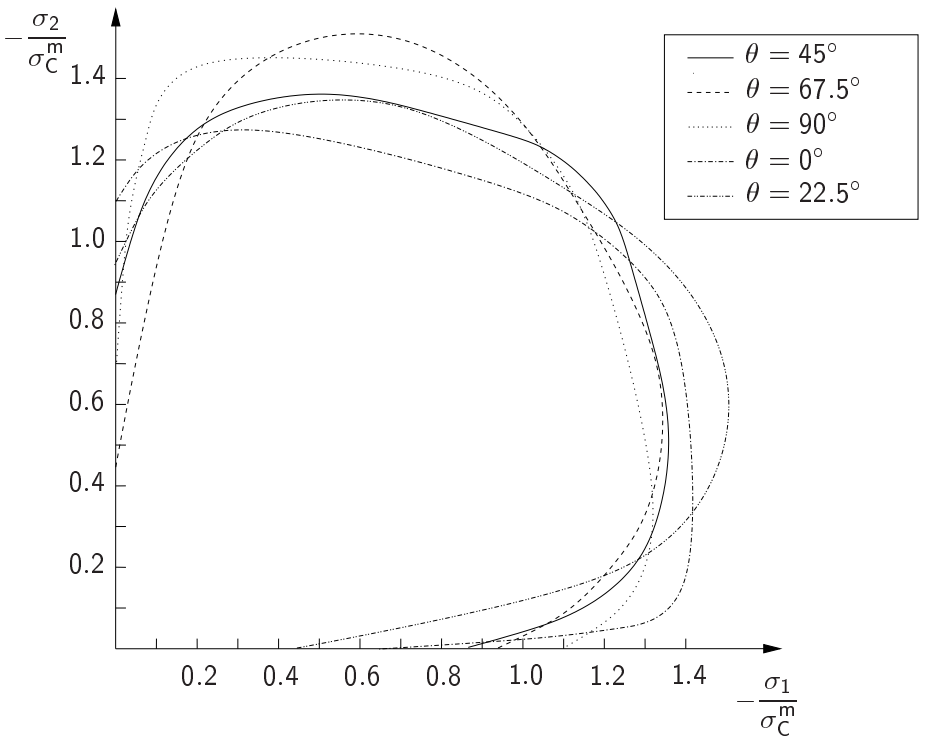


FIGURE 1.14 – *Test biaxial de double compression (d'après (*PAGE, *1981))*

le dimensionnement des structures. Malheureusement, la validation de ce type de critère sur des tests sous contraintes hétérogènes s'avère généralement mauvaise. On obtient souvent des valeurs de contraintes maximales qui dépendent davantage des tests que des matériaux eux-mêmes. Plus que le mode de rupture et son critère associé, c'est le calcul des contraintes dans les panneaux sollicités qui est à remettre en cause. Ce calcul souffre le plus souvent d'hypothèses trop simplificatrices sur l'état local des efforts internes dans le panneau. Nous verrons dans la suite que ce type de critère a été utilisé avec succès pour des modélisations analytiques et numériques des maçonneries dans le cadre de l'analyse limite. Ces méthodes sont regroupées sous le terme de « No-Tension Material » (*voir* § 2.1.2).

Yokel & Fattal (1976) proposent un critère de rupture combinant un critère de rupture sur une combinaison linéaire des contraintes principales et une loi de frottement de Coulomb pour représenter le mode de rupture des joints. Ces critères sont écrits en contraintes moyennées sur un élément de volume représentatif. En ce sens, le critère de coulomb ne coïncide pas avec le critère de rupture mesuré sur un joint.

Dans le même esprit, Hamid & Drysdale (1981) ont proposé un critère se basant sur l'intersection de trois surfaces limites de rupture : rupture des blocs, fissures des joints montants et rupture des joints de lits. De nombreux autres critères ont été développés basés sur la combinaison de surfaces seuil. Le principal problème de ces méthodes est que l'on arrive rapidement à des situations physiquement incompatibles et très restrictives.

1.2.2 La maçonnerie comme une structure hétérogène

Un point vue complémentaire aux démarches précédentes vise à en prendre en compte le caractère hétérogène et la microstructure, i.e., la structure de l'appareil, sur le comportement global des maçonneries. A notre connaissance, peu de travaux expérimentaux ont été effectués en ce sens.

La difficulté majeure de telles études est l'interaction forte qui existe entre la microstructure et les caractéristiques de la structure globale (géométrie et conditions aux limites). Du fait de cette dépendance entre les échelles, il devient dès lors très difficile de dégager des traits de comportement communs à une large classe de maçonneries.

La diversité et la « complexité » des structures obligent des études au cas par cas au moyen de méthodes adaptées. Dans cet esprit, Heyman (1966, 1967b,a, 1972, 1976, 1980b,a, 1988, 1992c,b,a, 1995, 1996) campe bon nombre de résultats et de remarques valables pour des larges classes de structures et ceci sans faire appel à des modèles de comportement sophistiqués. Heyman propose une description et une interprétation du comportement de structures composées de blocs (voûtes, dômes, piliers, arcs-boutants, murs porteurs, pinacles, *etc*...) en s'attachant particulièrement à leurs géométries et aux chargements qui leur sont habituellement associés. Les lois de comportement décrivant matériaux sont simplifiées pour représenter les principales caractéristiques de l'unilatéralité dans les maçonneries. Il s'agit avant tout d'expliquer les phénomènes de rupture et de ruine au moyen des équations d'équilibre. Nous n'entrerons pas ici dans

le détail des résultats dus à HEYMAN et ceci pour deux raisons : d'une part, cela nécessiterait une présentation détaillé par classe de structure qui pourrait devenir fastidieuse devant l'immense travail réalisé par ce chercheur, d'autre part, une présentation hâtive risquerait d'être erronée en ce sens que chaque étude de classe comporte de nombreuses particularisations à des géométries précises. Pour une présentation détaillée de ses principaux résultats, nous renvoyons le lecteur intéressé à ses deux ouvrages de synthèse (HEYMAN, 1995, 1996).

Concernant les aspects expérimentaux attachés au comportement globaux des structures maçonnées, (ROSSI, 1997) passe en revue les techniques d'investigation *in situ* permettant l'accès aux états de contraintes et déformations dans les monuments. Ces méthodes expérimentales sont une voie alternative et complémentaire aux modélisations mécaniques pour comprendre le comportement global des structures. Une nouvelle difficulté apparaît néanmoins. En effet, les informations locales même présentes en grand nombre sont très dures à analyser et à corréler pour obtenir des résultats globaux à l'échelle de la structure.

Nous verrons comment dans la suite ces aspects des comportements structuraux globaux des maçonneries peuvent être déduits de considérations locales ou micromécanique grâce à l'utilisation de modélisations adaptées (cf § 3 et § 4).

1.2.3 Bilans sur les comportements globaux des maçonneries

Les comportements qui ont été décrits dans le § 1.2.1, s'attachent à rendre compte du comportement global de ce que pourrait être la maçonnerie en tant que matériau à part entière. Lorsque nous aborderons la question du choix d'un modèle mécanique et d'une échelle de description, nous verrons que cette façon de considérer les maçonneries n'est pas innocente.

Les nombreuses hypothèses restrictives, pour la plupart implicites ou considérées parfois comme naturelles, montrent le parti pris de considérer la maçonnerie comme un milieu continu et homogène. Par exemple, les structures traitées dans les précédents essais sont assez neutres du point de vue de leur aspect géométrique ; les géométries des structures testées (panneau rectangulaire, prisme, *etc.*...) sont choisies pour fournir un état de contraintes relativement homogène, tout au moins bien défini en chaque point de la structure. Le but de ces tests expérimentaux est de déterminer les lois de comportement sur un volume élémentaire représentatif de l'état moyenné. Ces lois seront très utiles pour la construction des modèles macroscopiques des maçonneries (cf 2).

Malheureusement, les résultats de telles études restent souvent borner à l'estimation de critère de rupture. Les phénomènes inélastiques sont, en effet, rarement décrits. Sur ces seules informations, il est difficile de construire des modèles de comportement représentatifs. Pour cela, nous proposons au § 1.3 de replacer les maçonneries dans le contexte plus général des géomatériaux quasi-fragiles.

1.3 La maçonnerie comme un géomatériau quasi-fragile

On considère, dans cette partie, la maçonnerie comme un géomatériau quasi-fragile. Nous verrons, au § 1.3.1, quelles sont les motivations qui nous poussent à replacer la maçonnerie dans le contexte des géomatériaux. Il s'agit avant tout de mettre en évidence des réponses mécaniques, plus fines, que les simples critères de rupture exposés dans la partie précédente.

On donne, ensuite, quelques éléments de la mécanique et de la physique des géomatériaux (roches, matériaux granulaires, *etc.*...) et de matériaux analogues quant à leur comportement mécanique (béton, brique, mortier,...) que l'on qualifiera par la suite de géomatériaux artificiels. Cette présentation succincte a pour but de dégager les principaux traits communs à la majeure partie de ces matériaux et de leurs composites (échelles de description, mécanismes dissipatifs, *etc.*...).

1.3.1 Motivations d'une telle assimilation

Les motivations qui nous poussent à exhiber leurs caractéristiques mécaniques communes sont les suivantes :

- Tout d'abord, la maçonnerie est en quelque sorte un géomatériau composite. Ses constituants, si l'on excepte les chaînages métalliques, sont soit des géomatériaux naturels — calcaire, granit, marbre pour les éléments, sable, galets pour les agrégats des mortiers, terre, argile pour les liants des mortiers —, soit des géomatériaux artificiels — agglomérés ou briques pour les éléments, ciment, chaux pour les liants des mortiers — (voir § 1.1).
- Les géomatériaux sont unis par de nombreuses caractéristiques mécaniques, qui sont le plus souvent révélatrices d'une physique similaire. Par exemple, la cohabitation et l'interaction de l'endommagement fragile et de la plasticité non associée de Mohr-Coulomb sont une signature de leur comportement typique. Une présentation synthétique concernant les géomatériaux dans leur généralité ne peut que favoriser une compréhension plus globale des maçonneries. Ces comportements seront présentés au § 1.3.2.
- Les modélisations des maçonneries, qui vont être présentées (§ 2, § 3 et § 4) sont pour la plupart des adaptions de méthodes issues des travaux de modélisation des géomatériaux. On pense en particulier à la mécanique des roches et aux modélisations du béton et des matériaux granulaires. Cette présentation va donc permettre de situer les modélisations dans leur contexte, et d'estimer leurs pertinences par rapport à la physique des phénomènes.
- Enfin, les travaux relatant les aspects physiques des phénomènes inélastiques concernant directement les maçonneries sont rares. On renvoie généralement à ce sujet aux travaux sur les géomatériaux.

1.3.2 Les phénomènes inélastiques dans les géomatériaux quasi-fragiles

1.3.2.a Définition de trois échelles d'étude

Les géomatériaux se présentent comme des milieux hétérogènes et microfissurés. Le degré d'hétérogénéité des géomatériaux peut être décrit à trois échelles différentes :

- Une *échelle macroscopique* peut tout d'abord être introduite ; c'est l'échelle de la structure. Elle peut, bien sûr, avoir des tailles caractéristiques assez variées. Dans le cadre de notre travail pour les matériaux de construction, elle sera de l'ordre du mètre[3]. A cette échelle, bon nombre de géomatériaux peuvent être considérés comme homogènes[4].
- Une *échelle microscopique* peut ensuite être définie. C'est la plus petite échelle du mécanicien des milieux continus, dans le sens où, une fois cette limite inférieure franchie, il devient difficile de parler de milieux continus. A cette échelle, de l'ordre du micromètre pour nos matériaux, tous les géomatériaux présentent une forte hétérogénéité caractérisée par une microstructure à la fois chaotique et aléatoire. On est bien loin de la structure en treillis des polycristallins métalliques. On note à cette échelle la présence de nombreuses microfissures le plus souvent dues aux modes de formation ou de fabrication de ces matériaux.
- Une *échelle mésoscopique* peut être associée aux géomatériaux composites. Il s'agit d'une échelle intermédiaire liée à la taille moyenne des constituants de ce composite ; pour le béton et le mortier, cette échelle sera reliée à la taille des granulats employés dans leur fabrication, pour la maçonnerie, elle sera reliée à la taille des éléments ou des joints.

Ces différentes échelles peuvent être mêlées en particulier dans les cas des composites.

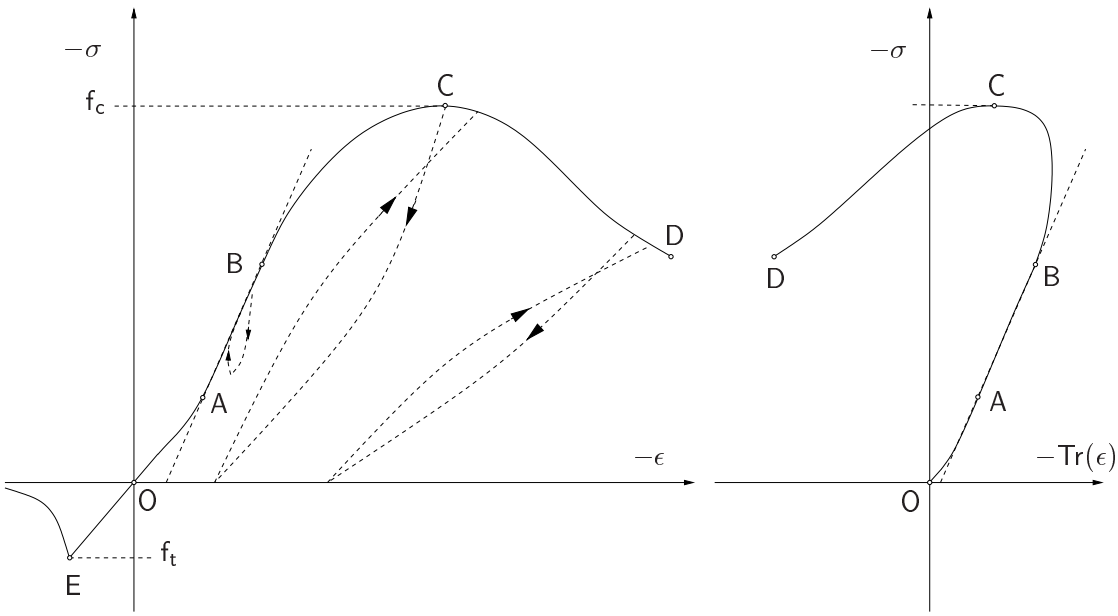
1.3.2.b Description des essais de traction et compression des géomatériaux

Décrivons maintenant un essai de compression caractéristique d'un géomatériau. Cette description peut se faire en quatre phases illustrées sur la figure 1.15 :

1. Une première phase (portion OA Figure 1.15) correspond à la fermeture des microfissures présentes initialement dans le matériau. Il s'agit d'un comportement unilatéral de restauration des modules élastiques. Cette phase peut être plus ou moins courte suivant la densité initiale des microfissures. Elle est particulièrement importante pour les roches, ou les bétons de mauvaise qualité. Elle se traduit par une concavité de la réponse $\boldsymbol{\sigma}$-$\boldsymbol{\epsilon}$, synonyme d'une augmentation de la rigidité tangente.
2. La deuxième phase (portion AB Figure 1.15) est une phase de réponse linéaire $\boldsymbol{\sigma}$-$\boldsymbol{\epsilon}$ en charge. Les caractéristiques élastiques macroscopiques ne changent pas. L'éprouvette se comprime et l'on remarque un glissement à seuil des lèvres de microfissures les plus inclinées sur l'axe de compression.

   Si l'on effectue une décharge, on constate d'abord que le matériau est plus raide. Ceci

3. Pour les massifs rocheux, on parle en dizaine de mètres ; pour la tectonique des plaques, on parle en kilomètres.
4. On peut toutefois faire exception des maçonneries cyclopéennes, appareils de joints-vifs constitués d'énormes blocs de pierre.



(a) Courbe $\sigma - \epsilon$ caractéristique (b) Mesure de la dilatance

FIGURE 1.15 – *Comportement d'un géomatériau quasi-fragile, d'après (*DRAGON & MRÓZ*, 1979)*

peut s'expliquer par le fait que le glissement est bloqué tant que la contrainte normale sur les lèvres des fissures n'a pas sensiblement diminuée. Le matériau s'assouplit ensuite pour retrouver sa raideur initiale. Ce phénomène est caractérisé par une hystérésis de charge-décharge, qui, notons-le, ne peut pas être pris en compte par de la plasticité standard. Il peut en revanche être pris en compte par des modèles d'endommagement.

3. La troisième phase (portion BC Figure 1.15) correspond à la propagation stable des fissures. La courbe reste quasi-linéaire pour des matériaux mésoscopiquement homogènes comme les roches, mais cesse d'être linéaire pour les composites comme le béton. Dans ce dernier cas, on note donc une diminution des modules de rigidité tangents. La déformation latérale et volumique ne varie plus linéairement ce qui se traduit par une augmentation du coefficient de Poisson apparent ou si l'on préfère de la dilatance.

4. La dernière phase (portion CD Figure 1.15) correspond à la propagation instable des fissures jusqu'à la ruine. On constate alors que la coalescence des fissures peut former des macro-fissures qui aboutiront à la ruine du matériau.

Il est important de souligner que ces phases ne sont pas toujours clairement identifiées et distinctes suivant le type de géomatériau considéré. De même, lorsque qu'une pression de confinement latérale est imposée, on note l'élargissement de la phase de propagation stable des fissures et l'on rend de fait la dégradation plus « ductile ».

En ce qui concerne les essais de traction, la phase de fermeture de fissures est pratiquement absente. La phase de propagation stable des fissures laisse rapidement place à une propagation instable et à la ruine de l'éprouvette (portion OE Figure 1.15). On obtient alors une réponse globale élastique fragile.

1.3.2.c Eléments d'interprétations

Deux phénomènes inélastiques principaux Nous avons pu constater à travers la description précédente d'un essai de compression que les phénomènes physiques mis en jeu étaient complexes. Ils sont le résultat de la combinaison non linéaire de deux principaux phénomènes :

1. un mécanisme d'ouverture, de refermeture, et de propagation des microfissures ;
2. un écoulement plastique de type glissant avec frottement.

Le premier phénomène engendre une forte dégradation des caractéristiques élastiques du matériau dans les directions orthogonales aux directions moyennes des fissures. Cette dégradation n'est toutefois pas irréversible, bien que la microfissuration le soit ; les microfissures peuvent en effet se refermer, entraînant alors la restauration des modules d'élasticité. Sous l'action des sollicitations, les fissures peuvent se propager et se réorienter ; leurs directions moyennes évoluent induisant alors une anisotropie de la réponse élastique du matériau. Ce phénomène peut être décrit par la mécanique de l'endommagement des matériaux. Il faut souligner toutefois que ce phénomène interagit avec deux autres phénomènes dissipatifs qui sont le glissement des lèvres des fissures et la déformation plastique de la matrice englobant les microfissures.

Le deuxième phénomène intervient à la fois dans la plasticité des agrégats et, comme nous venons de l'évoquer, dans le frottement des lèvres des microfissures. La plasticité des agrégats est une plasticité non associée avec dilatation et adoucissement. Elle est la marque de fabrique des géomatériaux comme les sols, les roches et les matériaux granulaires qui présentent des phénomènes de frottement interne. On alors à faire avec une plasticité non associée de Mohr-Coulomb (Drucker, 1954). On parle souvent d'ailleurs de matériau cohésif à frottement interne, pour qualifier cette classe de matériau.

Notons toutefois que dans le cas de la traction pure, le phénomène d'ouverture et de propagation des fissures est prépondérant et déterminant devant les phénomènes plastiques.

Influence de l'hétérogénéité et de la microstructure sur ces phénomènes L'hétérogénéité des géomatériaux renforce l'interaction entre ces phénomènes. Si l'hétérogénéité est présente à l'échelle mésoscopique, l'interaction entre ces phénomènes irréversibles devient alors très forte et conduit à des comportements macroscopiques atypiques. On peut citer par exemple le développement des fissures dans des plans parallèles à la direction de compression uniaxiale. Même en présence d'une pression de confinement, ces déformations peuvent avoir lieu. A l'échelle macroscopique, si l'on ne prend pas garde, on peut alors conclure de façon erronée à la violation du deuxième principe de la thermodynamique ou du postulat de stabilité de Drucker (1959). Un deuxième exemple de comportement atypique est la présence des hystérésis dans les cycles

de charge-décharge sans plasticité, ni viscosité apparentes.

Ces phénomènes sont pour la plupart dus à des effets de structure ou si l'on préfère de méso/microstructure. En considérant le caractère hétérogène du matériau, le développement de fissures parallèles peut alors s'expliquer à l'aide de lois de comportement usuelles. De même, les hystérésis peuvent s'expliquer par la présence de contraintes résiduelles auto-équilibrées à la suite d'écoulement plastique dans un milieu hétérogène. Nous aborderons cet aspect dans la partie concernant l'homogénéisation des milieux hétérogènes à constituants dissipatifs (cf. § 4.4 et § 4.5.1).

1.4 Conclusions et enjeux pour les modélisations

Au début de ce chapitre, une présentation des différents types de maçonnerie a été faite à travers une nomenclature succincte. Elle conduit à une première conclusion d'ordre général : le terme « maçonnerie » recouvre une grande diversité de matériau du point du comportement mécanique et ceci, principalement en raison de la diversité des constituants et de leurs arrangements. Il convient donc de prendre garde au type de maçonnerie auquel on s'intéresse. Le caractère hétérogène et la structure cristalline de l'appareil si il existe peuvent profondément modifier le comportement mécanique global.

L'ensemble des travaux expérimentaux qui ont été recensés considère la maçonnerie comme un matériau, à part entière, homogène et continu. Implicitement, le caractère hétérogène et microstructurel est alors négligé au profit d'une description phénoménologique macroscopique. Les résultats de ce type d'essais sont souvent bornés à l'estimation de critère de rupture et peu d'informations sont données sur les phénomènes inélastiques qui se produisent dans le matériau. Ceci est peut être le résultat de l'hypothèse homogénéité du matériau maçonnerie qui est très restrictive.

Afin de mieux comprendre les phénomènes inélastiques qui peuvent se produire, le comportement mécanique des maçonneries a été réplacé dans le contexte plus général des géomatériaux quasi-fragiles. Deux conclusions principales émergent dans ce travail :

- La prise en compte de plusieurs échelles d'études semble s'imposer si l'on veut décrire le comportement des maçonneries. Dans le (§ 1.3), trois échelles principales ont été mises en évidence : une échelle macroscopique, une échelle mésoscopique et une échelle microscopique. A chacune de ces échelles, des hypothèses doivent être faites conférant à la maçonnerie un caractère homogène ou hétérogène, continu ou discret.
- Deux phénomènes inélastiques caractérisent le comportement de la maçonnerie à ces différentes échelles. Le premier est l'endommagement fragile et le second la plasticité non associée. Ces phénomènes sont intimement couplés et conduisent à des comportements globaux complexes.

Les enseignements qui peuvent être tirés de ces conclusions sommaires, sont à la base des modélisations qui seront présentées dans les chapitres suivants. Nous donnerons un aperçu au chapitre 2, des modélisations qui relèvent le défit d'une modélisation uniquement à l'échelle macroscopique, en s'appuyant sur des considérations phénoménologiques censées représenter l'influence des échelles plus fines. Ces approches sont essentiellement continues. Au chapitre 3, nous évoquerons les modélisations qui s'appuient sur des considérations mécaniques fortes pour décrire les comportements des maçonneries. Ces approches, quant à elles, sont soit continues soit discrètes.

CHAPITRE 2

Modélisations macro-mécaniques des structures maçonnées

———————— oOo ————————

Comme nous l'avons dit en guise de préambule à cette partie, les structures maçonnées peuvent être décrites à des échelles différentes selon le point de vue que leur accorde l'observateur. Pour ce qui nous intéresse, l'observateur est un mécanicien, qui cherche à modéliser le plus précisément possible sa structure. Dans ce chapitre, il se placera à une échelle où l'on peut considérer la structure comme homogène et continue [a]. On entendra alors le terme « maçonnerie » comme un matériau constitutif de la structure, dont la particule élémentaire sera caractérisée par une loi de comportement homogène. Cette loi reliera les efforts intérieurs, ou si l'on préfère les contraintes, aux déformations dont la définition classique est pertinente dès lors que l'hypothèse de continuité et de différentiabilité est supposée. Les principales hypothèses de comportement seront passées en revue, en s'attachant à décrire leurs avantages et leurs inconvénients dans la modélisation mécanique des maçonneries.

[a] sous entendu différentiable en espace comme cela est le cas usuellement en mécanique des milieux continus

———————— oOo ————————

Plan du Chapitre 2

2.1 Calcul à la rupture, analyse limite et « No–Tension Material » 38
2.1.1 Historique sur l'estimation des charges extrêmes des structures maçonnées . . . 38
2.1.2 Les « No–Tension Material (NTM) » — Equations constitutives . . 43
2.1.3 Remarques sur la nature des comportements modélisés : Plasticité ou élasticité non linéaire? . . . 47
2.1.4 Traitements mathématique et numérique des NTM . . . 50
2.1.5 Synthèse sur l'analyse limite et les NTM . . . 52
2.2 Modélisations numériques en élasticité linéaire . . . 53
2.3 Modélisations en plasticité non associée . . . 54
2.3.1 Un modèle de plasticité orthotrope avec adoucissement . . . 54
2.3.2 Commentaires . . . 58
2.4 Modélisations en endommagement . . . 58
2.4.1 Présentation succincte de l'endommagement scalaire . . . 59
2.4.2 Une application à la maçonnerie de l'endommagement scalaire . . . 59
2.4.3 Commentaires . . . 61
2.5 Modèles couplés endommagement-plasticité . . . 62
2.5.1 Plasticité associée et endommagement fragile en traction . . . 62
2.5.2 Plasticité et endommagement fragile en traction et compression . . 65
2.5.3 Commentaires . . . 67
2.6 Problèmes liés à la modélisation de l'adoucissement . . . 68
2.6.1 Instabilités matérielles et problèmes numériques associés . . . 68
2.6.2 Solutions pour répondre à ces problèmes . . . 71
2.6.3 Conclusion sur les méthodes de régularisation . . . 76
2.7 Les milieux de Cosserat et les structures composées de blocs . 77
2.7.1 Aperçu de la cinématique . . . 77
2.7.2 Applications aux structures composées de blocs . . . 78
2.8 Conclusion sur les modélisations macromécaniques . . . 81

Parmi toutes les lois de comportement qui ont été écrites pour la maçonnerie, la plus connue est certainement celle concernant les matériaux ne supportant pas la traction, désignée le plus souvent par son acronyme anglais : « No-Tension Materials »(NTM). Ce type de modèle s'appuie sur la constatation expérimentale assez générale de la faible tenue en traction de la maçonnerie, en particulier, des joints. Ce comportement idéalisé sera l'objet du § 2.1. Nous montrerons comment cette hypothèse peut être exploitée dans le cadre du calcul à la rupture et de l'analyse limite moyennant quelques précautions (§ 2.1.1). Ensuite, nous présenterons les équations constitutives des NTM (§ 2.1.2) qui nous mènerons à une discussion (§ 2.1.3) sur la nature mécanique de ses équations et le cadre dans lequel elles peuvent être considérées — Plasticité ou élasticité non-linéaire ? Enfin, des aspects de leurs traitements numériques seront évoqués au § 2.1.4.

Ensuite (§ 2.2 à § 2.5), on présentera l'application des méthodes numériques, essentiellement éléments finis, aux calculs des structures maçonnées, tout d'abord pour un comportement linéaire (§ 2.2) puis dans le domaine non-linéaire. Nous n'entrerons pas, à proprement parlé, dans les détails numériques de la simulation des comportements non-linéaires mais nous nous attacherons plus aux hypothèses formulées et à l'écriture des lois de comportements choisies pour la maçonnerie. L'écriture de ces lois de comportement aurait pu être présentée indépendamment de leur mise en oeuvre numérique, mais nous verrons que ces étapes de la modélisation sont souvent intimement liées.

Ces modélisations sont pour la plupart issues des méthodes dédiées à l'étude des géomatériaux quasi-fragiles (roches, bétons, matériaux granulaires, *etc*...). Comme nous l'avons évoqué au § 1.3, elles s'attacheront à décrire deux grandes classes de comportement. La première de ces classes est la plasticité non associée ; elle sera traitée au § 2.3. La seconde correspond à la modélisation de l'endommagement fragile des matériaux ; il en sera question au § 2.4. Nous essaierons d'exhiber les différences fondamentales et, par là, les hypothèses qui sont faites sur la physique des phénomènes irréversibles matériels.

A l'instar des géomatériaux quasi-fragiles (cf. § 1.3), les deux comportements — endommagement fragile et plasticité — interagissent de manière non linéaire. Ceci est particulièrement vrai pour les maçonneries qui présentent de fortes hétérogénéités à l'échelle mésoscopique et microscopique. Nous verrons comment dans le § 2.5 certaines modélisations macroscopiques tentent de répondre à ce couplage entre les comportements.

Si l'ensemble de ces modélisations se distinguent par leurs hypothèses sur le comportement mécanique des maçonneries, elles se rejoignent sur un point au moins : le comportement adoucissant et la caractère non associé des lois. La partie 2.6 sera la partie la plus numérique de cet exposé des modélisations macromécaniques appliquées aux maçonneries. Nous nous attarderons, en effet, sur les problèmes liés à la modélisation de l'adoucissement, souvent synonyme de localisation de la déformation. Nous donnerons ensuite les solutions numériques usuellement proposées pour surmonter ces problèmes. En particluier, la théorie des milieux de Cosserat fera l'objet d'un paragraphe indépendant (§ 2.7), d'une part, parce qu'elle a été directement appliquée aux maçonneries, et d'autre part parce qu'elle fournit, à notre goût, une transition vers les méthodes micro-mécaniques, abordées au § 3.

2.1 Calcul à la rupture, analyse limite et « No–Tension Material »

Les notions fondamentales, la terminologie et les notations du calcul à la rupture et de l'analyse limite sont rappelées dans l'annexe A. On ne présentera dans cette partie que l'application de ces méthodes aux maçonneries.

2.1.1 Historique sur l'estimation des charges extrêmes des structures maçonnées

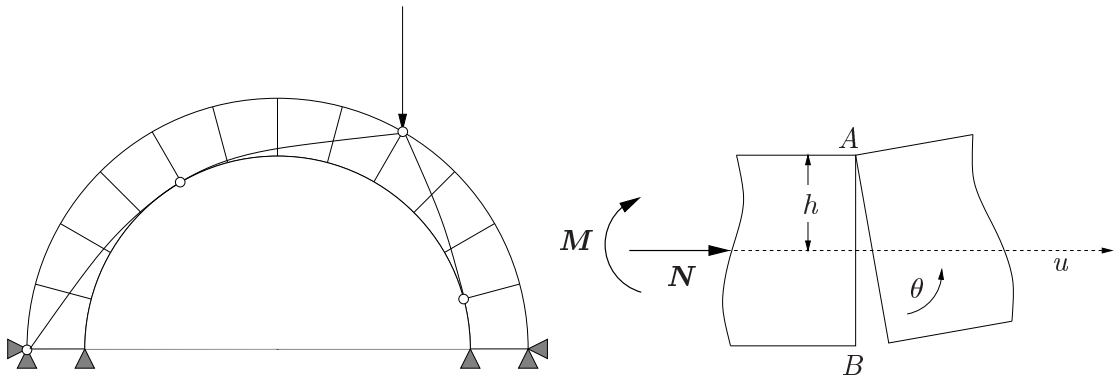
Fondements historiques du calcul à la rupture des maçonneries. C'est dans les travaux précurseurs de Coulomb (1773) que l'on trouve une des premières tentatives d'analyse des structures maçonnées par le calcul à la rupture. Les principes de base du calcul à la rupture y sont déjà dégagés. Coulomb analyse la tenue d'une structure en se fondant exclusivement sur les principes de la statique des solides et les propriétés de résistance propre du matériau. Il cherche alors la compatibilité pour les efforts intérieurs entre l'équilibre quasi-statique sous une charge extérieure donnée et les capacités de résistance du matériau. En particulier, il analyse la stabilité de voûtes et de poutres consoles maçonnées en introduisant la notion de joint de rupture. Pour le lecteur intéressé, ces travaux sont repris et commentés en détail dans (Heyman, 1972, Chap. 6).

Il n'est pas inutile de remarquer que la notion de matériau est prise au sens large par Coulomb. Sa définition contient, en effet, les caractéristiques mécaniques des volumes et des surfaces. C'est un parti pris qui sera conservé au cours de ce travail.

Les travaux sur les épures et les règles de descente de charges de Méry (1840), suivis des travaux de Durand-Claye (1867, 1880) sont dans la même lignée. Il s'agit, tout d'abord, de calculer les efforts intérieurs dus au poids propre en opérant une descente de charges, puis de les comparer aux capacités de résistance du matériau. La notion de ligne de poussée est introduite dans ces travaux comme l'enveloppe des lieux d'applications des résultantes des forces dans chaque section. Cette définition est bien sûr assez heuristique, mais elle permet une bonne interprétation de la mécanique des édifices. Une condition nécessaire à la stabilité s'écrit sous la forme d'une règle : les lignes de poussées doivent être contenues dans la matière. Delbecq (1981) présente un état de l'art très complet sur l'historique du calcul à la rupture et de la stabilité pour les voûtes en maçonnerie, de Coulomb à nos jours.

Le développement de l'analyse limite Il faut attendre les développements théoriques de la plasticité et de l'analyse limite pour voir ressurgir l'intérêt pour la modélisation des structures maçonnées.

Kooharian (1953) et Prager (1959) aborde, du point de vue de la plasticité, un exemple didactique tiré du mémoire de Coulomb (1773). Cet exemple traite de la stabilité d'une voûte composée de voussoirs rigides (*voir* figure 2.1(a)) à laquelle des charges concentrées sont appliquées. En l'absence de glissement, les désordres possibles sont dus à la séparation des joints entre les voussoirs par rotation autour d'une des deux arêtes. Si on l'on nomme u la vitesse relative



(a) Ligne de poussée & mécanisme de ruine

(b) Cinématique du joint entre deux voussoirs, d'après (Kooharian, 1953)

Figure 2.1 – *Voûte & analyse limite*

entre les voussoirs le long de la ligne moyenne et θ la vitesse de rotation linéarisée autour de l'arête A, les seuls mouvements possibles sont :

$$u > 0, \quad \|\theta\| = \frac{u}{h}\,. \tag{2.1.1}$$

A ces vitesses, nous pouvons associer les efforts mis en dualité par la puissance du mécanisme :

$$\mathcal{P} = N\,u + M\,\theta, \tag{2.1.2}$$

où la force axiale N est accompagnée du moment de flexion $M = \pm hN$.

Considérant que le joint ne peut supporter aucune traction, la force axiale est astreinte à rester en compression : $N < 0$. Ce critère va définir le domaine admissible pour les contraintes généralisées (N, M) (*voir* figure 2.2).

Save (1986) fait remarquer, à propos de cet exemple simple, que le vecteur $\dot{\boldsymbol{q}} = (u, \theta)$ des vitesses généralisés n'est pas une grandeur dont la norme est déterminée en cas de mécanisme. En outre, il est bien orienté suivant la normale extérieure au domaine de résistance limite. Nous sommes bien dans un cas de comportement de rigide plastique parfait associée.

Les hypothèses de Heyman A partir de ces résultats, Heyman (1966, 1967b) formalise trois hypothèses fondamentales qui seront à la base de tous les travaux d'analyse limite qui suivront :

H1 : la maçonnerie n'a aucune résistance à la traction ;

H2 : la maçonnerie a une résistance illimitée à la compression ;

H3 : aucun glissement ne peut avoir lieu dans la maçonnerie.

La première hypothèse (H1) rend compte de la faiblesse en traction des constituants de la maçonnerie, en particulier des mortiers. Heyman (1995) justifie la deuxième hypothèse (H2) en

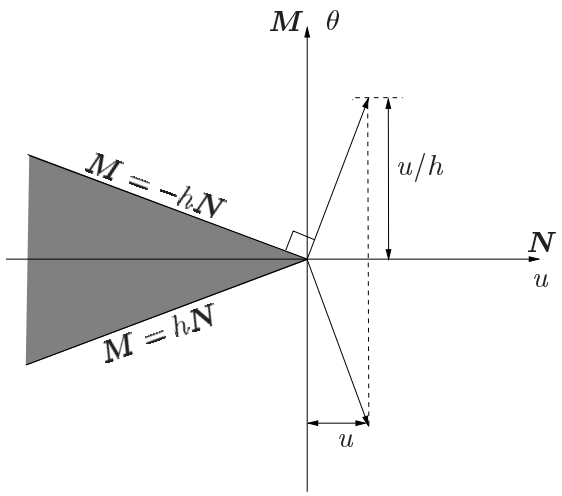


FIGURE 2.2 – *Convexe de résistance limite et principe de normalité*

considérant que les efforts de compression sous poids propre sont très faibles par rapport aux limites de résistance en compression des matériaux. Il souligne que cette hypothèse ne va pas dans le sens de la sécurité mais que, dans la pratique, les ruines par écrasement des maçonneries sont rares. Il justifie la dernière hypothèse (H3) en considérant que les coefficients de frottement dans les joints et les pressions normales sont assez élevés pour éviter tout glissement. Cette hypothèse remonte aux travaux de COULOMB lui-même qui note que la limite de frottement est rarement dépassée dans les structures maçonnées.

Ces hypothèses sont assez restrictives et tout à fait discutables, mais elles ont l'avantage de faire entrer le matériau « maçonnerie » dans une classe de comportements analogues à ceux régis par la plasticité parfaite.

Adaptation des théorèmes fondamentaux d'analyse limite Dans cet esprit, SAVE (1986) adapte les théorèmes statique et cinématique de l'analyse limite classique, aux structures maçonnées en distinguant deux cas fondamentaux :

Premier cas : mise en charge proportionnelle λP sans charge propre. Dans ce type de calcul, on néglige le poids mort devant les chargements appliqués. Dans ce cas, la nullité de la puissance dissipée dans tout mécanisme entraîne deux versions particulières des théorèmes :

Théorème cinématique : Si l'on peut trouver un mécanisme de ruine pour lequel le travail des forces est positif, alors la ruine aura lieu pour λ arbitrairement petit.

Théorème statique : Si l'on peut trouver un état d'équilibre sous l'action de forces extérieures données, alors la structure tiendra pour toutes valeurs de λ.

Le théorème statique peut être énoncé en faisant intervenir la notion de lignes de poussée : si on trouve un système de ligne de poussées intérieur à la structure, qui représente donc un état d'équilibre, la structure est stable pour toute valeur de λ.

On note, dans ce premier cas, que la valeur de λ est soit nulle, soit infinie.

Deuxième cas : mise en charge proportionnelle $\lambda \boldsymbol{P}$ avec charges propres. On considère, dans ce

cas, que la structure est soumise à une charge propre $\boldsymbol{Q}$. La valeur limite λ_l de λ correspond à un état d'équilibre où le travail de l'ensemble des charges $\lambda\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ est nul. Pour trouver une borne inférieure λ_- à λ_l, il faut trouver un état d'équilibre sous $\lambda_-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}$. Pour trouver une borne supérieure λ_+ à λ_l, on cherche le mécanisme qui rend les travaux de $\lambda_+\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ positifs. On encadre alors λ_l de la manière suivante :

$$\lambda_- \leq \lambda_l < \lambda_+ .$$

On note que le travail de résistance des charges propres apporte une stabilité supplémentaire à l'édifice. On se place dans le cas où les seules charges mortes sont supportables par la structure.

Remarque 2.1

Sous ces hypothèses, de nombreux auteurs ont appliqué les théorèmes fondamentaux de l'analyse limite. Nous reviendrons à plusieurs reprises 2.1.3 sur la légitimité de l'application de l'analyse limite pour ce type de comportement. On peut tout de même noter une particularité inhérente à ce type de comportement : la puissance dissipée par n'importe quel mécanisme est toujours nulle. Nous verrons, par la suite, quelles conséquences cela peut avoir sur les théorèmes fondamentaux de l'analyse limite.

Une solution, pour lever cette incohérence, pourrait consister à considérer une faible valeur de cohésion non nulle. Le processus de ruine serait alors dissipatif. L'ouverture des joints se ferait à contrainte constante, égale à l'intensité de la cohésion. Cette solution, bien que peu raisonnable physiquement pour des matériaux quasi-fragiles permet de traiter le problème en terme de plasticité.

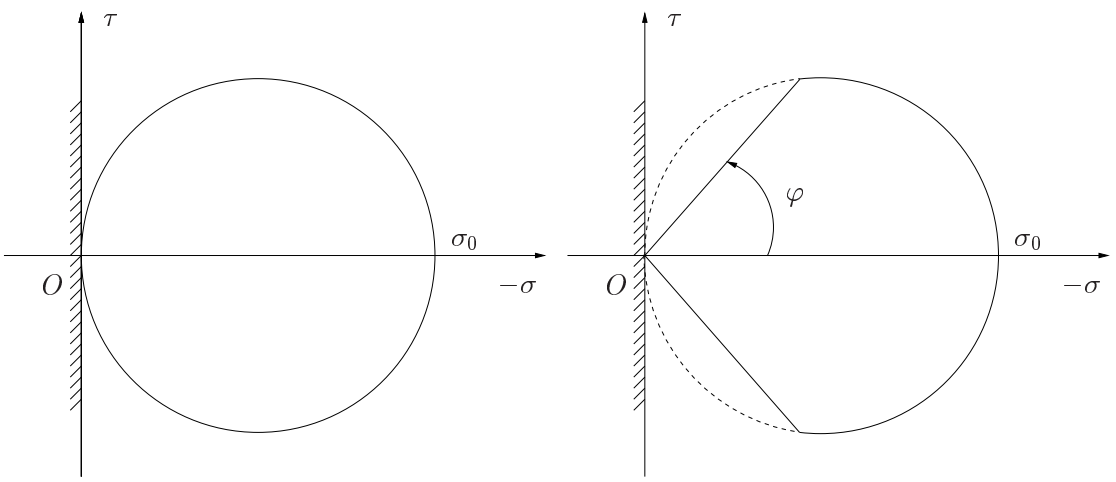
Cependant, peut-être faudrait-il mieux remettre en cause l'écriture, dans le cadre de la plasticité parfaite, de tels phénomènes inélastiques? Nous reviendrons sur ces commentaires dans les § 2.1.2 et 2.1.3.

❑

Ce cadre formel a été appliqué par Heyman sur de nombreuses structures (poutres, arches, murs plans, coques,...) considérant des espaces de forces et de vitesses généralisées associées à une écriture de la puissance adaptée aux mécanismes susceptibles de se développer dans la structure. Les résultats obtenus offrent des critères de résistance s'appuyant essentiellement sur la géométrie et l'intensité des charges appliquées.

Retour au calcul à la rupture Pour terminer cet aperçu sur les méthodes de calcul à la rupture et d'analyse limite, citons les travaux de Delbecq (1982) sur la stabilité des voûtes en maçonnerie. Il propose de reprendre, à titre d'illustration, l'exemple développé précédemment. Le critère de rupture est alors enrichi par une résistance limite en compression et un critère de frottement de Coulomb. Si $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ sont les contraintes principales dans le matériau, le critère en traction-compression s'exprime de la manière suivante :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sup_{i\in[\![1,3]\!]} \{\sigma_i(\sigma_i - \sigma_0)\}\,, \tag{2.1.3}$$



(a) Critère de traction-compression (b) Critère de frottement de Coulomb

FIGURE 2.3 – *Critère de rupture des maçonneries, d'après (*DELBECQ*, 1982)*

où σ_0 est le seuil de résistance en compression uniaxiale. Ce critère peut se représenter par un cube dans l'espace des contraintes principales, mais l'on préférera sa représentation dans le plan de MOHR (*voir* figure 2.3(a)). De même, le critère de frottement de COULOMB s'exprime de la manière suivante :

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \sup\left\{(|\tau| - \sigma\tan\varphi), |\tau| - \sqrt{\sigma(\sigma_0 - \sigma)}\right\}, \tag{2.1.4}$$

où φ est l'angle de frottement.

DELBECQ propose une méthode s'appuyant sur le calcul à la rupture pour déterminer un domaine de chargements *potentiellement supportables*. Nous revenons ici, aux méthodes de calcul à la rupture employées de COULOMB (1773) à MÉRY (1840), mais bien sûr dans un cadre plus formel et théorique. DELBECQ utilise des méthodes d'approche par l'extérieur, ou, si l'on préfère, en vitesses, pour calculer à la fois analytiquement et numériquement les domaines de stabilité potentielle.

Si l'on revient à l'exemple de la voûte à voussoirs rigides, l'expression des critères 2.1.3 et 2.1.4 en termes de contraintes généralisées nous donne :

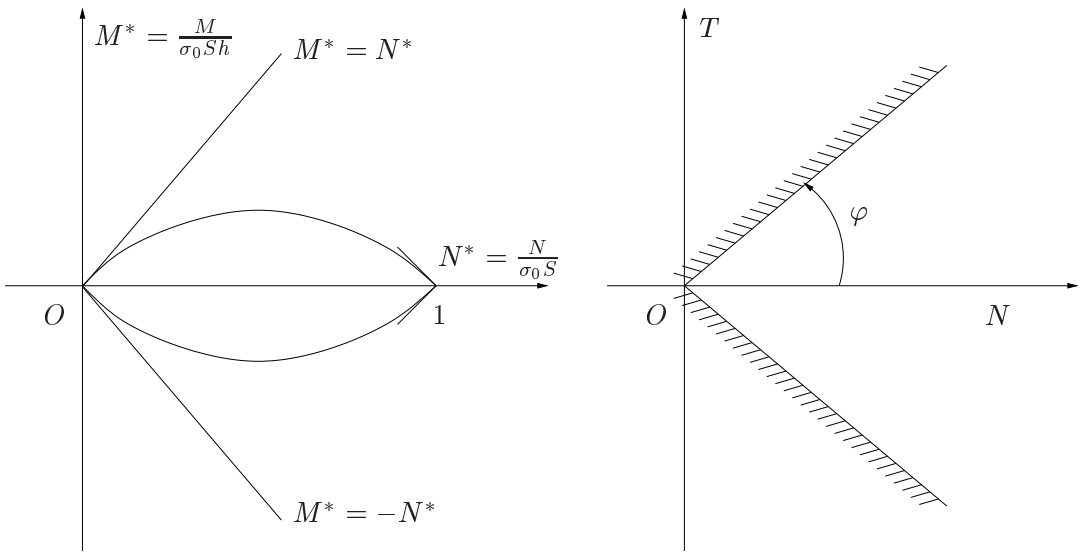
$$|M| \geq Nh\left(1 - \frac{N}{\sigma_0 S}\right), \tag{2.1.5}$$

$$|T| \geq N\tan\varphi, \tag{2.1.6}$$

où T est l'effort tranchant et S la section de la voûte. Ces critères sont illustrés sur la figure 2.4, où l'on peut remarquer que pour $\sigma_0 \to +\infty$, on obtient à nouveau les critères en compression infinie.

REMARQUE 2.2

Il est important de noter qu'aucune relation entre les contraintes et les déformations (vitesses de



(a) Critère de traction-compression (b) Critère de frottement de Coulomb

FIGURE 2.4 – *Critère de rupture des maçonneries en contraintes généralisées, d'après (*DELBECQ*, 1982)*

déformations comprises) n'a été supposée. Cette approche s'affranchit donc de la connaissance du comportement du matériau. En revanche, aucune conclusion ne peut être faite sur la stabilité des chargements potentiellement supportables comme cela peut être le cas en analyse limite, où le principe de dissipation plastique maximale, ou, si l'on préfère, le principe de HILL (1948) est vérifié.

En annexe A.2, on donne l'exemple d'un essai de traction sur deux barres élastiques fragiles mises en parallèles. On remarque que les chargements potentiellement supportables ne peuvent être atteints.

❑

2.1.2 Les « No–Tension Material (NTM) » — Equations constitutives

S'appuyant sur les trois hypothèses fondamentales (H1-H2-H3) formulées par HEYMAN, de nombreux travaux des années quatre-vingt ont eu pour objectif de dégager les équations constitutives des matériaux ne supportant pas la traction. On s'est attaché, en particulier, à formuler, pour le solide tridimensionnel, des lois rendant compte de ce comportement inhabituel et non régulier. Le cadre général, fourni par ces développements, définit un matériau idéalisé que l'on qualifie de « No-Tension Material (NTM) ».

On se propose, dans ce paragraphe, de donner les équations constitutives des NTM et d'essayer de faire l'analogie avec le cadre formel des lois de comportement développé en détail dans le § 5.1. Nous verrons alors comment ce cadre formel suggère d'adapter les théorèmes de l'analyse

limite et les méthodes de résolution consacrées à la plasticité parfaite.

Traduction des hypothèses de HEYMAN. La première hypothèse (H1) implique que la contrainte normale $\boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}$ qui agit sur un élément de surface orientée par un vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$ doit être négative ou nulle :

$$t_{nj}n_j = \sigma_{ij}n_in_j \leq 0, \quad \forall n_i, \quad i \in [\![1,3]\!]\,. \tag{2.1.7}$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ doit donc être semi-défini négatif. Cette propriété est satisfaite tant que les contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont négatives ou nulles. Le polynôme de CAYLEY, $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$, doit donc avoir trois racines négatives ou nulles, ce qui implique les inégalités suivantes sur les invariants :

$$I_1 \leq 0, \quad I_2 \geq 0, \quad I_3 \leq 0\,. \tag{2.1.8}$$

En introduisant les fonctions réelles des contraintes $g_i(\boldsymbol{\sigma}), i \in [\![1,3]\!]$, on peut exprimer le domaine admissible pour les contraintes en tout point de la structure $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} g_1 = I_1, \quad g_2 = \frac{I_1}{I_2}, \quad g_3 = \frac{I_2}{I_3}, \\ \mathcal{G} = \{\boldsymbol{\sigma}, \quad g_i(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad i \in [\![1,3]\!]\}\,. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

On peut noter que $\mathcal{G}$ est un domaine convexe et qu'il contient l'état de contrainte nulle.

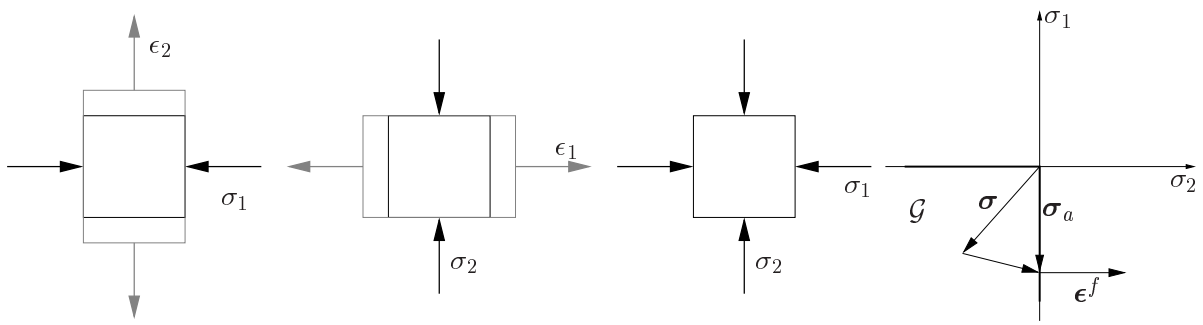
Si l'on s'arrête à cette première propriété, on est en mesure d'effectuer un calcul à la rupture. On peut, en effet, déterminer l'ensemble des chargements potentiellement supportables par la structure ou si l'on préfère l'ensemble des chargements qui ne seront assurément pas supportés par la structure.

Les hypothèses suivantes complètent le modèle en fournissant une loi de comportement au NTM. La deuxième hypothèse (H2) – résistance en compression illimitée – n'impose bien sûr pas de condition supplémentaire aux contraintes. La troisième hypothèse (H3) – non glissement dans le matériau – peut s'exprimer de la manière suivante : si l'on néglige, dans un premier temps, la partie élastique des déformations, l'hypothèse de non glissement fait que « les déformations inélastiques de fissure » ne peuvent produire que des dilatations. D'une manière générale, ces déformations $\boldsymbol{\epsilon}^f$ ne peuvent être des déformations négatives :

$$\boldsymbol{\epsilon}^f_{ij}n_in_j \geq 0, \quad \forall n_i, \quad i \in [\![1,3]\!]\,. \tag{2.1.10}$$

De la même manière, on peut introduire un domaine admissible pour les déformations $\mathcal{H}$, en utilisant les invariants $J_i, \quad i \in [\![1,3]\!]$ de $\boldsymbol{\epsilon}^f$:

$$\begin{aligned} h_1 = J_1, \quad h_2 = \frac{J_1}{J_2}, \quad h_3 = \frac{J_2}{J_3}, \\ \mathcal{H} = \{\boldsymbol{\epsilon}, \quad h_i(\boldsymbol{\epsilon}) \geq 0, \quad i \in [\![1,3]\!]\}\,. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$



(a) Déformations et contraintes admissibles pour les NTM (b) Normalité $\boldsymbol{\sigma}^a\boldsymbol{\epsilon}^f = 0$

FIGURE 2.5 – *Principe de normalité entre déformations et contraintes*

REMARQUE 2.3

Le terme « déformations inélastiques de fissure » est une notion ambiguë qui sera employée avec précaution. C'est pourtant le terme consacré le plus souvent dans le littérature traitant des NTM.

Il est intéressant de remarquer que le phénomène physique modélisé conduit à une séparation de la matière où il devient difficile de définir des grandeurs différentielles comme $\boldsymbol{\epsilon}$. A l'image de la mécanique de la rupture fragile, peut être vaudrait-il mieux définir le saut de déplacement à la fissure, $[\boldsymbol{u}]$? Une condition équivalente à (2.1.10) s'exprimerait alors :

$$[\boldsymbol{u}].\boldsymbol{n} \geq 0, \tag{2.1.12}$$

qui correspond à une condition de non pénétration de la matière.

Nous verrons qu'il est tout de même possible de définir une déformation macroscopique pour de tels phénomènes physiques à condition de se situer à une échelle plus grande. On donnera une expression de la déformation dans ce cadre au § 4.5.2 traitant de l'homogénéisation des milieux micro-fissurés.

❑

Afin de compléter le modèle de comportement, on considère de plus que la « déformation de fissure », $\boldsymbol{\epsilon}^f$, ne peut se développer que dans une direction où la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ s'annule. On peut illustrer cette propriété de la manière suivante (*voir* figure 2.5(a)) : soit $\boldsymbol{\sigma}^a$ une contrainte qui s'annule dans une direction donnée, la condition s'exprime par $\boldsymbol{\sigma}^a\boldsymbol{\epsilon}^f = 0$ (*voir* figure 2.5(b)). Cette hypothèse garantit donc la normalité entre la contrainte et la déformation inélastique.

Pour une contrainte admissible quelconque $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{G}$, on obtient :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_a)\boldsymbol{\epsilon}^f \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{G}, \quad \forall \boldsymbol{\epsilon} \in \mathcal{H}\,. \tag{2.1.13}$$

REMARQUE 2.4

Suite à la remarque précédente, cette hypothèse de normalité entre contraintes et déformations peut se traduire pour la traction suivant la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ par :

$$\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}.\boldsymbol{n} \leq 0, \quad [\boldsymbol{u}].\boldsymbol{n} \geq 0, \quad (\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}.\boldsymbol{n})([\boldsymbol{u}].\boldsymbol{n}) = 0\,. \tag{2.1.14}$$

On reconnait alors la condition de SIGNORINI (voir § 5.2.3).

❑

Si, précédemment, la normalité a été introduite à partir de considérations physiques, (PANZECA & POLIZOTTO, 1988) l'introduisent quant à eux directement, admettant que le postulat de stabilité de DRUCKER (1959) est applicable à ce type de matériau. Ils introduisent cette propriété sous la forme de l'inégalité suivante :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})(\boldsymbol{\epsilon}^f - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^f) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{G}, \quad \forall \boldsymbol{\epsilon}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^f \in \mathcal{H}\,. \tag{2.1.15}$$

L'interprétation physique d'une telle inéquation implique que, pour n'importe quelle action extérieure représentée par une variation de contraintes, $\Delta\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}$, le travail de cette action à travers les déformation inélastique, $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^f = \boldsymbol{\epsilon}^f - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^f$, ne peut être négatif. Autrement dit, aucune énergie ne peut être produite par l'élément de volume durant sa déformation.

L'inéquation (2.1.15) conduit également ces auteurs à écrire une version analogue au théorème du travail plastique maximum de HILL (1948). En effet, pour $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^f = 0$ et pour $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = 0$, on obtient :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})\boldsymbol{\epsilon}^f \geq 0, \quad \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{G}, \tag{2.1.16}$$

$$(\boldsymbol{\epsilon}^f - \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^f)\boldsymbol{\sigma} \geq 0, \quad \forall \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^f \in \mathcal{H}\,. \tag{2.1.17}$$

Si l'inéquation (2.1.16) possède son analogue en plasticité, il n'en est pas de même pour (2.1.17) ; si la contrainte s'annule, elle impose, en plasticité, que le taux de déformation plastique s'annule, ce qui n'est pas le cas ici pour la déformation inélastique de fissure.

REMARQUE 2.5

Mettons en garde tout de même le lecteur contre une analogie formelle qui parait osée : selon PANZECA & POLIZOTTO (1988), les inéquations (2.1.15) et (2.1.16) sont analogues à celles rencontrées en plasticité parfaite. Une différence essentielle existe pourtant entre elles, qui tient au fait que ces auteurs considèrent un incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^f$ inélastique alors qu'en élasto-plasticité, ce sont les taux de déformations inélastiques $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f$ qui sont considérés.

En effet, l'inégalité de DRUCKER (1959) s'écrit sur un cycle de contrainte où le travail des efforts élastiques s'annule de la manière suivante :

$$\oint_{(\boldsymbol{\sigma})} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_A)\, d\boldsymbol{\epsilon} \geq 0, \tag{2.1.18}$$

ce qui est encore équivalent à l'inégalité proposé par HILL (1948) :

$$\oint_{(\boldsymbol{\epsilon})} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_A)\, d\boldsymbol{\sigma} \leq 0. \tag{2.1.19}$$

De ces inégalités, on peut déduire, dans le cas de la plasticité parfaite :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0, \qquad \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{G}, \tag{2.1.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \geq 0\,. \tag{2.1.21}$$

La différence entre les écritures (2.1.16) et (2.1.20) me paraît être fondamentale. Nous la discuterons en détail dans le § 2.1.3.

❑

Ecriture en terme de complémentarité. A partir des inéquations (2.1.16) et (2.1.17), un principe analogue à celui de Hill est énoncé par Panzeca & Polizotto (1988) :

$$\mathcal{W} \equiv \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\epsilon}^f = \max_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}\in\mathcal{G}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\epsilon}^f = \max_{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^f\in\mathcal{H}} \boldsymbol{\sigma}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^f \,. \tag{2.1.22}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, les déformations inélastiques se produisent lorsque la contrainte s'annule dans une de ses directions propres. Du fait du principe de normalité, qui postule que la déformation est normale à cette direction de contraintes, il s'ensuit que le travail dissipé par fissuration est nul :

$$\mathcal{W} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\epsilon}^f = 0 \,. \tag{2.1.23}$$

La propriété (2.1.23) constitue une écriture possible de la relation contrainte-déformation :

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\epsilon}^f = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{G}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^f \in \mathcal{H} \,. \tag{2.1.24}$$

Se dotant des outils de l'optimisation convexe, deux problèmes duaux de programmation linéaire peuvent être déduits de cette relation de complémentarité linéaire. Une écriture sous forme de Lagrangien peut être introduite. L'équation (2.1.22) devient alors un problème de point selle (optimisation sous contraintes inégalités) :

$$\mathcal{W} = \max_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{G}} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\epsilon}^f = \min_{\boldsymbol{\sigma}} \left[\max_{\lambda_r \geq 0} -\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\epsilon}^f + \lambda_r g_r(\boldsymbol{\sigma}), \quad r \in [\![1,3]\!] \right] . \tag{2.1.25}$$

On aboutit au problème de complémentarité classique :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}^f = \lambda_r \dfrac{\partial g_r}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \\ g_r(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad \lambda_r \geq 0, \\ \lambda_r g_r(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad r \in [\![1,3]\!] \,. \end{cases} \tag{2.1.26}$$

Le problème dual est écrit de la même manière :

$$\mathcal{W} = \max_{\boldsymbol{\epsilon}^f\in\mathcal{H}} \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\epsilon}^f = \min_{\boldsymbol{\epsilon}^f} \left[\max_{\mu_r \geq 0} -\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\epsilon}^f - \mu_r h_r(\boldsymbol{\epsilon}^f), \quad r \in [\![1,3]\!] \right] , \tag{2.1.27}$$

qui aboutit au problème de complémentarité suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -\mu_r \dfrac{\partial h_r}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^f}, \\ h_r(\boldsymbol{\epsilon}^f) \geq 0, \quad \mu_r \geq 0, \\ \mu_r h_r(\boldsymbol{\epsilon}^f) = 0, \quad r \in [\![1,3]\!] \,. \end{cases} \tag{2.1.28}$$

2.1.3 Remarques sur la nature des comportements modélisés : Plasticité ou élasticité non linéaire ?

Choisissons à présent d'expliciter les équations constitutives des NTM dans le cadre formel détaillé dans le § 5.1.4.d.

Soit $\Phi_{\mathcal{G}}$ la fonction indicatrice du domaine convexe $\mathcal{G}$. L'inégalité (2.1.16) nous permet d'écrire que :

$$\boldsymbol{\epsilon}^f \in \partial\Phi_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\sigma}). \tag{2.1.29}$$

Si $\Phi^*_{\mathcal{G}}$ est la transformée de Legendre-Fenchel de $\Phi_{\mathcal{G}}$, on obtient l'inclusion duale (2.1.29) :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\Phi^*_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\epsilon}^f). \tag{2.1.30}$$

De la même manière, si l'on considère $\Psi_{\mathcal{H}}$ la fonction indicatrice du domaine convexe $\mathcal{H}$, l'inégalité (2.1.17) nous permet d'écrire que :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\Psi_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\epsilon}^f). \tag{2.1.31}$$

L'inclusion (2.1.31) n'est pas surprenante puisque $\mathcal{H}$ n'est autre que le cône polaire à $\mathcal{G}$. On a donc $\Psi_{\mathcal{H}} \equiv \Phi^\star_{\mathcal{G}}$. Cette propriété nous permet de retrouver le travail dissipé comme la fonction d'appui de $\mathcal{G}$, $\varphi : \boldsymbol{\epsilon}^f \longmapsto \Phi^\star_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\epsilon}^f)$:

$$\varphi(\boldsymbol{\epsilon}^f) = \Phi^\star_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\epsilon}^f) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{G}} \boldsymbol{\epsilon}^f\boldsymbol{\sigma} = \Psi_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\epsilon}^f). \tag{2.1.32}$$

Si $\boldsymbol{\epsilon}^f$ est astreint à être dans $\mathcal{H}$, on retrouve la relation contrainte-déformation (2.1.24) puisque $\varphi(\boldsymbol{\epsilon}^f) = 0$ si $\boldsymbol{\epsilon}^f \in \mathcal{H}$. On note une fois de plus que le travail dissipé est nul.

Ceci est en fait une conséquence d'un résultat bien plus général. Comme le fait remarquer Suquet (1981), une loi de comportement qui s'écrit [1],

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}, \qquad \boldsymbol{\epsilon} \in \partial\Phi(\boldsymbol{\sigma}), \tag{2.1.33}$$

est nécessairement à potentiel de dissipation identiquement nul. De plus, l'énergie libre globale s'exprime par :

$$\bar{W}(\boldsymbol{\epsilon}) = W(\boldsymbol{\epsilon}) + \Phi^\star(\boldsymbol{\epsilon}). \tag{2.1.34}$$

Il s'agit donc de lois élastiques non linéaires.

L'ensemble des équations constitutives des NTM est écrite en déformations de fissure $\boldsymbol{\epsilon}^f$ et non en taux de déformations $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f$ comme nous l'avons vu dans le § 2.1.2. Ce n'est donc pas étonnant de retrouver un comportement non dissipatif.

Supposons maintenant que le comportement des maçonneries suive la loi complémentaire suivante :

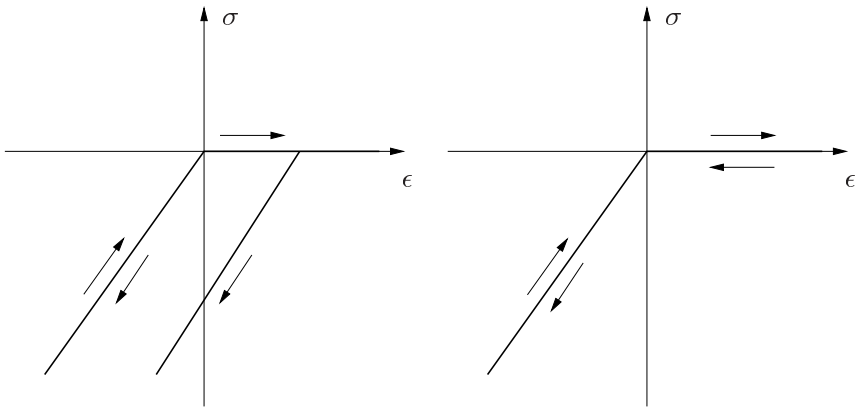
$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f \in \partial\Phi_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{\sigma}). \tag{2.1.35}$$

Nous noterons ce type de comportement par NTMP [2]. C'est le type de comportement que requiert l'analyse limite.

Si l'on reprend l'expression de la puissance dissipée (2.1.32), on obtient l'équation suivante :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f) = \Phi^\star_{\mathcal{G}}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{G}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f\boldsymbol{\sigma} = \Psi_{\mathcal{H}}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f). \tag{2.1.36}$$

1. On insiste sur le fait que la loi est écrite en termes de déformations et non en taux de déformations
2. le « P » qualifiant le caractère plastique de la loi



(a) NTMP Plasticité parfaite (b) NTM élastique non linéaire

FIGURE 2.6 – *Essai de charge-décharge sur un matériau NTM ou NTMP*

Il est facile de remarquer que cette puissance reste identiquement nulle quelque soit le trajet de chargement. Pourtant, nous sommes bien dans le cadre de la plasticité où le processus est irréversible. Cette irréversibilité, très particulière au sens où elle ne dissipe pas d'énergie, est illustrée sur la figure 2.6 où l'on rapporte un essai de charge-décharge sur un matériau type NTM élastique non linéaire et un matériau type NTMP plastique parfait.

Nous sommes donc confrontés à deux formulations alternatives :

- **Le comportement de type NTM élastique non linéaire.** Du point de vue de la mécanique des matériaux, cette hypothèse semble la plus pertinente. Comme il a été dit dans le § 1.1, le comportement des maçonneries est de type quasi-fragile. Il se caractérise par une dégradation des caractéristiques élastiques du matériau. Il prend sa source dans le développement et la coalescence de micro-décohésions dans le matériau.

  Si l'on laisse de côté le frottement des lèvres de ces micro-décohésions et la plasticité de la matrice, l'ouverture normale des fissures peut être prise en compte en exprimant le caractère unilatéral de la décohésion de la matière. Cette unilatéralité est généralement exprimée par une condition de type SIGNORINI — condition unilatérale qui porte sur le déplacement relatif entre les lèvres de la fissure. Nous verrons dans la partie 4.5.2, évoquant les travaux où l'on cherche les caractéristiques globales des matériaux quasi-fragiles, que la condition unilatérale porte effectivement sur les déplacements et non sur les vitesses. Par exemple, les travaux de (KACHANOV, 1982a,b) sur les matériaux micro-fissurés ou de ORTIZ (1985) et ANDRIEUX *et al.* (1986) pour le béton considèrent des modèles de fissure non dissipative (en exceptant le frottement et la propagation des fissures). Dans ce cadre, LÉNÉ & LEGUILLON (1981) montrent le caractère élastique non linéaire du comportement du matériau. L'ouverture des fissures se fait sans dissipation et leur refermeture est possible jusqu'au contact.

  Nous verrons comment, dans le § 2.1.4, un tel comportement peut être pris en compte tant

au niveau mathématique que numérique.

- **Le comportement de type NTMP plastique parfait.** Ce choix semble motivé par l'attrait et la performance des outils liés aux comportements plastiques parfaits et, en particulier, les théorèmes de charges limites. Pourtant, comme nous l'avons souligné précédemment, il met en évidence une incohérence, liée à la ruine plastique (phénomène irréversible) qui est ici non dissipative. Si le cadre mathématique semble bien posé, le passage à la limite qui mène à ce type de comportement semble maladroit et le rend physiquement inacceptable.

  L'écriture de la loi complémentaire en terme de plasticité parfaite satisfait le principe de normalité. Les théorèmes de charges limites pourraient donc s'appliquer et fournir un domaine des chargements supportables et stables. Pourtant, le problème considéré par Como & Grimaldi (1983) d'un panneau de maçonnerie soumis à une pression uniaxiale fournit un contre-exemple significatif. En effet, dans ce problème, illustré sur la figure (2.7), un état homogène de compression uniaxial règne dans le panneau ($\sigma_2 = -\lambda p > 0$ et $\sigma_1 = 0$). Une déformation latérale de fissure ϵ_1^f est donc possible. La contrainte $\sigma_2 = -\lambda p$ constitue donc un mécanisme pour n'importe quelle valeur de λ. Cependant, quelque soit la valeur de λ choisie, l'équilibre de la structure est respecté et la contrainte est plastiquement admissible. La charge limite est donc théoriquement $+\infty$.

  On voit à travers cet exemple, que les notions de charge limite et de mécanisme ne correspondent pas forcément à la perte d'équilibre. De même, la charge limite statique ($\lambda = +\infty$) est différente de la charge limite cinématique ($\lambda = 0$). En petites perturbations, ces deux notions sont pourtant équivalentes dans le cas de la plasticité associée, qui, quant à elle, génère une dissipation non identiquement nulle. On constate, en effet, que la démonstration des principaux théorèmes de l'analyse limite requiert une dissipation non nulle (voir les travaux de Nayroles (1970)). Ceci implique, entre autre, l'inclusion stricte de 0 dans le domaine d'élasticité.

  Sans entrer dans plus de détails, on peut enfin remarquer que le critère de stabilité matérielle de Drucker est violé dès qu'il y a écoulement. Pour essayer néanmoins d'effectuer un calcul de charges limites, Como (1992) propose un critère de charges ultimes directement relié à la perte d'équilibre de la structure. Introduisant les discontinuités de vitesses présentes à travers les fissures, il donne des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité.

2.1.4 Traitements mathématique et numérique des NTM

Aperçu du cadre mathématique Giaquinta & Giusti (1985) traitent du cadre mathématique des équations d'équilibre des NTM en deux dimensions et en petites perturbations. Ils mettent en évidence une énergie libre élastique non linéaire, positive, homogène de degré 2 et $\mathcal{C}^1$. Ils prouvent que cette énergie est une fonction convexe de $\boldsymbol{\epsilon}$ et fournissent une condition nécessaire, sur les chargements, à l'existence d'une solution au problème de minimum. En fait, la coercivité de l'énergie libre est subordonnée à cette condition.

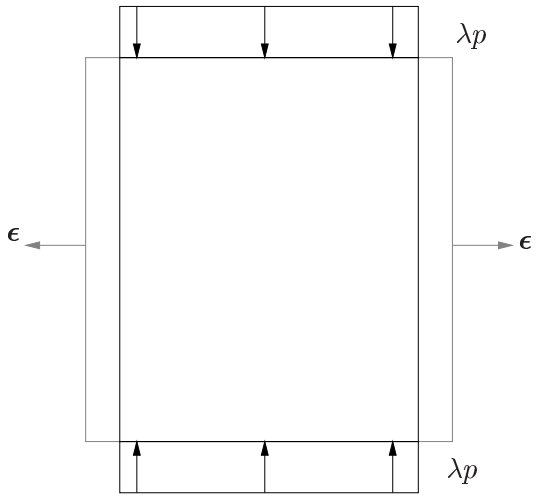


FIGURE 2.7 – *Charge limite d'un mur chargé uniaxialement*

Ces résultats semblent assez naturels si l'on considère l'expression (2.1.34). SUQUET (1981) précise tout de même que les difficultés mathématiques associées à ce type de loi non dissipative restent identiques à celles rencontrées en plasticité. Les cadres mathématiques, adaptés au traitement des lois données par un potentiel non régulier, qu'il soit de dissipation et d'énergie libre, sont identiques (voir les travaux de TEMAN & STRANG (1980a,b)). Forts des travaux que nous venons de citer, GIAQUINTA & GIUSTI introduisent une énergie libre intermédiaire, homogène de degré 1, qui leur permet d'écrire le problème variationnel de l'équilibre des NTM sur l'espace des fonctions à déformations bornées, $\mathcal{BD}(\Omega)$:

$$\mathcal{BD}(\Omega) = \left\{ \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} = (v_i); v_i \in \mathcal{L}^1(\Omega); \epsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) \in \mathcal{M}^1(\Omega) \right\}, \tag{2.1.37}$$

où $\mathcal{M}^1(\Omega)$ est l'espace des mesures bornées sur Ω et $\mathcal{L}^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions intégrables au sens de LEBESGUE sur Ω. Sous des conditions de chargements compatibles, ils prouvent, tout comme en plasticité, l'existence et l'unicité de la solution en contraintes alors que le champ de déplacements (comme les vitesses en plasticité) est discontinu et non unique. STEIGMAN (1991) étend les résultats aux grandes déformations, en donnant des conditions sur la conservation de cette convexité.

Traitement numérique Les contributions à la résolution numérique des NTM ont été nombreuses cette dernière décennie et ce sujet de recherche reste encore largement développé. Deux principaux types de méthodes peuvent être dégagés :

Méthodes incrémentales. Le premier de ces types est celui des méthodes incrémentales, utilisées lorsque le comportement est non linéaire. L'algorithme de NEWTON-RAPHSON, généralement appliqué au problème écrit en déplacement, en est l'exemple le plus connu. LUCCHESI *et al.* (1995) mettent en oeuvre ce type de méthode à partir d'une expression analytique de l'opérateur tangent, qu'ils obtiennent simplement en s'appuyant sur les ré-

sultats précédents concernant l'énergie libre. Ils réalisent ainsi la résolution numérique d'un modèle de NTM enrichi par une résistance limitée à la compression.

Le problème majeur posé par ces méthodes est leur faible taux de convergence. En effet, les caractéristiques élastiques du matériau peuvent changer brutalement et s'annuler en certains points d'intégrations. Ceci a pour effet de provoquer de nombreuses instabilités numériques. De plus, ce type de comportement peut générer un grand nombre de modes à énergie nulle, conséquences des indéterminations sur les déplacements de solides rigides.

Gardant à l'esprit que le comportement est élastique non linéaire, Alfano *et al.* (2000) s'affranchissent du caractère incrémental obligatoire lorsque le comportement du matériau est dissipatif. Ils proposent une solution à pas unique en améliorant la matrice des itérations du problème non linéaire. Ils montrent que les techniques classiques de régularisation de la matrice tangente, comme les recherches de directions (voir (Crisfield, 1991,1997)) ou l'utilisation d'une matrice sécante, n'améliorent pas le conditionnement de la matrice des itérations. Leur technique consiste à introduire une rigidité artificielle s'annulant au cours des itérations. Les auteurs retrouvent ainsi le taux de convergence quadratique des algorithmes de linéarisation tangente.

Méthodes d'optimisation convexe. Le cadre naturel que dresse l'analyse convexe pour l'écriture des lois de comportement des NTM (§ 2.1.3) offre des outils non seulement théoriques mais aussi numériques. Pour une présentation détaillée de ces écritures ébauchées au § 2.1.3, on renvoie à (Romano & Sacco, 1987) et plus récemment à (Cuomo & Ventura, 2000)

Luciano & Sacco (1994) ont appliqué les méthodes de pénalisation aux problèmes unilatéraux des maçonneries. Une des techniques de régularisation classique consiste à introduire une fonction régularisante de Moreau–Yosida des fonctions indicatrices des convexes. Ces méthodes sont robustes mais peu précises. Elles ont surtout un intérêt pour établir des résultats mathématiques théoriques.

Genna (1994) propose d'utiliser une méthode de programmation mathématique. Elle conduit à une résolution précise et efficace mais nécessite l'estimation de l'opérateur tangent condensé, qui n'est pas toujours bien défini.

Cuomo & Ventura (2000) propose l'approche la plus complète en matière de méthodes de résolution, s'appuyant sur l'analyse convexe. Elle utilise la méthode des lagrangiens augmentés, qui a déjà fait ses preuves dans le domaine du contact frottant (Alart & Curnier, 1991 ; Simo & Laursen, 1992 ; Heegard & Curnier, 1993) et sur la minimisation de la fonctionnelle mixte d'Hellinger-Reissner. La formulation mixte en contraintes et déplacements permet d'assurer stabilité et convergence de l'algorithme, profitant de l'existence et de l'unicité du problème en contraintes.

2.1.5 Synthèse sur l'analyse limite et les NTM

Nous avons vu, tout au long de cette partie, comment de nombreuses hypothèses simplificatrices ont été introduites, pour aboutir à des modèles très idéalisés de la maçonnerie. L'objectif

était de définir un cadre suffisamment simple, mais tout de même représentatif, apte à fournir des résultats analytiques, voire numériques, avec un minimum de paramètres caractérisant le matériau. Ces efforts ont abouti à deux types de modélisations distinctes :

- *Le calcul à la rupture.* Dans ces méthodes, les seules hypothèses formulées reposent sur les efforts dans le matériau et le domaine de résistance qui leur est associé. Elles permettent l'obtention d'un domaine de chargement potentiellement supportables sans plus d'informations complémentaires. Les domaines de résistance s'appuient généralement sur la donnée d'un résistance limite à la compression, d'une résistance faible en traction (souvent nulle) et d'un critère de frottement de COULOMB.
- *L'analyse limite et les NTM.* Afin de tirer partie des théorèmes fondamentaux de l'analyse limite et de leurs outils associés, des hypothèses supplémentaires, plus restrictives, ont été introduites pour qualifier la relation de comportement entre contraintes et déformations. L'hypothèse majeure est le respect de la règle de normalité. Elle implique implicitement, ici, qu'il n'y ai pas glissement dans le matériau et que la résistance en compression soit illimitée. On aboutit alors, sous ces hypothèses, à la classe de matériaux que nous avons appelée NTM.

  Nous avons vu que l'écriture de cette règle de normalité en taux de déformations inélastiques conduisait à obtenir un matériau plastique parfait, certes apte à entrer dans le cadre de l'analyse limite, mais dont la dissipation au cours d'un processus irréversible était nulle. Cette incohérence, qui a des répercutions essentielles sur les théorèmes de l'analyse limite, a été contournée par l'écriture d'une règle de normalité en déformations et contraintes conduisant à un matériau élastique non linéaire.

  Il semble pour notre part, que l'écriture de lois unilatérales rendant compte de l'impénétrabilité de la matière et de son caractère non cohésif, se fait naturellement en déplacements sous la forme d'une condition de SIGNORINI (voir § 5.2.3). Cette condition conduit alors à un comportement réversible que l'on peut qualifier d'élasticité non linéaire et non régulière.

2.2 Modélisations numériques en élasticité linéaire

Les applications de la méthode aux éléments finis en élasticité linéaire sont nombreuses, tant en statique qu'en dynamique. Un exemple caractéristique de ce type d'application est le travail de GODART *et al.* (1996) sur la cathédrale de Strasbourg. Ce type de calcul permet de comprendre, avec précision, les effets structurels, i.e. de la géométrie, sur la tenue de la structure. Une des grandes difficultés de ce type de modélisation est l'estimation des grandeurs élastiques caractérisant le matériau. Ces grandeurs doivent en effet prendre en compte la maçonnerie dans son ensemble : parement, fourrure en blocage, chaînage métallique, *etc.*... MOLA & VITALIANI (1997), dans leurs travaux sur la basilique SAINT MARC à Venise, exposent différentes méthodes expérimentales (tomographie ultrasonore, flat-jack, carrotage, inspection à l'aide de micro-caméras,...) qui leur permettent de renseigner leur modèle éléments finis, à la fois sur les géométries cachées des structures et sur les caractéristiques élastiques des constituants.

Bien que le modèle de comportement soit simple, il renseigne sur les zones potentiellement sensibles, telles celles susceptibles d'être sollicitées en traction. Ces indications restent cependant toutes relatives puisqu'elles ne considèrent pas la redistribution des contraintes après rupture.

Des adaptations ont été réalisées pour prendre en compte la faible résistance en traction des maçonneries. Dans les travaux sur la cathédrale des Saints Michel et Gudule à Bruxelles (Bollaerts, 1988), les zones en traction, détectées à la suite d'un premier calcul, sont remaillées. Un découpage du maillage est opéré de façon à relâcher les parties en traction, puis un nouveau calcul est réalisé. Ce processus itératif est répété jusqu'à atteindre une éventuelle convergence vers un état de compression. L'inconvénient majeur de ce type de procédure, outre les sérieux problèmes de convergence, est la dépendance des résultats aux opérations de remaillage. En effet, la redistribution des contraintes due aux fissures simulées par les remaillages rendent compte d'un trajet de chargement particulier, très largement dépendant des méthodes employées et sans grande réalité physique.

Les méthodes aux éléments finis servent aussi à déterminer le spectre de réponse dynamique des structures. Ces calculs ont pour but de prévoir la réponse d'un monument à un séisme. On recherche en général les modes propres de la structure susceptibles d'entrer en résonance avec les périodes fondamentales du séisme. Sur ce sujet, on pourra par exemple, consulter les travaux de Macchi (1997) sur la Tour de Pise.

2.3 Modélisations en plasticité non associée

On présente, dans cette partie, une modélisation macromécanique caractéristique de l'application aux maçonneries des développements de la plasticité non associée pour les bétons. On donne les grandes lignes du modèle au § 2.3.1 pour essayer au § 2.3.2 de juger de sa pertinence pour des applications aux maçonneries.

2.3.1 Un modèle de plasticité orthotrope avec adoucissement

Lourenço *et al.* (1997) présentent en détail un exemple d'application aux maçonneries des méthodes numériques dédiées aux problèmes de plasticité avec adoucissement. La maçonnerie est considérée comme un matériau homogène, continu et orthotrope, sous l'hypothèse des contraintes planes. Ces travaux sont une adaptation directe de ceux de Feenstra & de Borst (1995, 1996) concernant les modèles de plasticité pour le béton. Les critères isotropes traditionnellement choisis pour le béton (critère de Drucker-Prager en compression et critère de Rankine en traction) sont remplacés par des critères orthotropes. Le critère de Tsaï-Hill en compression — initialement proposé pour les composites orthotropes — est associé, en traction, à une version orthotrope du critère de Rankine (*voir* figure 2.8).

Comportement en traction. Le critère de Rankine permet de limiter la contrainte principale maximum en traction à une valeur seuil. Pour les matériaux orthotropes, la contrainte

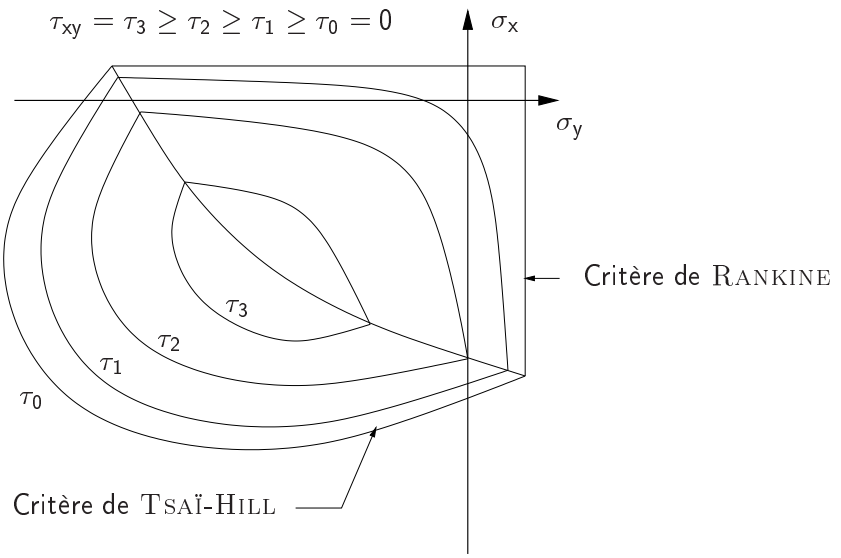


FIGURE 2.8 – *Critère de plasticité composite pour les maçonneries, d'après (*LOURENÇO *et al., 1997)*

principale est exprimée en fonction des contraintes σ_x et σ_y dans les deux directions privilégiées par l'orthotropie et de la contrainte de cisaillement τ_{xy}. Cette écriture permet l'introduction de seuils distincts suivant les directions d'orthotropie. Ce critère peut s'écrire :

$$\begin{aligned} f_R(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}_t(\kappa_t)) = \sigma_1 - \bar{\sigma}_t(\kappa_t) &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - \bar{\sigma}_t(\kappa_t) \\ &= \frac{(\sigma_x - \bar{\sigma}_t(\kappa_t)) + (\sigma_y - \bar{\sigma}_t(\kappa_t))}{2} + \sqrt{\left(\frac{(\sigma_x - \bar{\sigma}_t(\kappa_t)) - (\sigma_y - \bar{\sigma}_t(\kappa_t))}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Le critère est accompagné de lois adoucissantes dont le but est de modéliser la rupture assez brutale en traction des matériaux quasi-fragiles. Le scalaire κ_t contrôle le taux d'adoucissement à travers la fonction $\bar{\sigma}_t(\kappa_t)$. Selon ces auteurs, l'écrouissage isotrope n'est pas acceptable pour des matériaux quasi-fragiles comme les géomatériaux qui peuvent être chargés en traction jusqu'à leur limite de rupture même si de l'endommagement est déjà survenu dans la direction perpendiculaire. Suite à ces remarques, un écrouissage cinématique est considéré, piloté par le taux de déformation maximal dans une direction propre $\kappa = \max(\dot{\epsilon}_1^p, \dot{\epsilon}_2^p)$.

Comme nous l'avons souligné précédemment, ces auteurs introduisent des lois d'adoucissement propres à chaque direction d'orthotropie $\bar{\sigma}_{tx}(\kappa_t)$ et $\bar{\sigma}_{ty}(\kappa_t)$:

$$f_R(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}_t(\kappa_t)) = \frac{(\sigma_x - \bar{\sigma}_{tx}(\kappa_t)) + (\sigma_y - \bar{\sigma}_{ty}(\kappa_t))}{2} + \sqrt{\left(\frac{(\sigma_x - \bar{\sigma}_{tx}(\kappa_t)) - (\sigma_y - \bar{\sigma}_{ty}(\kappa_t))}{2}\right)^2 + \alpha\tau_{xy}^2}. \tag{2.3.2}$$

De plus, un paramètre matériel α donne la contribution de la contrainte de cisaillement sur le seuil de plasticité. Le paramètre α et les fonctions contrôlant l'adoucissement s'expriment de la

manière suivante :

$$\alpha = \frac{f_{tx} f_{ty}}{\tau_{ut}^2}, \quad \bar{\sigma}_{tx}(\kappa_t) = f_{tx} \exp(-\frac{l f_{tx}}{G_{fx}} \kappa_t), \qquad \bar{\sigma}_{ty}(\kappa_t) = f_{ty} \exp(-\frac{l f_{ty}}{G_{fy}} \kappa_t)\,. \tag{2.3.3}$$

où f_{tx} (resp. f_{ty}) est la résistance limite en traction dans la direction x (resp. y), et τ_{ut} est la résistance limite en cisaillement. Le terme G_{fx} (resp. G_{fy}) représente le taux de restitution d'énergie en mode I dans la direction x (resp. y).

Une longueur équivalente l, en relation avec une longueur caractéristique des éléments du maillage, est également introduite. Elle régularise les problèmes liés à la localisation de la déformation en apportant une information non-locale à l'adoucissement. Son introduction se justifie mécaniquement en arguant qu'une part non négligeable de l'énergie de rupture se dissipe dans un volume de matière caractéristique, bien que la rupture en traction soit un phénomène surfacique.

Ces aspects de modèles de non localité sont commentés dans la remarque 2.6. Notons seulement que cette longueur est reliée aux caractéristiques élastiques du matériau de façon à éviter les phénomènes de « snap-back » générés par un adoucissement trop fort. La relation donnée par les auteurs est la suivante :

$$l \leq \frac{G_{fi} E_i}{f_{ti}^2}, \tag{2.3.4}$$

où E_i est le module d'Young dans la direction i.

Le modèle de plasticité choisi par ces auteurs est un modèle de plasticité non associée. Le potentiel pilotant l'écoulement plastique est le critère de Rankine (2.3.2), pour une valeur de α égale à 1. Il est important de remarquer que si α est choisi égal à 1, le modèle est alors associé.

Comportement en compression. Le critère en compression introduit est analogue à celui de Tsaï-Hill pour les matériaux orthotropes en contraintes planes. Le critère est donné par une quadrique d'équation :

$$f_{TH}(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\sigma}_t(\kappa_t)) = A(\bar{\sigma}_t(\kappa_t))\sigma_x^2 + B(\bar{\sigma}_t(\kappa_t))\sigma_x\sigma_y + C(\bar{\sigma}_t(\kappa_t))\sigma_y^2 + D(\bar{\sigma}_t(\kappa_t))\tau_{xy}^2 - 1, \tag{2.3.5}$$

avec $B^2(\bar{\sigma}_t(\kappa_t)) - 4A(\bar{\sigma}_t(\kappa_t))C(\bar{\sigma}_t(\kappa_t)) < 0$, pour assurer la convexité du domaine d'élasticité. Deux paramètres matériaux sont introduits pour exprimer les coefficients du polynôme en fonction d'essais expérimentaux. Tout d'abord β, qui contrôle le couplage entre les valeurs de contraintes normales. Il peut être facilement obtenu par un test de compression biaxiale où $\sigma_x = \sigma_y$ (*voir* figure 1.10(b)). Soit f_{45° la valeur de la contrainte ultime du test, β est donné par la formule suivante :

$$\beta = \left[\frac{1}{f_{45^\circ}^2} - \frac{1}{f_{cx}^2} - \frac{1}{f_{cy}^2}\right] f_{cx} f_{cy}\,. \tag{2.3.6}$$

Le second paramètre, γ, qui contrôle la contribution de la contrainte de cisaillement, est donné par :

$$\gamma = \frac{f_{cx} f_{cy}}{\tau_{uc}^2}\,. \tag{2.3.7}$$

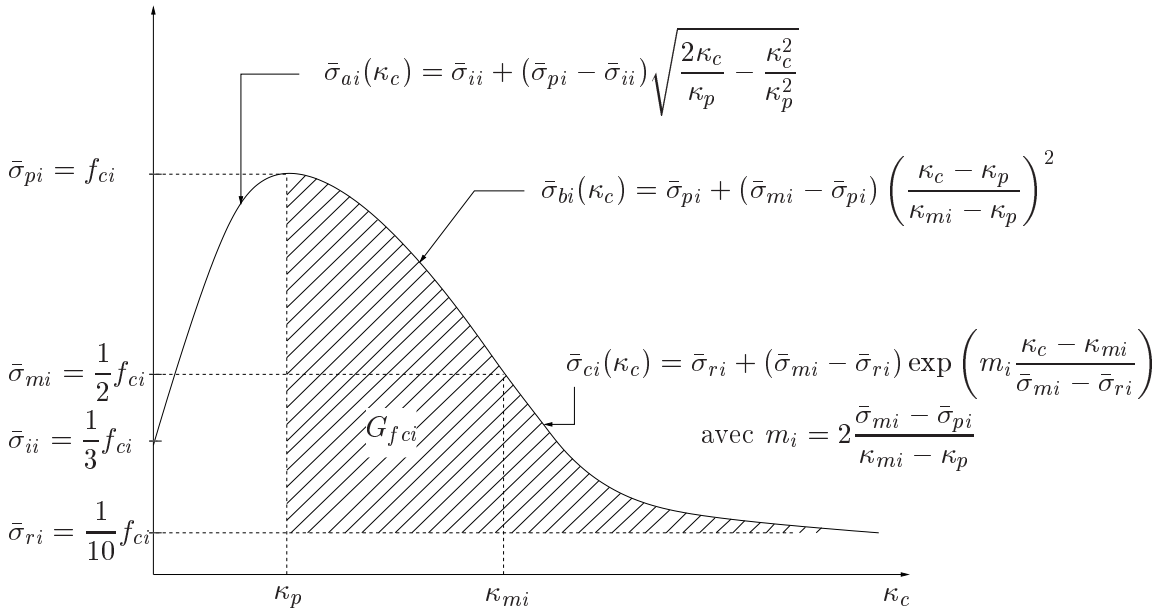


FIGURE 2.9 – *Lois d'adoucissement en compression, d'après (*LOURENÇO *et al., 1997)*

L'expression des coefficients est alors la suivante :

$$A(\bar{\sigma}_t(\kappa_t)) = \frac{1}{(\bar{\sigma}_{cx}(\kappa_c))^2}, \quad B(\bar{\sigma}_t(\kappa_t)) = \frac{\beta}{(\bar{\sigma}_{cx}(\kappa_c)\bar{\sigma}_{cy}(\kappa_c))}, \tag{2.3.8}$$

$$C(\bar{\sigma}_t(\kappa_t)) = \frac{1}{(\bar{\sigma}_{cy}(\kappa_c))^2}, \quad D(\bar{\sigma}_t(\kappa_t)) = \frac{\gamma}{(\bar{\sigma}_{cx}(\kappa_c)\bar{\sigma}_{cy}(\kappa_c))}. \tag{2.3.9}$$

La description du durcissement-adoucissement est phénoménologique puisqu'il s'agit d'approcher une courbe de comportement typique en compression. Elle s'effectue en introduisant un paramètre matériel supplémentaire correspondant à la déformation plastique équivalente κ_p, lorsque la contrainte atteint son maximum (*voir* figure 2.9).

Selon LOURENÇO *et al.* (1997), le comportement décrit par ce modèle est encore plus sensible aux problèmes liés à l'adoucissement en compression qu'en traction . Comme précédemment, ils jugent donc nécessaire d'introduire un paramètre basé sur une longueur équivalente l de façon à « rendre l'énergie dissipée par l'écrasement indépendante du maillage ». Ce paramètre est le suivant :

$$\kappa_{mi} = \frac{75}{67}\frac{G_{fci}}{l f_{ci}} + \kappa_p, \quad \kappa_{mi} \geq \frac{f_{ci}}{E_i} + \kappa_p, \tag{2.3.10}$$

où l'inégalité est introduite pour éviter le phénomène de « snap-back ».

Les lois d'adoucissement relativement compliquées sont présentées sur le graphe de la figure (*voir* figure 2.9). La loi d'écoulement plastique est associée et la variable, qui contrôle l'écrouissage, κ_c, est donnée de la manière suivante :

$$\dot{\kappa}_c = \frac{1}{\sqrt{\bar{\sigma}_{cx}(\kappa_c)\bar{\sigma}_{cy}(\kappa_c)}}\boldsymbol{\sigma} \bar{\bar{\otimes}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \,. \tag{2.3.11}$$

Ces comportements composites sont intégrés numériquement au moyen d'un algorithme d'Euler implicite et d'un schéma local de Newton-Raphson qui s'appuie sur une matrice de rigidité tangente cohérente (Ortiz & Popov, 1985 ; Simo & Taylor, 1985a).

2.3.2 Commentaires

Dans cette étude, les comportements inélastiques, aussi bien en compression qu'en traction sont approchés par des modèles relativement riches. Les auteurs essayent, dans la mesure du possible, de reproduire les comportements globaux des essais de traction/compression.

On remarque tout de même qu'une description globale, à la fois empirique et phénoménologique, est relativement compliquée tant au niveau des caractéristiques matérielles à déterminer, qu'au niveau des algorithmes à mettre en oeuvre.

L'un des problèmes majeurs de cette approche est la sensibilité des résultats aux maillages, générée par l'adoucissement du matériau. Les auteurs proposent une solution en se basant sur la conservation d'une énergie finie de rupture qui fournit une longueur caractéristique de diffusion de l'énergie. Cette longueur est alors à mettre en rapport avec les grandeurs caractéristiques du maillage. Nous verrons, dans le § 2.6 que plusieurs autres alternatives sont possibles pour remédier à ce problème.

Une seconde question peut aussi être soulevée quant à la pertinence du modèle purement plastique pour les matériaux quasi-fragiles comme les maçonneries. La dégradation du matériau est prise en compte à travers les variables d'écrouissage/adoucissement κ_t et κ_c. Les auteurs qualifient cette dégradation par le terme « endommagement », qui est ambigu, car en fait aucune modification des caractéristiques élastiques n'est prise en compte par leur modèle.

Comme nous l'avons vu dans le § 1.3, la dégradation des géomatériaux quasi-fragiles est le fruit de l'action combinée de la plasticité et de l'endommagement fragile. Or, ce dernier phénomène affecte fortement les caractéristiques élastiques des matériaux. L'hypothèse de phénomènes inélastiques purement plastiques est donc discutable. Néanmoins, dans le cas de chargements monotones, la plasticité peut suffire si localement l'évolution contraintes-déformations est elle aussi, *a priori* monotone. Enfin, la plasticité en compression est choisie associée ; ce choix est aussi tout à fait discutable.

2.4 Modélisations en endommagement

La seconde approche macroscopique des maçonneries est celle de la mécanique de l'endommagement continu fragile. Comme on l'a évoqué précédemment (cf .§ 1.3), une partie des phénomènes inélastiques proviennent de la décohésion entre la matrice de ciment et les particules du mortier, ou de simples micro-craquements pour les géomatériaux, comme la pierre ou le liant du mortier lui-même. Ces microfissures grandissent et se regroupent au fur et à mesure que les chargements progressent pour former des macrofissures qui mèneront finalement à la rupture. Une des différences notoires avec les phénomènes de plasticité ductile est la dégradation des caractéristiques

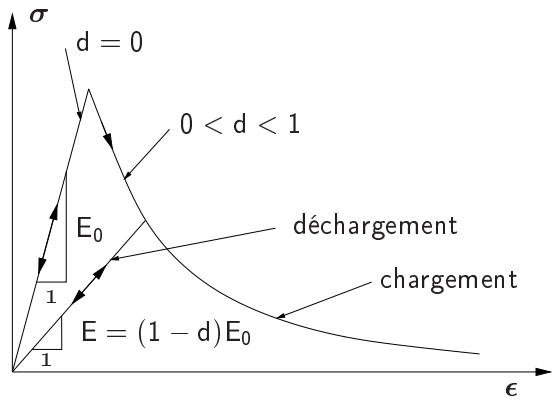


FIGURE 2.10 – *Evolution uniaxial et endommagement scalaire*

élastiques du matériau, qui peut être mise en évidence sur un essai de chargement-déchargement (*voir* figure 2.10). Cet aspect des phénomènes physiques de dégradation des géomatériaux est prépondérant dans les régimes de traction pure.

2.4.1 Présentation succincte de l'endommagement scalaire

Pour rendre compte de ce type de dégradation, il est maintenant habituel de faire appel à la mécanique de l'endommagement continu (LEMAITRE & CHABOCHE, 1978, 1988 ; LEMAITRE, 1996). Le moyen le plus simple est d'introduire une variable interne scalaire d, représentant l'endommagement du matériau (MARIGO, 1981, 1982). On peut l'écrire en modifiant l'expression de l'énergie libre du matériau de la manière suivante (*voir* figure 2.10) :

$$W(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \frac{1}{2}(1-d)\boldsymbol{\epsilon} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{C} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}, \tag{2.4.1}$$

où $\boldsymbol{C}$ est le tenseur des rigidités élastiques du matériau. Les lois d'état s'écrivent donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\boldsymbol{C} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}; \quad X_d = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{C} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}\,. \tag{2.4.2}$$

Le modèle est complété par des lois complémentaires décrivant l'évolution de d en fonction de la force motrice d'endommagement X_d ou de la déformation $\boldsymbol{\epsilon}$, ou encore, de manière équivalente de la contrainte effective $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \dfrac{1}{(1-d)}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}$.

Un modèle courant proposé par MARIGO (1982) postule une formulation standard avec un domaine convexe $\mathcal{G}$, défini par sa fonction seuil g de la manière suivante :

$$\dot{d} \in \partial\phi_{\mathcal{G}}(X_d), \tag{2.4.3}$$

$$\mathcal{G} = \{X_d, \quad g(X_d, d) = X_d - k(d) \leq 0\}. \tag{2.4.4}$$

2.4.2 Une application à la maçonnerie de l'endommagement scalaire

A l'instar du travail de LOURENÇO *et al.* (1997) pour la plasticité, OÑATE *et al.* (1997) adaptent les méthodes numériques de calcul de l'endommagement pour le béton (OÑATE *et al.*,

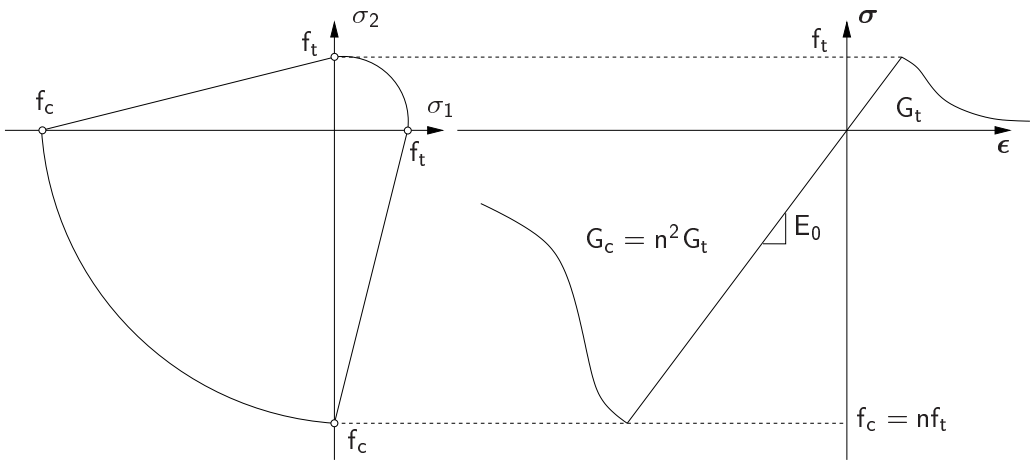


FIGURE 2.11 – *Critère d'endommagement de la maçonnerie (d'après* OÑATE *et al. (1997))*

1989) au cas particulier des maçonneries. L'endommagement est représenté par une variable scalaire unique, à laquelle est jointe une seconde variable β censée prendre en compte les effets « physico-chimico-biologique »(PCB) sur la dégradation des caractéristiques mécaniques. Ces deux grandeurs sont intégrées à l'équation d'état du matériau :

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta(1-d)\boldsymbol{C} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\epsilon}\,. \tag{2.4.5}$$

L'évolution de l'endommagement d n'est pas standard. A l'image du modèle de béton proposé par MAZARS (1984, 1986), une norme scalaire de déformation τ contrôle le critère d'endommagement et permet d'introduire une dissymétrie en traction et compression, au moyen de la variable θ :

$$\tau = \left(\theta + \frac{1-\theta}{n}\right)\left[\bar{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{C}^{-1} \bar{\bar{\otimes}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \theta = \frac{\sum_{i=1}^{3} (\bar{\sigma}_i)^+}{\sum_{i=1}^{3} |\sigma_i|}, \qquad n = \frac{f_c}{f_t}, \tag{2.4.6}$$

où n est le rapport des résistances ultimes en traction f_t et en compression f_c. Grâce à cette norme, on définit tout d'abord le critère d'endommagement :

$$g(\tau, r) = \tau - r \leq 0, \tag{2.4.7}$$

où r est la valeur du seuil qui est initialisée à $r^0 = f_t/\sqrt{E}$. Quant à l'évolution de d, elle est décrite de la manière suivante :

$$d = G(r), \quad r = \max\{r^0, \tau\} \quad \text{avec} \quad G(r) = 1 - \frac{r^0}{r}\exp\left[A\left(1 - \frac{r}{r^0}\right)\right]\,. \tag{2.4.8}$$

Le paramètre A détermine l'énergie dissipée lors de l'endommagement du matériau. Il est associé à G_f, énergie de rupture dissipée par unité de surface dans un test uniaxial :

$$\frac{1}{A} = \frac{G_f E}{l f_t^2} - \frac{1}{2}\,. \tag{2.4.9}$$

Comme en plasticité avec adoucissement, une longueur caractéristique l est introduite pour assurer que l'énergie dissipée par les phénomènes restent finie quelque soit le maillage utilisé.

Le deuxième paramètre β est, quant à lui, piloté par la concentration c des corps chimiques pouvant dégrader la maçonnerie (chlorate, sulfate, CO_2, $etc\ldots$) et le rapport $\gamma = \frac{\tau}{\tau_{ref}}$ qui représente le rapport entre la norme de déformation τ et sa valeur de référence τ_{ref} pour une concentration c_{ref}. La fonction introduite par les auteurs est la suivante :

$$\beta = F(\tau, c) = \gamma + (1-\gamma)\left[1 + \left(\frac{2c}{c_{ref}}\right)^4\right]^{-1}. \tag{2.4.10}$$

La valeur de concentration c_{ref} est la valeur de concentration de référence pour laquelle le processus PCB atteint son effet maximum.

La résolution de ces équations est réalisée grâce à des méthodes éléments finis incrémentales s'appuyant sur un algorithme de Newton-Raphson. Le modèle a été appliqué en dynamique et en statique aux problèmes structuraux de la basilique Saint Marc à Venise.

2.4.3 Commentaires

Comme nous l'avons rappelé dans le § 1.3, les phénomènes inélastiques des géomatériaux sont le fruit du couplage entre l'endommagement fragile et la plasticité non associée. Dans les modélisations présentées dans le § 2.3 et dans le présent paragraphe, ces comportements ont été traités de manière indépendante. Nous allons voir dans le paragraphe, qui suit, comment on peut envisager un modèle macromécanique qui couple ces deux phénomènes dissipatifs pour la maçonnerie.

2.5 Modèles couplés endommagement-plasticité

Comme nous l'avons vu au § 1.3, une modélisation correcte des géomatériaux quasi-fragiles doit être capable de prendre en compte l'interaction des deux types de phénomènes inélastiques que sont la plasticité et l'endommagement fragile. Ces deux dernières décennies, les tentatives en ce sens ont été nombreuses, en particulier dans les recherches sur le béton.

Nous nous contenterons, ici, de relater deux exemples d'applications aux maçonneries dans les § 2.5.1 et § 2.5.2. Nous finirons cette présentation sur quelques commentaires au § 2.5.3.

2.5.1 Plasticité associée et endommagement fragile en traction

Lotfi & Shing (1991) sont à l'origine de l'une des premières tentatives d'appliquer aux maçonneries un modèle d'endommagement fragile et de plasticité. Ils se placent dans le cas particulier des maçonneries modernes, chaînées et armées, qui, selon eux, se prêtent mieux à ce type de modélisation que les maçonneries traditionnelles d'appareils. En effet, ce type de maçonnerie est constituée d'éléments creux (briques ou agglomérés) remplis par du béton et chaînés par du béton armé. Son comportement macroscopique est donc relativement homogène et isotrope, à l'image du béton. L'anisotropie induite par la direction des joints peut être négligée dans un premier temps, i.e., si l'on s'abstient d'aborder les problèmes de macrofissurations.

2.5.1.a Les ingrédients du modèle de comportement

L'écriture de ce modèle se fait en deux étapes :

1. La première consiste à considérer un matériau élasto-plastique, macroscopiquement homogène et isotrope. Les critères de plasticité choisis sont le critère de von Mises en compression et le critère de Rankine en traction. Nous ne reviendrons pas sur les critères et les lois d'adoucissement employés par les auteurs car ils sont en tous points identiques aux critères utilisés au § 2.3 par Lourenço *et al.* (1997) dans une version anisotrope. De même, le traitement numérique est identique, inspiré des travaux de Simo & Taylor (1985a,b). Seule la règle d'écoulement plastique diffère ; dans la cas présent, il s'agit d'une plasticité associée.

   Les auteurs soulignent tout de même que le choix d'une « plasticité-I2 » (basée sur le deuxième invariant du déviateur des contraintes) n'est pas tout à fait adéquat. On sait, en effet, que, pour les géomatériaux, la pression hydrostatique joue un rôle important. Une plasticité non associée impliquant le premier invariant des contraintes aurait été préférable. Cependant, ils considèrent que le facteur déterminant dans la réponse mécanique reste le critère en traction de Rankine et sa règle d'écoulement associée.
2. Dans un second temps, ils améliorent le modèle purement plastique de Lourenço *et al.* (1997) en tenant compte de l'endommagement généré par la formation et la croissance de microfissures [3]. L'initiation et la propagation de ces microfissures sont pilotées par le critère

3. Peut-on parler d'amélioration si l'article de Lotfi & Shing (1991) précède celui de Lourenço *et al.* (1997)

de RANKINE en traction, qui transforme le matériau isotrope en un matériau orthotrope.

2.5.1.b Le comportement fragile en traction

Pour essayer de donner quelques détails sur ce type de modèle, dégageons les principales équations contrôlant le modèle de comportement en traction.

Comme nous l'avons précédemment évoqué, le critère de RANKINE contrôle l'initiation des microfissures. Lorsque la contrainte principale maximale atteint le seuil de résistance en traction f_t, on considère que les microfissures se développent dans une direction perpendiculaire à cette contrainte. Si l'on considère la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ aux lèvres de la fissure associée à un vecteur tangent $\boldsymbol{t}$ pour former une base orthonormée, ces deux directions constituent alors les axes d'orthotropie du matériau.

Considérons, pour l'instant, une unique fissure orientée par $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$. La relation entre la contrainte et la déformation peut s'écrire à l'aide d'un opérateur linéaire représentant la rigidité tangente du matériau :

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}}{d\hat{\boldsymbol{\epsilon}}} = \hat{\boldsymbol{C}}^c, \tag{2.5.1}$$

où $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_{\mathrm{N}}, \sigma_{\mathrm{T}}, \sigma_{\mathrm{NT}}\}$ et $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \{\epsilon_{\mathrm{N}}, \epsilon_{\mathrm{T}}, \epsilon_{\mathrm{NT}}\}$. On suppose que cette matrice est diagonale dans le repère $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t})$:

$$\hat{\boldsymbol{C}}^c = \begin{bmatrix} E_{\mathrm{NN}} & 0 & 0 \\ 0 & E_{\mathrm{TT}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\mathrm{NT}} \end{bmatrix}. \tag{2.5.2}$$

En clair, l'effet POISSON mésoscopique est négligé. Au niveau microscopique, on décide de négliger les effets de dilatance qui couplent les réponses normales et tangentielles. Toutefois, le module de cisaillement G_{NT} peut être couplé aux modules de rigidité E_{NN} et E_{TT}.

L'adoucissement du matériau est donné par la fonction illustrée à la figure 2.12. Cette loi d'adoucissement conduit à écrire, pour les modules de rigidité :

$$E_{\mathrm{NN}} = \frac{d\sigma_{\mathrm{N}}}{d\epsilon_{\mathrm{N}}} = \alpha E_m, \tag{2.5.3}$$

où E_m est le module d'Young du matériau sain isotrope. La variable $\alpha = (1 - d)$ est donnée de manière indirecte par la connaissance du taux de déformation résiduelle γ.

Revenons un instant sur l'estimation du module de cisaillement G_{NT}. Cette grandeur mécanique est sensée modéliser la cohésion résiduelle du milieu due, en partie, à l'enlacement des agrégats pour les bétons ; pour les maçonneries, on parlera de l'appareillage des éléments. Trois solutions sont envisagées par les auteurs. La première consiste à postuler l'isotropie du module de cisaillement. Cette hypothèse conduit à :

$$G_{\mathrm{NT}} = \frac{E_{\mathrm{NN}} + E_{\mathrm{TT}}}{4}. \tag{2.5.4}$$

de six ans?

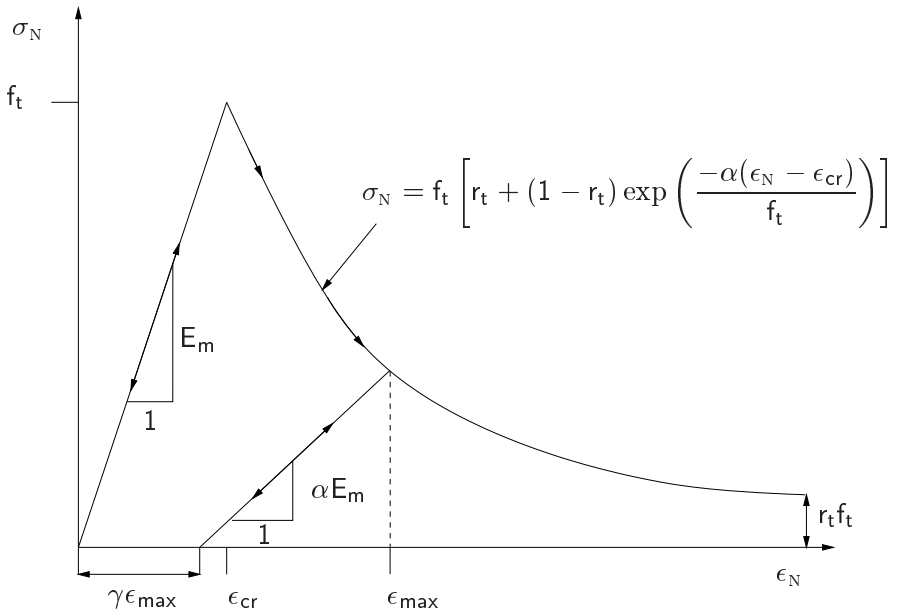


FIGURE 2.12 – *Endommagement et adoucissement, d'après (*LOTFI & SHING*, 1991)*

La seconde correspond à une paramétrisation du module de cisaillement original G :

$$G_{\mathrm{NT}} = \beta G, \quad \beta \in [0, 1]. \tag{2.5.5}$$

Le paramètre β est supposé dépendre de la déformation ϵ_{N} de la manière suivante :

$$\beta = \left(1 - \frac{\epsilon_{\mathrm{N}} - \epsilon_{cr}}{\epsilon_u - \epsilon_{cr}} \right)^n, \tag{2.5.6}$$

où ϵ_u est la déformation de traction lorsque ϵ_{NT} est nulle. Cette formule est limitée par une valeur constante résiduelle β_r qui représente l'enlacement résiduel des agrégats. Ces deux représentations conduisent à une perte de la colinéarité entre les directions principales de contrainte et de déformation. Une troisième voie consiste à maintenir cette colinéarité en calculant G_{NT} de la façon suivante :

$$G_{\mathrm{NT}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}. \tag{2.5.7}$$

Enfin, le module de rigidité tangentiel reste égal au module initial tant qu'aucune microfissure ne se développe dans l'autre direction et que la compression n'engendre pas de plasticité. Toutefois, la dégradation de E_{NN} engendre un effet sur le seuil de résistance en compression f_c, en anticipant l'écoulement plastique tangentiel. Cet effet est pris en compte par la formule suivante :

$$\sigma_{\mathrm{T}} = f_c^{max} \left[2 \left(\frac{\epsilon_{\mathrm{T}}}{\epsilon_c} \right) + \left(\frac{\epsilon_{\mathrm{T}}}{\epsilon_c} \right)^2 \right], \quad \text{avec} \quad \frac{f_c^{max}}{f_c} = \frac{1}{0,8 + 0,34(\epsilon_{\mathrm{N}}/\epsilon_c)} \leq 1, \tag{2.5.8}$$

où ϵ_c est la valeur de la déformation de compression qui correspond à f_c pour le matériau sain. L'inconvénient de ce type de couplage est qu'il est écrit dans les espaces de contraintes et de

déformations principales en traction et en compression. Ces directions principales n'ont *a priori* aucune raison d'être identiques. L'application de ce type de formule conduit alors à dissymétriser l'opérateur tangent. Les auteurs préfèrent utiliser cette formule uniquement lors de l'estimation des forces intérieures et conserver ainsi la symétrie de l'opérateur. Ceci affecte uniquement le taux de convergence de l'algorithme et pas la valeur à convergence du résidu d'équilibre.

Pour terminer, l'opérateur global est donnée grâce à une matrice de rotation $\boldsymbol{R}$ entre l'angle des directions principales de fissures et le repère global :

$$\boldsymbol{C}^c = {}^{\intercal}\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{C}}^c\boldsymbol{R}\,. \tag{2.5.9}$$

Cette équation est intégrée de manière incrémentale par une méthode du point milieu qui assure la conservation de la colinéarité.

2.5.1.c Validation du modèle sur des essais caractéristiques

Lotfi & Shing (1991) testent leur modèle sur deux essais sur un appareil régulier, où l'état des contraintes est hétérogène. Le premier est un essai brésilien identique à celui illustré à la figure 1.11(b) et le deuxième est un essai de cisaillement identique à celui illustré à la figure 1.11(a). Les simulations sont commentées de manière assez objectives, en insistant sur les défauts majeurs de la modélisation.

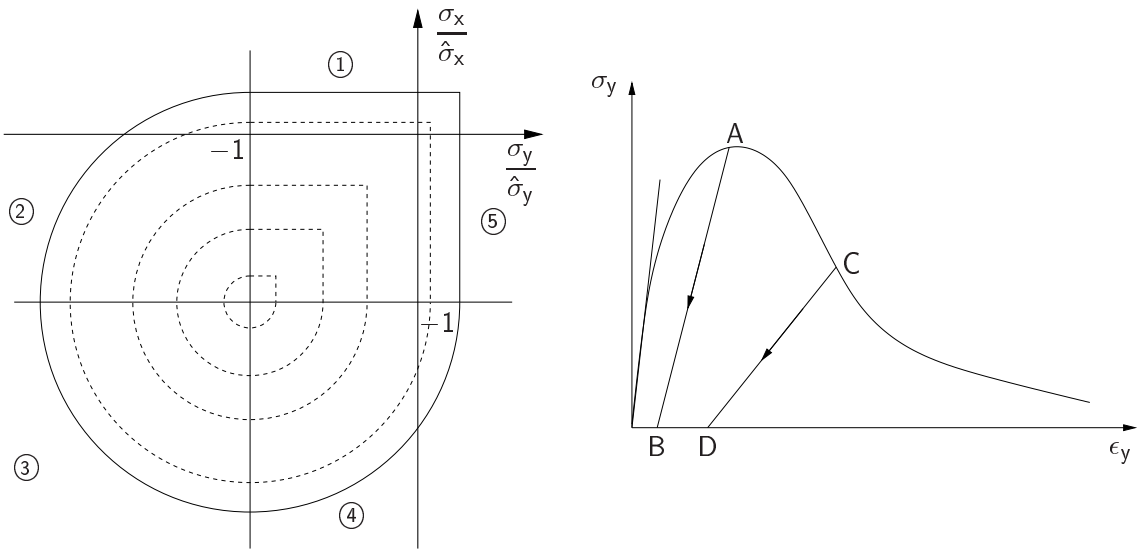
Sur les deux essais, les résultats souffrent d'une dépendance au maillage assez forte due à la localisation de la déformation. Les auteurs contournent le problème, sans le résoudre, en utilisant une taille moyenne d'éléments correspondant aux grandeurs caractéristiques des zones où la déformation se localise. Une fois cette opération réalisée, les résultats sur l'essai brésilien sont en accord avec les expériences.

Concernant l'essai de cisaillement, les auteurs signalent les problèmes liés à une modélisation au moyen d'éléments finis linéaires. En effet, si on applique une sollicitation de cisaillement pur sur un élément linéaire donné, l'ouverture d'une fissure diagonale ne peut se faire sans contrainte de compression. Au niveau de la réponse structurale, on constate alors un cisaillement résiduel très fort qui interdit la ruine quasi-fragile constatée expérimentalement. Au cours de la simulation numérique les éléments se « verrouillent » un à un sur cette valeur de cisaillement résiduelle provoquant, la convergence vers un état de contraintes erroné. Une première solution pourrait consister à améliorer la cinématique des éléments [4]. Pour les auteurs, une approche discrète de la micromécanique des joints est incontournable pour éviter à la fois les problèmes de verrouillage et de sensibilité au maillage.

2.5.2 Plasticité et endommagement fragile en traction et compression

Papa & Nappi (1997) adaptent aux maçonneries le modèle développé par Ortiz (1985) pour le béton. Ils considèrent pour cela un matériau orthotrope sous l'hypothèse des contraintes

4. Nous pouvons penser par exemple aux éléments non conformes comme les éléments EAS (Simo & Rifai, 1990) ou les éléments qui présentent un mode de déformation localisé (Ortiz *et al.*, 1987)



(a) Surface limite d'écoulement

(b) Courbes contrainte-déformation sur un essai de traction uniaxiale

FIGURE 2.13 – *Domaine d'élasticité et loi d'adoucissement(d'après* PAPA & NAPPI *(1997))*

planes. Le modèle s'appuie sur un domaine élastique convexe dans l'espace des contraintes et sur une loi d'écoulement suivant l'hypothèse de normalité pour des raisons de simplicité de mise en œuvre. Le domaine est formé de deux paraboloïdes et de trois ellipsoïdes données par les inéquations suivantes :

$$\Phi^j(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \frac{1}{2}(c_x^j)^2(\sigma_x + \hat{\sigma}_x)^2 + \frac{1}{2}(c_y^j)^2(\sigma_y + \hat{\sigma}_y)^2 \tag{2.5.10}$$

$$+ \frac{1}{2}(c_{xy})^2(\tau_{xy})^2 - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{ty})^2 \leq 0, \tag{2.5.11}$$

où $j \in [\![1, 4]\!]$ désigne la $j^{\text{ème}}$ portion de la surface limite (*voir* figure 2.13(a)). Les valeurs $-\hat{\sigma}_x$ et $-\hat{\sigma}_y$ sont les valeurs des contraintes correspondant aux valeurs maximales de contraintes de cisaillement. Les constantes c_*^j sont calculées en imposant les restrictions supplémentaires suivantes :

a) continuité sur les dérivées aux raccords entre les coniques le long des plans $\sigma_x = -\hat{\sigma}_x$ et $\sigma_y = -\hat{\sigma}_y$,

b) pour $\tau_{xy} = 0$, les coniques doivent passer par les points $(\sigma_x = \bar{\sigma}_{cx}, 0)$ et $(0, \sigma_y = \bar{\sigma}_{cy})$ où $\bar{\sigma}_{cx}$ (resp. $\bar{\sigma}_{cx}$) est la limite de compression uniaxiale suivant x (resp. y).

La limite courante en traction uniaxiale suivant la direction y, $\bar{\sigma}_{ty}$, contrôle l'écrouissage isotrope du matériau. Le direction y, qui correspond à la verticale dans leur simulation, est donc privilégiée par ce choix mais, selon les auteurs, cette hypothèse est vérifiée dans les expériences. La loi d'évolution est directement donnée par une loi empirique univoque $\sigma_y = f(\epsilon_y)$ représentant un essai de traction uniaxiale suivant la direction y (*voir* figure 2.13(b)).

Pour régler les problèmes liés à la localisation, un terme non local est ajouté dans le cas des applications quasi-statiques, basé sur la conservation de l'énergie de rupture sur un volume donné. Dans le cas d'évolution dynamique, les auteurs s'appuient sur les résultats de Comi *et al.* (1992) qui fournissent une condition sur le pas de temps du schéma d'intégration pour éviter tout problème lié à l'adoucissement

2.5.3 Commentaires

On a vu, à travers ces deux exemples de modélisations comment la plasticité et l'endommagement peuvent être couplés pour essayer de représenter les phénomènes inélastiques dans les maçonneries. Si l'on écarte l'emploi d'une plasticité associée, souvent par commodité numérique, deux inconvénients restent toutefois à souligner :

- Le premier est inhérent à la modélisation même du comportement inélastique des maçonneries. On voit, en effet, que la prise en compte des comportements atypiques comme les multiples couplages entre plasticité et endommagement ou l'apparition des microfissures dans des directions parallèles au chargement, nécessitent de nombreux paramètres et des modèles sophistiqués. Les différents ingrédients des modèles phénoménologiques, introduits souvent de manière indépendante, pour surmonter un à un les problèmes spécifiques de chaque aspect du comportement, interagissent souvent de manière mal maîtrisée. Comme le font remarquer Lotfi & Shing (1994), des informations supplémentaires, au niveau microstructural, sont en fait indispensables. Celles-ci peuvent être introduites directement par l'intermédiaire de modélisations micromécaniques — c'est ce que nous verrons au § 3 —, l'autre solution étant de construire des modèles macroscopiques sur la base de considérations microscopiques. Le modèle initial d'Ortiz (1985) est construit dans cet esprit ; on détaillera plus loin ces méthodes et ce modèle, en particulier au § 4.
- Le deuxième problème est à la fois de l'ordre de la modélisation et de celui de la résolution numérique. Il est étroitement lié au caractère adoucissant et non associé de ces modèles. Sans plus attendre, nous proposons d'en faire le sujet du paragraphe suivant.

2.6 Problèmes liés à la modélisation de l'adoucissement

2.6.1 Instabilités matérielles et problèmes numériques associés

Comme nous l'avons vu dans les trois méthodes présentées dans les parties précédentes (§ 2.3 à § 2.5), le problème numérique majeur posé par le comportement adoucissant et son caractère non associé est la sensibilité des résultats aux maillages. Il n'est en fait qu'une conséquence parmi d'autres des phénomènes qui se produisent lorsque le comportement met en jeu des instabilités matérielles. La stabilité d'un comportement, les instabilités possibles et leurs caractérisations et, pour finir, des problèmes numériques qui leurs sont associés, seront abordés dans ce paragraphe .

2.6.1.a Critère de stabilité matérielle

Hill (1958) propose un critère de stabilité matérielle sous la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0\,. \tag{2.6.1}$$

Ce critère de stabilité est équivalent à l'unicité de la solution du problème d'équilibre en vitesses.

Cette inégalité est parfois appelée inégalité de Drucker (Nguyen, 1986). Elle peut, en effet, être déduite du postulat de stabilité de Drucker (1959) pour certaines classes de comportement. La notion de stabilité matérielle n'est toutefois pas définie de manière unique. On peut penser à la stabilité au sens de Lyapunov ou de Bui, (*voir* (Bazant & Cedolin, 1991, Chap 10)).

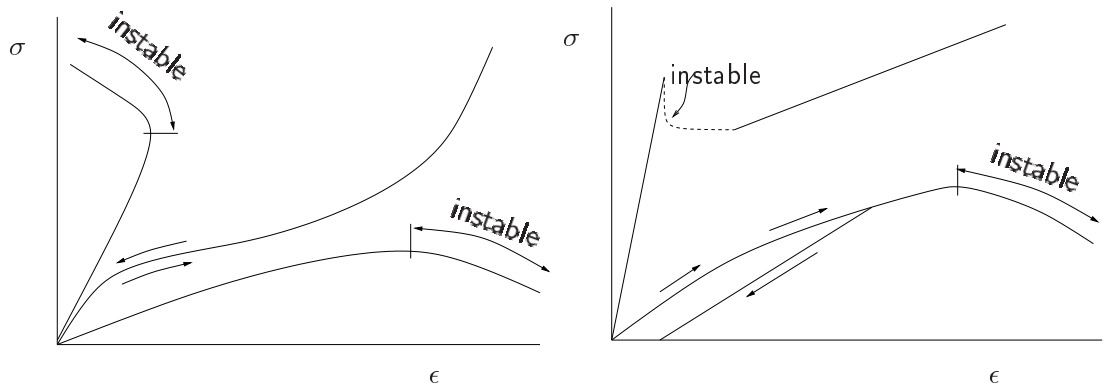
2.6.1.b Exemples d'instabilités matérielles

Pour illustrer ce critère, considérons un essai de traction $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0$ (resp. de compression $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} < 0$) uniaxiale sur un matériau présentant de l'adoucissement. La courbe de réponse contrainte-déformation macroscopique présente, en traction (resp. en compression), une pente $\dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\epsilon}} < 0 \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} < 0$ (resp. $\dfrac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\epsilon}} > 0$). On voit donc que le critère de stabilité (2.6.1) est alors violé. Sur la figure 2.14, on donne deux exemples de situations où tel est le cas.

L'adoucissement, ou écrouissage négatif, est donc clairement instable, l'instabilité en cause dans la plupart des cas étant la localisation de la déformation. Au cours d'un essai de traction ou de compression uniaxial, l'état mécanique dans l'éprouvette devient hétérogène à partir d'un seuil de chargement très voisin du seuil d'adoucissement. Le comportement adoucissant autorise, en effet, le déchargement de certaines parties au profit d'une localisation de la déformation. Cette localisation se produit le plus souvent autour des hétérogénéités du matériau qui servent de lit au développement des instabilités.

Il est important de noter que la présence d'un module d'écrouissage négatif n'est pas le seul cas ou ce critère est violé[5]. Les exemples didactiques violant le critère de Hill, qui ont été

5. L'exemple simple précédent suppose en effet $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ scalaire



(a) Comportement élastique (b) Comportement élasto-plastique

FIGURE 2.14 – *Deux exemples de violation du postulat de stabilité, d'après(*DRUCKER, *1959)*

donnés, étaient de nature uniaxial. La relation (2.6.1) étant d'ordre tensoriel, des instabilités peuvent survenir alors que le module d'écrouissage est encore positif (phase de durcissement).

L'adoucissement n'est donc pas le seul phénomène physique susceptible de violer le critère de stabilité. Les géomatériaux, qui présentent des phénomènes de frottement interne importants, peuvent être instables alors que la relation contrainte-déformation est encore en phase croissante (RUDNICKI & RICE, 1975). On ne peut, par contre, pas clairement parler d'instabilité dans le sens où cette perte d'unicité de la solution ne conduit pas nécessairement à une instabilité si les branches bifurquées sont stables. Comme nous allons le voir dans la suite, ce type de phénomène est à mettre en relation avec la perte de symétrie majeure de l'opérateur tangent qui peut se produire pour des modèles de comportement non associés.

Schématiquement, pour les géomatériaux, le phénomène d'adoucissement est à mettre en relation avec les décohésions qui peuvent se produire dans le matériau sous des pressions de confinement assez faibles. Il peut être associé à la rupture en mode I des matériaux par endommagement fragile. Le deuxième type, est quant à lui, associé à des phénomènes de frottement non associé sous des pressions de confinement élevées, et peut être associé à la rupture en mode II. En ce qui concerne les structures maçonnées, ces deux types de rupture peuvent avoir lieu : la première lorsque les structures sont mises en traction et la deuxième, en compression. Pour les sollicitations de cisaillement, les modes de rupture sont couplés.

Pour une présentation détaillée des fondements thermodynamiques de la stabilité des structures inélastiques, on renvoie le lecteur à (BAZANT & CEDOLIN, 1991, Chap 10, Stability of Inelastic Structures, Bifurcation and Thermodynamics basis).

2.6.1.c Caractérisation des instabilités.

La littérature sur ce sujet est dense et le vocabulaire employé n'est pas unifié. Nous donnerons ici que quelques caractérisations de ces instabilités en renvoyant aux travaux récents de DÉSOYER

& Keryvin (1999) pour de plus amples détails.

En considérant une approche incrémentale du problème en vitesses, ou en introduisant comme le fait Hill (1958) la notion de solide linéaire de comparaison, la relation entre les vitesses de déformation et de contrainte peut s'écrire, en considérant $\boldsymbol{C}_t$ l'opérateur linéaire tangent local, sous la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{C}_t \,\bar{\bar{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\,. \tag{2.6.2}$$

On obtient alors, pour le critère de stabilité (2.6.1), le résultat suivant :

$$\forall\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \neq 0, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{C}_t \,\bar{\bar{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{Unicité de la solution}\\ \text{du problème en vitesses.}\end{array} \tag{2.6.3}$$

En contraposant, on obtient que la perte de stabilité correspond à la perte du caractère défini-positif de l'opérateur linéaire tangent symétrisé, i.e. :

$$\text{Perte d'unicité de la solution} \Longrightarrow \det\left(\boldsymbol{C}_t + {}^{\intercal}\boldsymbol{C}_t\right) = 0\,. \tag{2.6.4}$$

Même en l'absence de non linéarités géométriques, une instabilité structurelle peut donc se développer du fait que l'opérateur global cesse d'être défini-positif.

Un comportement adoucissant peut être caractérisé par son module d'écrouissage en contrainte $h_{\boldsymbol{\sigma}}$ de la manière suivante :

$$\text{(Adoucissement) } h_{\boldsymbol{\sigma}} \leq 0 \Longleftrightarrow \exists\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \neq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{C}_t \,\bar{\bar{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{0}\,. \tag{2.6.5}$$

La première occurrence de (2.6.5) définit le seuil d'adoucissement pour $h_{\boldsymbol{\sigma}} = {}^{2}h_{\boldsymbol{\sigma}} = 0$. On constate donc que l'adoucissement, i.e., (2.6.5) viole le critère de stabilité (2.6.3). Ceci ne garantit pas, pour autant, l'émergence d'une instabilité de type localisation de la déformation. Nous noterons, avec pour objectif de classifier les différentes bifurcations, ${}^{1}h_{\boldsymbol{\sigma}}$ la valeur de $h_{\boldsymbol{\sigma}}$ pour laquelle le critère de Hill est violé.

Pour essayer de qualifier les instabilités, nous allons introduire la notion mathématique de perte d'ellipticité des équations d'équilibre en vitesses. L'ellipticité du problème assure en effet que le problème statique soit bien posé, au sens où un nombre fini de solutions linéairement indépendantes, dépendant de manière continue des données existe. Mathématiquement, cette perte d'ellipticité se produit si (Rudnicki & Rice, 1975)

$$\text{Perte d'ellipticité} \Longleftrightarrow \exists\, \boldsymbol{n}, \quad \det\left(\boldsymbol{n}\boldsymbol{C}_t\boldsymbol{n}\right) = 0. \tag{2.6.6}$$

Physiquement, cette égalité traduit l'occurrence d'une onde d'accélération stationnaire de normale $\boldsymbol{n}$ (Hill, 1962). On constate le même type de phénomène en dynamique, où le caractère hyperbolique des équations peut être perdu.

En choisissant correctement une vitesse de déformation $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, on peut montrer que cette perte d'ellipticité se produit uniquement lorsque le critère de stabilité matérielle (2.6.3) est violé. En effet, pour $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n})_S$, on peut écrire une critère de perte d'ellipticité forte, soit :

$$\text{Perte d'ellipticité forte} \Longleftrightarrow \exists\, (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}), \quad (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{n}) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{C}_t \,\bar{\bar{\otimes}}\, (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{m}) = 0. \tag{2.6.7}$$

On peut montrer que cette perte d'ellipticité forte est antérieure à la perte d'ellipticité simple. Nous noterons donc ${}^3h_{\boldsymbol{\sigma}}$ la valeur de $h_{\boldsymbol{\sigma}}$ pour laquelle on a perte d'ellipticité simple (2.6.6) et ${}^4h_{\boldsymbol{\sigma}}$ pour la perte d'ellipticité forte (2.6.7). Cette notion d'ellipticité des équations aux dérivées partielles est intimement liè à la convexité des potentiels d'énergies libres. Dans le cas de comportements adoucissants, la condition de convexité des potentiels n'est généralement pas remplie. Pour plus de détails sur ces aspects, on renvoie le lecteur aux travaux suivants : (Hill, 1970 ; Ball, 1977). Pour une revue des conditions d'ellipticité forte, on renvoie à (Dacoragna, 2001).

La perte d'ellipticité simple est, quant à elle, postérieure à la perte d'unicité de la solution puisque la cinématique est contrainte par le choix de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ dans (2.6.7).

En résumé pour un modèle de comportement quelconque, on peut classer les différents événements suivant le module d'écrouissage (décroissant pour un chargement monotone croissant) de la manière suivante :

$$ {}^1h_{\boldsymbol{\sigma}} \geq {}^3h_{\boldsymbol{\sigma}} \geq {}^4h_{\boldsymbol{\sigma}} \,. \tag{2.6.8} $$

On ne peut, par contre, rien dire dans le cas général sur le classement de ${}^2h_{\boldsymbol{\sigma}}$ par rapport à ces trois événements, mais on peut aller plus loin pour un modèle de comportement associé, auquel cas on a :

$$ {}^1h_{\boldsymbol{\sigma}} = {}^2h_{\boldsymbol{\sigma}} = 0, \quad {}^3h_{\boldsymbol{\sigma}} = {}^4h_{\boldsymbol{\sigma}} \leq 0 \,. \tag{2.6.9} $$

Ce résultat tient principalement au fait que $\boldsymbol{C}_t$, l'opérateur linéaire tangent local, est symétrique pour les comportements associés.

2.6.1.d Problèmes numériques associés

D'un point de vue numérique, on constate une perte d'objectivité des solutions au sens où elles dépendent pathologiquement des paramètres des méthodes de résolution numériques : taille et orientation des maillages, taille des incréments, procédé de linéarisation, *etc.*... Par exemple, les zones de rupture ont tendance à se propager le long des directions engendrées par le maillage. En règle générale, plus on raffine le maillage pour obtenir une bonne précision, plus l'énergie dissipée à la rupture diminue, tendant même à s'annuler. De même, les dimensions caractéristiques des zones endommagées, comme les largeurs de bandes de cisaillement ont une fâcheuse tendance à diminuer avec le raffinement du maillage. Enfin, les orientations des bandes où se localisent sont grandement influencés par le maillage.

2.6.2 Solutions pour répondre à ces problèmes

De nombreuses tentatives ont été faites pour remédier aux problèmes posés par ces instabilités matérielles. Un état de l'art est dressé dans (de Borst *et al.*, 1993) et on n'en donnera ici les grandes lignes.

2.6.2.a Modèles non-locaux ou limiteurs intégraux de localisation

La première solution, proposée, dans le cadre de la plasticité, par Bazant & Lin (1988), repose sur l'introduction d'un terme non local dans le contrôle de l'adoucissement. Considérons un comportement plastique défini classiquement par sa surface seuil :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p) = 0\,. \tag{2.6.10}$$

La variable interne κ^p contrôle l'écrouissage. Elle peut, par exemple, être la déformation plastique équivalente cumulée dans le cas d'un écrouissage isotrope :

$$\kappa^p = \int \dot{\kappa}^p\, dt = \int \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \bar{\bar{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p}\, dt\,. \tag{2.6.11}$$

Le caractère non local de l'écrouissage est introduit en moyennant κ^p sur un voisinage V, du point considéré, déterminé par une fonction poids g :

$$\bar{\kappa}^p = \frac{1}{V_r(x)} \int_V g(s)\dot{\kappa}^p(x+s)\, ds, \tag{2.6.12}$$

où le volume d'interaction est donné par :

$$V_r(x) = \int_V g(s-x)\, ds\,. \tag{2.6.13}$$

On suppose alors que la surface seuil de plasticité dépend désormais de $\bar{\kappa}^p$ et non plus de κ^p soit :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\kappa}^p) = 0\,. \tag{2.6.14}$$

La fonction poids g peut être une fonction porte ou une fonction test comme la fonction de Schwartz, où toute fonction $\mathcal{L}^1$ à support compact. Elle détermine le rayon d'interaction entre les grandeurs locales et donc, implicitement, introduit un nouveau paramètre matériau homogène à une longueur, dite longueur interne ou caractéristique.

Les principaux inconvénients de ce type d'approche sont, d'une part, le manque d'informations sur l'estimation du paramètre matériel g ou d'une longueur caractéristique correspondante et, d'autre part, la difficulté de leur associer des conditions aux limites pertinentes.

Pijaudier-cabot & Bazant (1987) et Mazars (1990) ont appliqué ce même concept de non localité aux comportements endommageables. Dans les cas du béton, la longueur caractéristique d'interaction est mise en relation avec la taille moyenne des granulats (environ le triple). L'approche semble être alors physiquement appuyée.

Applications aux maçonneries. En ce qui concerne les maçonneries, comme on a pu le voir précédemment, on souhaite avant tout conserver l'énergie de rupture quelque soit le maillage considéré. Les longueurs internes ne sont donc pas directement corrélées aux dimensions caractéristiques de l'appareil (épaisseur des joints, dimension des éléments, ...). On comprend aisément que l'on préfère se baser sur une longueur caractéristique sans relation directe avec la physique

des phénomènes. En effet, pour les mortier par exemple, la taille du granulat est très faible. De même, ne considérant pas que la déformation se localise dans le joint entier, il devient nécessaire d'adapter les dimensions caractéristiques des maillages à l'épaisseur des joints. On contredit alors les choix fondamentaux à la base des modélisations macromécaniques.

2.6.2.b Théories de gradients d'ordre supérieur ou limiteurs différentiels de localisation

La deuxième solution s'appuie sur les travaux de Germain (1973b) qui étend le cadre d'application du théorème des puissances virtuelles aux gradients d'ordre supérieur.

Cadre général. Si l'on reprend le cadre et les notations rappelées dans la § 5.1.3, la puissance des efforts intérieurs devient une forme linéaire du premier gradient de vitesses ainsi que des gradients d'ordre supérieur. Pour le second gradient, par exemple, on peut écrire :

$$\hat{\mathcal{P}}_{int} = -\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \nabla_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{v}}) + \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x},t) \,\bar{\bar{\bar{\otimes}}}\, \nabla\nabla_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{v}})\, d\boldsymbol{x}. \tag{2.6.15}$$

La notation $\nabla\nabla$ représente le second gradient par rapport à la vitesse virtuelle, soit en notation indicielle :

$$\nabla\nabla_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{v}})_{ijk} = \frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{v}}_i}{\partial x_j \partial x_k}\,. \tag{2.6.16}$$

Si l'on reporte cette formulation enrichie de la puissance des efforts intérieurs dans le théorème des puissances virtuelles, on obtient l'équation du mouvement suivante :

$$\rho\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{f} + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{\sigma} - \mathrm{divdiv}_{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{\tau}, \tag{2.6.17}$$

soit en notation indicielle :

$$\rho\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{f}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \boldsymbol{\tau}_{ijk}}{\partial x_j \partial x_k}\,. \tag{2.6.18}$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{t}, \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{m}, \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.6.19}$$

où $\boldsymbol{t}$ est une densité de forces surfaciques et $\boldsymbol{m}$ une densité surfacique de moment.

Chambon *et al.* (1998) ont développé un modèle unidimensionnel didactique d'un matériau adoucissant sous l'hypothèse du second gradient. Ils montrent analytiquement que l'introduction d'un gradient d'ordre deux et des lois de comportement qui lui sont associé, permet une sélection parmi les longueurs d'ondes caractéristiques des solutions analytiques. Ils montrent également que si l'unicité de la solution n'est pas assurée, l'ensemble des solutions reste cependant fini et que toutes ces solutions restent indépendantes du maillage.

Les théories du second gradient ont, en fait, été introduites de manière plus heuristique, en appliquant directement un second gradient à la déformation plastique cumulée κ^p (Aifantis,

1984 ; Zbib & E.C., 1988). En choisissant de développer g en série de Taylor autour de $s = 0$ dans l'expression de $\dot{\bar{\kappa}}$ (2.6.12), on obtient en effet :

$$\dot{\bar{\kappa}}^p = \dot{\kappa}^p + c_1 \nabla_{\boldsymbol{x}} \dot{\kappa}^p + c_2 \nabla_{\boldsymbol{x}}^{(2)} \dot{\kappa}^p + \dots \tag{2.6.20}$$

La surface limite de charge s'exprime alors en fonction des gradients de la déformation plastique cumulée :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, \kappa^p, \nabla_{\boldsymbol{x}}^{(2)} \kappa^p, \dots) = 0\,. \tag{2.6.21}$$

Cette approche permet des applications numériques rapides et à moindre frais. En revanche, les forces thermodynamiques associées à ces gradients sont rarement explicitées. De même, les lois d'états et complémentaires dictant l'évolution de ces variables ne sont pas toujours claires et la démonstration du respect du second principe n'est pas toujours donnée.

Endommagement et gradient d'endommagement Dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus proposé par Germain (1973b), Frémond & Nedjar (1996) ont utilisé la théorie des gradients d'ordre supérieur en mécanique de l'endommagement continu. Considérant le seul premier gradient d'endommagement, ils formulent l'expression de la puissance des efforts intérieurs suivante :

$$\hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\dot{d}}) = -\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \nabla_{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{v}})\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Omega(t)} X_d\, \hat{\dot{d}} + \boldsymbol{H}\, \nabla_{\boldsymbol{x}}(\hat{\dot{d}})\, d\boldsymbol{x}, \tag{2.6.22}$$

où X_d est la force motrice de l'endommagement et $\boldsymbol{H}$ la force associée au gradient d'endommagement [6].

Les auteurs introduisent de même une puissance des efforts extérieurs tenant compte des forces susceptibles d'agir sur d :

$$\hat{\mathcal{P}}_{ext}(\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\dot{d}}) = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t) \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, t)\, ds + \int_{\Omega(t)} x_d\, \hat{\dot{d}}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega(t)} y_d\, \hat{\dot{d}}\, ds, \tag{2.6.23}$$

où x_d et y_d sont ces forces externes agissant directement sur l'endommagement ; on peut penser à des actions chimiques ou biologiques que le matériau peut subir. A partir de ces expressions, les auteurs déduisent des équations d'équilibres pour les variables d'état :

$$\operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad \boldsymbol{\sigma}\, \boldsymbol{n} = t \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \tag{2.6.24}$$

$$\operatorname{div}_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{H} - X_d + x_d = 0, \quad \text{dans} \quad \Omega, \qquad \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{n} = y_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\,. \tag{2.6.25}$$

Les lois d'état sont données par une énergie libre $W(\boldsymbol{\epsilon}, d, \nabla_{\boldsymbol{x}} d)$ qui est choisie sous la forme suivante :

$$W(\boldsymbol{\epsilon}, d, \nabla_{\boldsymbol{x}} d) = \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d, \nabla_{\boldsymbol{x}} d) + \Phi_{[0,1]}(d), \tag{2.6.26}$$

6. Outre la présence d'un gradient d'ordre supérieure de l'endommagement, une seconde originalité de la méthode est la prise en compte du travail des variables internes, comme l'endommagement dans la puissance des efforts intérieurs.

où $\Phi_{[0,1]}$ est la fonction indicatrice du segment $[0,1]$. Les lois d'état s'écrivent donc :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{R}} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d, \nabla_{\boldsymbol{x}} d)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}, \quad X_d^{\mathsf{R}} \in \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d, \nabla_{\boldsymbol{x}} d)}{\partial d} + \partial \Phi_{[0,1]}(d), \quad \boldsymbol{H}^{\mathsf{R}} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d, \nabla_{\boldsymbol{x}} d)}{\partial \nabla_{\boldsymbol{x}} d}\,. \tag{2.6.27}$$

Les lois complémentaires sont données en considérant que les phénomènes irréversibles sont associés uniquement à la variable d (i.e., $\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{IR}} = 0$ et $\boldsymbol{H}^{\mathsf{IR}} = 0$). Pour cela, les auteurs introduisent, de manière usuelle, un pseudo-potentiel de dissipation $\phi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{\epsilon}, d, \nabla_{\boldsymbol{x}} d, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{d}, \dot{\nabla_{\boldsymbol{x}} d})$ et déduisent la partie irréversible[7] associée à d :

$$X_d^{\mathsf{IR}} \in \partial \phi(\dot{d})\,. \tag{2.6.28}$$

Ce modèle est appliqué à la modélisation de l'endommagement du béton. Les résultats de simulations numériques sur des essais de flexion, trois ou quatre points, montrent une bonne objectivité par rapport au maillage.

Commentaires L'avantage majeur des théories de gradients d'ordre supérieur est le cadre thermodynamique rigoureux dans lequel elles sont développées. Il est le garant du respect des principes fondamentaux de la thermodynamique des milieux continus. De plus, les conditions aux limites sont définies naturellement à l'aide du principe des puissances virtuelles, ce qui n'est pas le cas lorsqu'un terme non local est introduit comme une moyenne dans un voisinage donné (*voir* équation (2.6.12)). Bien qu'elles soient correctement définies, il n'en reste pas moins que les valeurs à attribuer aux conditions aux limites sur les gradients sont difficiles à interpréter et, en conséquence, à estimer.

Là encore, l'introduction d'un gradient d'endommagement permet de prendre en compte des phénomènes physiques d'interaction non-locale, qui sont le plus souvent justifiés par la microstructure du matériau. Cependant, dans les deux cas – modèles non locaux heuristiques ou théorie de gradients d'ordres supérieurs –, l'estimation des paramètres contrôlant l'évolution de ces nouvelles variables reste délicate. On trouvera toutefois dans (Pijaudier-cabot & Bazant, 1989) quelques méthodes et justifications pour estimer ces longueurs caractéristiques.

2.6.2.c Régularisation dynamique et visqueuse

Needleman (1988) propose une troisième solution pour résoudre les problèmes liés à la localisation et à l'adoucissement. Il s'agit d'introduire une dépendance temporelle ou, si l'on préfère, de la viscosité dans le comportement du matériau et de considérer le problème sous sa forme dynamique. L'introduction d'une viscosité apporte un temps caractéristique au matériau qui peut être facilement relié à une longueur d'onde de propagation. Une fois de plus, en considérant la dynamique et la viscosité, on prend en compte les effets non-locaux générés par la propagation d'ondes. Cette régularisation dynamique et visqueuse permet de retrouver l'objectivité des résultats vis à vis du maillage.

7. Le potentiel peut dépendre de nombreuses variables internes, l'hypothèse de normalité n'est donc pas assurée par l'inclusion (2.6.28)

D'un point de vue mathématique, le caractère hyperbolique du problème de dynamique est conservé. Cette solution possède l'avantage indéniable d'être simple à mettre en oeuvre en ne nécessitant que peu de modifications par rapport aux modèles classiques. En revanche, le coût d'un calcul dynamique transitoire peut être élevé, en particulier si le temps caractérisant la viscosité est grand. Selon DE BORST *et al.* (1993), un deuxième inconvénient surgit pour des vitesses de sollicitations lentes où le phénomène de régularisation décroît rapidement pour atteindre le régime limite des matériaux indépendants du temps. La véracité de cette remarque est plus que remise en question dans les travaux de KERYVIN (1999). Nous verrons dans la partie II, où l'on présente le modèle choisi, que sous sollicitations quasi-statiques, de forts phénomènes dynamiques locaux peuvent se produire suite à des ruptures brutales. Le phénomène de régularisation dynamique permet alors d'appréhender correctement le problème.

Ajoutons enfin que si pour les matériaux usuels, la viscosité est facilement mesurable, cela n'est généralement pas le cas pour les géomatériaux. Les résultats de COMI *et al.* (1992), concernant les régularisations purement dynamique dans le cadre d'un adoucissement cinématique linéaire peuvent fournir une solution à ce problème en considérant une viscosité nulle. Ils ont été étendue par RAJGELJ *et al.* (1993) à l'écrouissage non linéaire à la fois cinématique et isotrope. Ces résultats donnent des conditions suffisantes sur l'incrément de temps considéré lors de l'intégration des équations pour que le problème reste correctement posé. Bien que quelque peu surprenant, on peut penser que l'utilisation de certains schémas d'intégration possédant une viscosité numérique inhérente puissent aider à régulariser le problème.

2.6.2.d Milieu micro-polaire de COSSERAT

Une dernière solution a été proposée par MÜHLHAUS (1989). Elle concerne l'application de la théorie des milieux continus de COSSERAT au matériau présentant un comportement quasi-fragile et adoucissant. Cette solution fera l'objet du paragraphe suivant. En effet, elle est à la fois une solution aux problèmes générés par l'adoucissement mais aussi, une méthode à part entière de modélisation macroscopique, particulièrement pertinente pour les maçonneries.

2.6.3 Conclusion sur les méthodes de régularisation

Nous avons vu, au long de cette partie, que le comportement adoucissant et la plasticité non associée de type frottement, sont deux sources majeures d'instabilité dans les matériaux. Les géomatériaux et leurs dérivés comme les maçonneries, caractérisés, le plus souvent, par leur comportement couplant, de manière intime, l'endommagement fragile et le plasticité non associée, sont sujet à ce type d'instabilité. Nous essaierons dans la suite d'en tenir compte dans le développement de nouvelles méthodes pour traiter des maçonneries.

La plupart des techniques de régularisation apporte une information supplémentaire lorsque le problème devient mal posé à la suite d'une instabilité. Cette information, à caractère non local – non local en espace pour les limiteurs intégraux ou différentielles de localisation, non local en temps pour la régularisation dynamique et visqueuse – est toutefois difficile à estimer.

Il semble, cependant, que les théories de gradients d'ordres supérieurs et les régularisations dynamique et visqueuse soient les solutions les plus pertinentes : la première pour le cadre rigoureux dans laquelle elle est formulée, la seconde pour le caractère naturel de sa formulation. Si la première solution possède l'avantage indéniable de conserver le caractère quasi-statique des équations – moins coûteux d'un point de vue numérique et plus « rassurant » d'un point de vue mécanique –, nous opterons dans la suite pour une écriture dans un cadre dynamique des équations d'évolution de notre système mécanique. Cette discussion et la justification de ce choix seront abordées au § 5.3.6.

2.7 Les milieux de COSSERAT et les structures composées de blocs

Les milieux de COSSERAT sont généralement présentés comme des modèles de milieux continus dont la cinématique est enrichie par des micro-rotations de la « particule élémentaire ». Cependant, ils peuvent aussi être vus comme un cas particulier de la théorie du second gradient dans laquelle on ne sélectionne que certains des gradients d'ordre supérieur des déplacements et des déformations. Le terme « particule élémentaire » est ici à substituer celui de point matériel, car l'introduction de rotations nécessite la prise en compte, au minimum, d'une dimension géométrique.

2.7.1 Aperçu de la cinématique

Dans le cas d'un milieu bidimensionnel contenu dans un plan (O, e_1, e_2), la rotation autour de l'axe e_3, qui enrichit la cinématique, est donnée par :

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}). \tag{2.7.1}$$

La courbure ζ mesure la déformation associée à cette rotation :

$$\zeta_{3i} = \omega^c_{3,i} = (\omega_3 - \omega^{rig}_3)_{,i}\,, \tag{2.7.2}$$

où ω^{rig}_3 est la rotation engendrée par un déplacement de solide rigide du milieu. La déformation du milieu $\boldsymbol{\epsilon}$ est représentée par ces deux courbures auxquelles on joint les déformations plus classiques suivantes :

$$\gamma_{11} = u_{1,1}\,, \quad \gamma_{12} = u_{1,2} + \omega^c_3, \tag{2.7.3}$$

$$\gamma_{22} = u_{2,2}\,, \quad \gamma_{12} = u_{2,1} - \omega^c_3, \tag{2.7.4}$$

soit $\boldsymbol{\epsilon} = \{\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \zeta_{31}, \zeta_{32}\}$.

Pour exprimer la puissance des efforts intérieurs, deux moments m_{31} et m_{32} conjugués aux courbures ζ_{31} et ζ_{32} complètent les contraintes usuelles de CAUCHY. Les efforts intérieurs du milieu sont donc décrits par la contrainte généralisée suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, m_{31}, m_{32}\}\ . \tag{2.7.5}$$

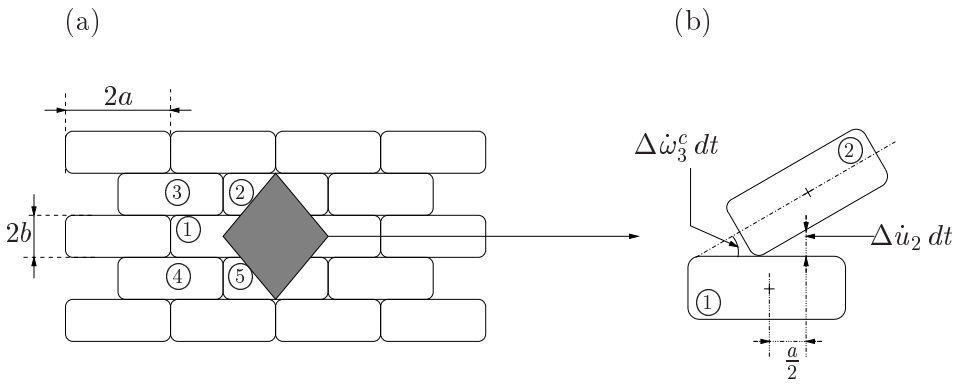


FIGURE 2.15 – *(a) Milieu régulier composé de blocs et un volume représentatif. (b) Compatibilité entre rotation et déplacement relatif entre deux blocs rigides, d'après (*MÜHLHAUS, *1993)*

La généralisation au cas d'un milieu tridimensionnel est plus technique mais ne pose pas de problème particulier. Les rotations s'expriment grâce au tenseur d'orientation $\boldsymbol{e} = (e_{ijk})$ de la manière suivante :

$$\omega_i = -e_{ikl}\epsilon_{kl}, \tag{2.7.6}$$

$$\zeta_{ij} = \omega_{i,j}\,. \tag{2.7.7}$$

Les équations du mouvement se déduisent alors naturellement :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho\gamma_i, \tag{2.7.8}$$

$$m_{ij,j} - e_{ikl}\sigma_{kl} + \mu_i = \rho\theta_i, \tag{2.7.9}$$

où μ_i est le moment volumique de force et θ_i l'accélération de rotation.

2.7.2 Applications aux structures composées de blocs

A cet enrichissement de la cinématique par des micro-rotations, des hypothèses supplémentaires sont ajoutées sur les grandeurs géométriques caractéristiques de la particule élémentaire. Ces hypothèses peuvent être formulées indirectement par l'intermédiaire des lois d'état et des lois complémentaires reliant les micro-courbures aux micro-rotations comme dans les théories de gradients d'ordre supérieurs. C'est le cas pour les applications des milieux de COSSERAT à la plasticité des matériaux macroscopiquement homogènes.

Pour des applications particulières comme les matériaux granulaires (MÜHLHAUS & VARDOULAKIS, 1987) ou les massifs rocheux composés de blocs (MÜHLHAUS, 1993), l'introduction de grandeurs géométriques se fait de manière plus explicite en considérant la microstructure du matériau.

Les développements effectués pour les roches à blocs réguliers ont été directement appliqués aux maçonneries en appareillage de pierres sèches (MÜHLHAUS *et al.*, 1997). En supposant que les transmissions des moments ne se font que par les joints de lits, (*voir* figure 2.15), une cinématique

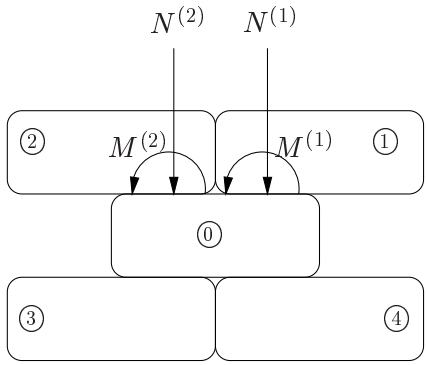


FIGURE 2.16 – *Efforts généralisés dans un milieu composé de blocs, d'après (*MÜHLHAUS*, 1993)*

particulière peut être exprimée entre les blocs ① et ②. Les vitesses relatives peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$\Delta \dot{u}_2 = \dot{u}_{2,i} n_i = \dot{\gamma}_{2i}, \tag{2.7.10}$$

$$\Delta \dot{\omega}_3^c = \dot{\zeta}_{3i} n_i, \tag{2.7.11}$$

où $\boldsymbol{n} = (a, 2b)$ est le vecteur reliant les centres de gravité des deux blocs.

Les conditions d'impénétrabilité des deux blocs peuvent s'exprimer ainsi :

$$\Delta \dot{u}_2 - \frac{a}{2} \Delta \dot{\omega}_3^c \geq 0\,. \tag{2.7.12}$$

En tenant compte des relations avec les blocs ③,④ et ⑤, on obtient la condition de compatibilité des déformations suivantes :

$$\dot{\gamma}_{22} \pm \frac{a}{2} \dot{\gamma}_{21} - \frac{a}{2} \left| \dot{\zeta}_{32} \pm \frac{a}{2} \dot{\zeta}_{31} \right| \geq 0\,. \tag{2.7.13}$$

Introduisons maintenant les efforts généralisés correspondant à la cinématique considérée. Ceux-ci sont illustrés à la figure 2.16. La relation entre les contraintes de COSSERAT et les efforts entre les blocs est établie grâce au Théorème des Puissances Virtuelles. Écrivons la puissance des efforts intérieurs, en termes d'efforts entre les blocs :

$$\frac{1}{2} \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\Delta \dot{u}}_2^{(i)}, \hat{\Delta \dot{\omega}}_3^{c\,(i)}) = -N^{(i)} \hat{\Delta \dot{u}}_2^{(i)} + M^{(i)} \hat{\Delta \dot{\omega}}_3^{c\,(i)}, \tag{2.7.14}$$

puis en terme de contraintes et de déformations de COSSERAT :

$$\frac{1}{2} \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\dot{\gamma}}_{2j}, \hat{\dot{\zeta}}_{3k}) = \frac{1}{2} \left(4ab(\sigma_{2j} \hat{\dot{\gamma}}_{2j} + m_{3k} \hat{\dot{\zeta}}_{3k}) \right). \tag{2.7.15}$$

En postulant l'équivalence des deux écritures, on aboutit à l'expression des efforts suivante :

$$N^{(1,2)} = -(a\,\sigma_{22} \pm 2b\,\sigma_{21}), \quad M^{(1,2)} = a\,m_{32} \pm 2b\,m_{31}. \tag{2.7.16}$$

Les conditions d'écoulement peuvent s'exprimer ainsi :

$$F(N, M) = -N^{(1,2)} + \frac{2}{a} \left| M^{(1,2)} \right| \leq 0, \tag{2.7.17}$$

soit, en termes de contraintes de milieu de COSSERAT :

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{22} \pm \frac{2b}{a}\sigma_{21} - \frac{2}{a}\left| m_{32} \pm \frac{2b}{a} m_{31} \right| \geq 0\,. \tag{2.7.18}$$

(MÜHLHAUS, 1993) définit F comme la surface limite de plasticité du matériau équivalent. En faisant remarquer que les $(N^{(i)}, M^{(i)})$ et $(\Delta\dot{u}_2^{(i)}, \Delta\dot{\omega}_3{}^{c\,(i)})$ sont orthogonaux lors de l'écoulement, on déduit que l'hypothèse de normalité est respectée.

Ces conditions peuvent être rapprochées de celles développées par SAVE (1986) pour la stabilité des voûtes ou, plus généralement, pour les NTM (cf. § 2.1). Là encore, il s'agit d'une écriture de loi de plasticité parfaite qui ne permet aucune dissipation. Les conditions imposées aux blocs sont analogues à une condition d'impénétrabilité de « SIGNORINI en vitesse »(cf 5.2.3) pour permettre de prendre en compte l'irréversibilité éventuelle du phénomène. Elles débouchent cependant sur la même incohérence que pour les NTM puisqu'aucune dissipation n'est possible dans un processus irréversible.

Une deuxième loi complémentaire peut être ajoutée pour décrire le frottement entre les blocs. La loi de frottement sec de COULOMB s'exprime en fonction des contraintes généralisées $\boldsymbol{\sigma}$ et devient un second seuil de plasticité macroscopique :

$$F^C(\boldsymbol{\sigma}) = |\sigma_{22}| + \mu\left(\sigma_{22} \pm \frac{2b}{a}\sigma_{21}\right). \tag{2.7.19}$$

Une loi d'écoulement, associée ou non, est ensuite exprimée pour compléter le modèle. La première incohérence peut alors être gommée par l'ajout de ce comportement, qui, quant à lui, est dissipatif.

Les milieux de COSSERAT possèdent des atouts indéniables. Tout d'abord, ils sont une méthode de régularisation des problèmes liés à l'adoucissement et ils permettent, en ce sens, d'obtenir des résultats objectifs par rapport aux maillages, où la déformation est correctement localisée. Cette régularisation est faite par l'introduction, une fois de plus, d'une longueur interne décrivant la microstructure du matériau. Leur second avantage est la justification physique de cette longueur. Dans le cas des milieux réguliers comme les maçonneries, ce nouveau paramètre est issu, de manière directe, des dimensions caractéristiques des blocs.

Pour des essais et des validations sur différents types de maçonneries des milieux de COSSERAT, on renvoie le lecteur aux travaux suivants : (BESDO, 1985 ; MASIANI *et al.*, 1995 ; MÜHLHAUS *et al.*, 1997).

2.8 Conclusion sur les modélisations macromécaniques

Pour débuter cette conclusion, nous allons nous livrer à une synthèse un peu osée qui consiste à relever les principaux types de comportements attribués aux maçonneries à travers leurs modélisations.

En ce qui concerne les modélisations afférentes à l'analyse limite et au calcul à la rupture, les modélisations se sont principalement attachées à décrire deux types de comportement caractérisés par :

- une faible résistance en traction – voire nulle – devant une très grande résistance en compression – voire infinie –,
- le frottement de COULOMB.

La première caractéristique, prise à part, a permis de définir une classe de matériau désignée par son acronyme anglais de « No Tension Materials ». Cette classe a permis de nombreuses investigations, tant sur le plan numérique qu'analytique sur la tenue des structure maçonnées. Elle rend compte du caractère fragile en traction des maçonneries, qui, si il est pris comme un comportement plastique peut être source d'incohérences. Si l'hypothèse d'un comportement élastique non linéaire est faite, elle fournit des renseignements précieux sur les zones sensibles de la structure. Bien que ce type de matériau fasse toujours l'objet de recherches actives, motivées, peut être, par des raisons esthétiques, son caractère trop idéalisé et les problèmes qui lui sont inhérents, le rende un peu caduque.

Si une résistance en compression limitée et une loi de frottement de COULOMB sont associées à la faible résistance en compression, on obtient alors un critère simple mais particulièrement efficace en termes de calcul à la rupture.

Si l'on excepte maintenant le cas particulier des « No Tension Materials », les modélisations macromécaniques présentées dans cette partie sont issues pour la plupart des travaux concernant les matériaux quasi-fragiles. Ceci semble naturel si l'on considère que la maçonnerie est un composite de géomatériaux quasi-fragiles (voir § 1.3). En outre, cela explique pourquoi l'accent est mis sur la modélisation de deux types de comportement, le plus souvent couplés, qui sont :

- un endommagement fragile,
- une plasticité non associée de type frottement interne.

Si la formulation, qu'elle soit théorique ou numérique, de ces deux comportements est aujourd'hui solide, il n'en reste pas moins quelques problèmes de fond sur lesquels achoppent leurs modélisations.

- le premier de ces problèmes soulevés par le comportement complexe des maçonneries est l'interaction, souvent mal maîtrisée, des différents modèles superposés pour tenir compte, un à un, des aspects typiques de la réponse mécanique à des chargement caractéristiques,
- Le second de ces problèmes relève des instabilités matérielles qui sont mises en jeu lorsque l'on traite de l'adoucissement et du frottement interne dans ces matériaux.

En suivant les conclusions de ORTIZ (1985) en ce qui concerne les bétons, ou encore de LOTFI

& Shing (1991) pour les maçonneries, on comprend qu'il est nécessaire d'apporter une information complémentaire d'ordre micro-structural pour surmonter ces écueils. Cette information peut être apportée directement dans les modèles phénoménologiques présentés par l'introduction de termes non locaux dans les lois de comportements. Toutefois, il semble que, si l'on veut résoudre ces deux problèmes de front, il est nécessaire de s'appuyer sur des considérations micromécaniques fortes. L'application des milieux de Cosserat donne un avant goût des directions de recherche à envisager.

Le principal écueil auquel les modélisations macromécaniques se heurte est la localisation de la déformation et le comportement post bifurqué qui suit cette instabilité. Le constat expérimental, assez général, de la faiblesse mécanique des joints par rapport aux éléments, fournit pourtant une information *a priori* sur les lieux géométriques où la déformation est susceptible de se localiser. Cette information pourrait être précieuse pour mener à bien les résolutions numériques. Malheureusement, la prise en compte de cette information géométrique est contradictoire avec l'hypothèse fondamentale de ces méthodes qui veut que le milieu soit homogène et continu. Il semble donc qu'elle doit être remise en partie en cause.

Enfin, pour terminer le bilan sur ces modélisations macromécaniques, nous revenons sur une caractéristique importante des structures maçonnées que Heyman (1995) met en avant dans son ouvrage. C'est la notion de « Stone Skeleton ». Cette notion rappelle que la structure microscopique de la maçonnerie joue un rôle fondamental dans sa réponse macroscopique. Lorsqu'il remarque que bon nombre de problèmes de stabilité de structures maçonnées peuvent être réduits à des problèmes purement géométriques, on comprend que les effets de la microstructure ne sont pas réduits à l'anisotropie induite au niveau global.

CHAPITRE 3

Considérations micromécaniques dans la modélisation des maçonneries

———————— oOo ————————

Nous l'avons dit, les modèles macromécaniques phénoménologiques butent sur le caractère fortement hétérogène allié à la microstructure cristalline, plus ou moins marquée, des maçonneries. Lorsque la microstructure est clairement identifiée, comme cela est le cas pour la maçonnerie d'appareil, une voie, pour surmonter ces problèmes, consiste à prendre en compte explicitement cette microstructure par l'intermédiaire d'une description micromécanique. L'accent est alors principalement mis sur la modélisation du comportement mécanique des joints au moyen de lois d'interfaces. Deux classes principales de modélisations seront présentées dans ce chapitre. La première classe considère la maçonnerie comme une structure discrète favorisant les phénomènes de macrofissuration et de séparation de la matière. La seconde conserve un cadre continu au profit d'une description plus fine de la plasticité et de l'endommagement dans les joints.

———————— oOo ————————

Plan du Chapitre 3

3.1 Analyse limite et description micromécanique de la maçonnerie 86
3.2 La méthode des éléments distincts (MED) 90
3.2.1 Principes de base des méthodes MED 90
3.2.2 Commentaires. 92
3.3 Les modèles micromécaniques continus 93
3.3.1 Un modèle micromécanique semi-empirique. 94
3.3.2 Modèles d'interface élasto-plastiques avec adoucissement 94
3.3.3 Modèles d'interface basés sur des considérations tribologiques. . . . 99
3.4 Conclusions sur la modélisation micromécanique des maçonneries. 100
3.5 Perspectives pour une modélisation micromécanique des maçonneries 101

Si le caractère continu et homogène est la principale hypothèse des modèles présentés dans le chapitre précédent, il n'en est plus de même pour les descriptions micromécaniques des maçonneries qui vont être présentées dans cette partie. Le choix d'une description à une échelle plus fine est avant tout motivé par l'hétérogénéité du matériau. Le matériau est désormais considéré comme un milieu polyphasé dont chaque phase est prise en compte explicitement, du point de vue de la mécanique.

Une nuance peut tout de même être introduite, qui distingue sensiblement les différentes approches micromécaniques. Si la remise en cause de la continuité du milieu n'est pas une règle incontournable, nous verrons que « micromécanique des maçonneries » est souvent synonyme d'approche discrète. L'hypothèse qui consiste à considérer le milieu comme discret ou continu sépare deux grandes classes de modélisation micromécanique :

- Le premier type de méthode peut être regroupé sous le terme de Méthodes aux Éléments Distincts (MED). L'approche met essentiellement l'accent sur l'aspect discret des maçonneries. La maçonnerie est considérée comme une collection de corps reliés entre eux par des lois d'interaction prenant en compte le comportement du joint. La cinématique de chaque bloc est celle d'un solide rigide ou déformable autorisé à évoluer de manière libre dans tout l'espace. Les lois d'interactions sont écrites pour garantir avant tout l'impénétrabilité entre les éléments. Elles peuvent être complétées par une description du frottement et de la cohésion. Dans ce type de méthode, le joint n'est pas matérialisé par une géométrie exacte mais figure dans le modèle par l'entremise de son comportement. Ces méthodes seront présentées dans les § 3.1 dans le cadre de l'analyse limite et § 3.2 dans le cadre de l'analyse dynamique transitoire.
- Le deuxième type de méthode conserve l'hypothèse de la continuité du milieu. Implicitement, on suppose que les discontinuités résultant de la dégradation du matériau restent confinées à l'échelle microscopique que nous avons définie au § 1.3. La mécanique continue de la plasticité non associée et de l'endommagement fragile reste l'outil approprié pour décrire les micro-craquements et micro-glissements se produisant dans le milieu. Comme nous le verrons dans le § 3.3, les méthodes utilisées sont issues des méthodes numériques dédiées à la mécanique des milieux continus adaptées à une description micromécanique des hétérogénéités.

En résumé, si l'on veut différencier ces approches de manière grossière, on peut faire les remarques suivantes : les méthodes discrètes décrivent de façon naturelle les phénomènes de fracture à l'échelle mésoscopique en modélisant les macrofissures capables de disjoindre complètement le milieu ; les méthodes continues s'appliquent davantage à décrire les phénomènes d'endommagement fragile et de plasticité non associée qui se produisent à l'échelle microscopique. [1]

1. L'emploi du terme générique « micromécanique » est peut être de ce point de vue impropre. Peut-être aurions nous dû parler de « méso/micromécanique » pour qualifier l'ensemble des méthodes qui vont suivre? Afin d'éviter l'emploi surabondant de néologismes barbares et déroutants, nous nous en abstiendrons.

Comme nous le verrons dans la suite, la frontière séparant ces méthodes peut être très ténue ; le challenge étant bien sûr de relier ces deux échelles en proposant des modèles capables de représenter les phénomènes inélastiques de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique. Les différences tiennent souvent plus à la culture scientifique des auteurs qu'aux hypothèses formulées. Leur volonté d'adapter et d'améliorer les méthodes qu'ils maîtrisent à la description de phénomènes mécaniques semblables, conduit à réduire de plus en plus le fossé entre ces méthodes.

3.1 Analyse limite et description micromécanique de la maçonnerie

Livesley (1978) propose une modélisation micromécanique des édifices maçonnés ou plus exactement des édifices composés de blocs dans le cadre de l'analyse limite. L'édifice est décrit comme une collection de corps rigides reliés entre eux par des lois d'interfaces. Partant des résultats formulés par Charnes et Greenberg postulant que la linéarisation des théorèmes statique et cinématique de l'analyse limite conduit à deux problèmes duaux de programmation linéaire, l'auteur formule une cinématique simple pour les édifices composés de blocs de façon à les faire entrer dans ce cadre. Le comportement normal des interfaces décrit l'impénétrabilité

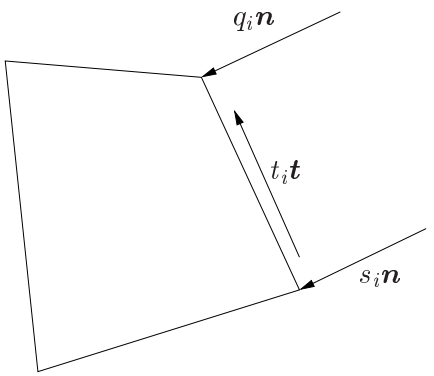


Figure 3.1 – *Discrétisation des efforts aux interfaces.*

entre les blocs tandis que le comportement tangent décrit le frottement isotrope entre les blocs. En deux dimensions, les efforts sont représentés pour une interface i par les efforts de contact aux sommets (q_i, s_i) et les efforts tangents (t_i) (*voir* figure 3.1). Le comportement peut donc se résumer aux inéquations suivantes :

$$0 \leq s_i, q_i; \quad -t_{max} \leq t_i \leq t_{max}. \tag{3.1.1}$$

L'équation d'équilibre est écrite pour le bloc k au centre de gravité du solide :

$$\boldsymbol{w}_k + \lambda \boldsymbol{p}_k = \boldsymbol{H}_k \begin{bmatrix} q_i \\ s_i \\ t_i \end{bmatrix}, \tag{3.1.2}$$

où $\boldsymbol{w}_k$ est l'effort des forces de gravité, $\boldsymbol{p}_k$ le chargement extérieur et λ le paramètre de charge.

En notant $\boldsymbol{r}$ le vecteur collectant l'ensemble des efforts d'interfaces, on obtient le système suivant pour l'ensemble de la structure :

$$\boldsymbol{w} + \lambda \boldsymbol{p} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{r} \tag{3.1.3}$$

$$, -\boldsymbol{r}_{min} \leq \boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{r}_{max}, \tag{3.1.4}$$

où $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{H}$ sont les grandeurs résultant de l'assemblage des équations pour toute la structure. La matrice $\boldsymbol{H}$ effectue le transport du torseur des efforts de l'interface au centre de gravité. La géométrie et la discrétisation spatiale de l'interface est donc prise compte à travers cet opérateur.

Remarque 3.1
En petites perturbations, $\boldsymbol{H}$ est linéaire, mais pas forcement injectif. Si l'espace des efforts généralisés est de dimension finie (comme c'est le cas dans les systèmes discrétisés en espace), il est usuel de le rendre injectif en considérant sa restriction à l'espace complémentaire de son noyau. L'auteur effectue cette opération en introduisant dans l'algorithme de résolution, une décomposition en valeur singulière de $\boldsymbol{H}$. Nous reviendrons en détail sur cet opérateur dans le § 6.1.

❑

Dans le cas où $-\boldsymbol{r}_{min}$ et $\boldsymbol{r}_{max}$ sont constants, on aboutit à un système linéaire soumis à un ensemble de contraintes, elles aussi linéaires. Ce problème peut être résolu grâce aux méthodes de programmation linéaire usuelles. La charge critique λ^c est la solution d'un problème d'optimisation convexe et le mécanisme de ruine est fourni en considérant le problème dual en vitesse.

Cette méthode est l'application numérique des techniques d'investigation des maçonneries par analyse limite proposées par Heyman (1966) et Save (1986). Une différence toutefois est à noter dans la prise en compte du frottement. En effet, le formalisme de l'analyse limite comme il est proposé par Heyman (1966) suppose qu'aucun mécanisme ne peut se développer par glissement entre les blocs.

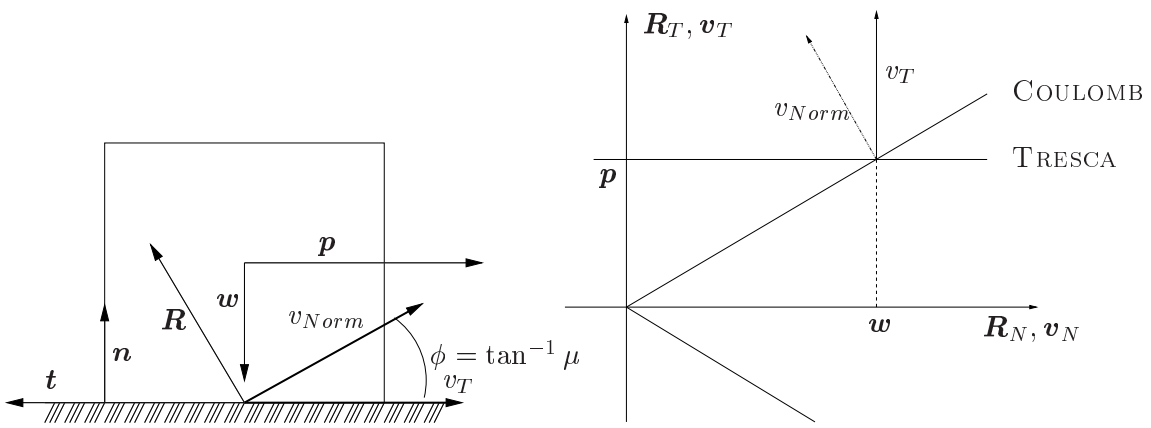
Prise en compte du frottement Le frottement considéré est tout d'abord un frottement de Tresca (le seuil $-t_{max}$ de frottement est considéré comme constant). Ce type de frottement possède l'avantage de respecter l'hypothèse de normalité. Il permet d'aboutir à un problème de complémentarité linéaire bien posé.

Livesley (1978) enrichit le comportement de ces interfaces en introduisant le frottement sec de Coulomb et des limites de résistance en compression des mortiers. Son expression classique en fonction du coefficient de frottement μ,

$$-\mu(q_i + s_i) \leq t_i \leq \mu(q_i + s_i), \tag{3.1.5}$$

est prise en compte au moyen des variables intermédiaires suivantes :

$$u_i = \mu(q_i + s_i) - t_i, \quad v_i = \mu(q_i + s_i) + t_i. \tag{3.1.6}$$



(a) (b)

FIGURE 3.2 – *Frottement non associé de* COULOMB *et frottement associé de* MOHR-COULOMB *pour les sols*

La nouvelle écriture du système de contraintes imposées aux efforts interfaciaux conduit à :

$$\begin{aligned} &0 \leq q_i \leq q_{max}, \\ &0 \leq s_i \leq s_{max}, \\ &t_i \text{ non contraint}, \\ &0 \leq u_i, \\ &0 \leq v_i. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Le même algorithme de programmation linéaire est alors appliqué à ce système de contraintes.

Difficulté de la non associativité du frottement de COULOMB Bien sûr, la dépendance du seuil de frottement par rapport aux efforts normaux engendre quelques soucis :

1. la charge limite λ_c peut surestimer la charge de ruine, même si l'approche de cette charge s'appuie sur le théorème statique de l'analyse limite qui est une approche par l'intérieur ;
2. les mécanismes associés au glissement, déduits du problème en vitesses, font apparaître une séparation des surfaces en cas de glissement.

Il est bien connu que ces deux inconvénients sont des conséquences de la non associativité de frottement de COULOMB ou si l'on préfère du fait qu'il ne réponde pas à l'hypothèse de normalité. En toute rigueur, l'introduction du frottement de COULOMB conduit à un problème de complémentarité non linéaire qui ne peut pas être résolu par une méthode de programmation linéaire. La séparation des surfaces en cas de glissement provient du non-respect de l'hypothèse de normalité qui implique une vitesse correspondant à la dilatation de l'interface.

Si, en présence de frottement de COULOMB, les théorèmes du calcul à la rupture (SALENÇON, 1983) peuvent fournir des renseignements sur les chargements potentiellement supportables, les

théorèmes fondamentaux de l'analyse limite ne s'appliquent par contre plus. Pour les lois non associées, les théorèmes de RADENKOVIC et PALMER (1966) fournissent les domaines des chargements supportables et stables, qui avaient été mis en évidence par DRUCKER (1954) dans le cas particulier de frottement de COULOMB[2]. On renvoie à l'annexe A pour les définitions précises de chargement potentiellement supportable et la distinction avec la notion de stabilité des structures.

LIVESLEY (1978) corrige le mécanisme obtenu à la charge en remplaçant, dans le problème en vitesses, le frottement non associé de COULOMB par un frottement associé du type TRESCA. La valeur du seuil de glissement est alors prise égale à la valeur donnée par la charge limite en présence de frottement non associé. Cette opération ne corrige bien sûr pas la charge limite mais permet de fournir des mécanismes cohérents du point de vue de la cinématique souhaitée pour les interfaces.

Extension aux problèmes tridimensionnels LIVESLEY (1992) étend cette méthode au cas tridimensionnel en approchant le cône de COULOMB par un cône à facettes et le cylindre de TRESCA par un prisme. Il soulève de plus un autre problème qui est la discrétisation des efforts interfaciaux. Si dans le cas bidimensionnel pour des solides rigides, l'emploi de trois forces paraît naturel, dans le cas tridimensionnel, il devient plus dur de choisir une représentation ou si l'on préfère une discrétisation des efforts interfaciaux.

La cinématique d'une facette plane rigide est complètement décrite par la donnée de trois translations et trois rotations. De manière duale, les efforts conjugués sur cette facette sont complètement décrits par la donnée de trois forces et trois moments. La définition du comportement interfacial grâce à cet ensemble de coordonnées et de forces généralisées fournit une représentation complète des interactions entre les blocs rigides. Les inconvénients générés par une telle description sont, par contre, nombreux du point de vue pratique. Tout d'abord, ces efforts généralisés sont les résultantes des efforts de contact et de frottement surfaciques. De plus, l'expression des contraintes unilatérales en termes de moments se révèle compliquée et aboutit à des expressions difficile à manipuler.

Dans le but d'appliquer les algorithmes de programmation linéaire, LIVESLEY (1992) exclut les descriptions contenant de moments n'aboutissant pas à une expression linéaire des contraintes unilatérales. Discutant de la concavité ou de la convexité éventuelles des surfaces des blocs, il propose une description des efforts par des forces normales et tangentielles réparties au sommet. L'hypothèse d'une convexité des surfaces conduit en effet à un contact ponctuel qui n'est pas raisonnable du point de vue de la stabilité. LIVESLEY (1992) remarque de plus que la charge peut être très dépendante de la distribution des efforts de contact.

Nous verrons dans la suite (§ 7.3.3) que la distribution des efforts de contact pour les facettes déformables n'est pas une question triviale. Cette distribution implique à la fois la cinématique de la surface et la transmission des efforts. La pertinence des résultats peut être grandement affectée par les choix opérés (*voir* § 7.2.1.a).

2. Le lecteur intéressé pourra aussi consulter les travaux de COLLINS (1969) qui traitent de ce sujet.

Dans le même esprit, PARLAND (1995) fournit une description complète des lois d'interfaces en termes de moments et de rotations. Il donne de plus quelques résultats, en particulier une série d'inclusions pour les domaines de chargements potentiellement supportables et/ou stables pour différentes lois de frottement. Le seuil de frottement est toujours décrit par le critère de COULOMB. La loi d'écoulement est définie par son angle de dilatance par rapport au cône de frottement sec et varie de 0 (frottement de COULOMB) à $\pi/2$ (frottement associé).

3.2 La méthode des éléments distincts (MED)

La méthode des éléments distincts, initiée et développée par CUNDALL & STRACK (1979) est sûrement la méthode numérique la plus célèbre, dédiée aux traitements de collections de solides rigides ou déformables reliés entre eux par des lois d'interactions régulières. Son application aux maçonneries est un cas particulier des nombreux domaines ou elle est usuellement utilisée. Citons par exemple les matériaux granulaires (STRACK & CUNDALL, 1978) ou les massifs rocheux fissurés (HART *et al.*, 1988 ; LEMOS *et al.*, 1985). Sa célébrité repose avant tout sur sa simplicité de mise en œuvre et son efficacité numérique. Nous allons en rappeler ici les principes de base (§ 3.2.1) et essayer de les commenter (§ 3.2.2).

3.2.1 Principes de base des méthodes MED

Représentation discrète des milieux. Les maçonneries sont représentées comme un ensemble de blocs, rigides ou déformables, reliés entre eux par des lois d'interactions avec complaisance. Pour chaque élément distinct, qui représente un bloc, les équations de NEWTON-EULER sont écrites afin de décrire le mouvement. Le caractère déformable éventuel du milieu est pris en compte par une discrétisation de type différences finies de chaque bloc. Les comportements disponibles sont l'élasticité et la viscosité linéaires.

Lois d'interactions Les lois d'interactions utilisées sont des lois régularisées de la condition de SIGNORINI et du frottement de COULOMB. Les notations qui sont employées dans la suite ainsi que les deux lois qui viennent d'être évoquées sont présentées au § 5.2.3 et § 5.2.4. On dit que ces lois sont régularisées au sens où les relations liant les réactions normales r_{N} et tangentielles $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$ aux déplacements et vitesses normales et tangentielles $(u_{\mathrm{N}}, v_{\mathrm{N}})$ et $(\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{T}})$, peuvent être mises sous la forme d'une application (et non d'une multi-application) continue.

La réaction normale r_{N} est donnée de la manière suivante :

$$r_{\mathrm{N}} = \max(0, -c_{\mathrm{N}}(u_{\mathrm{N}})u_{\mathrm{N}}). \tag{3.2.1}$$

La raideur normale $c_{\mathrm{N}}(u_{\mathrm{N}})$ modélise la réaction en cas de contact, que l'on considère positive suivant nos conventions (*voir* § 5.2.3). Cette raideur dépend de u_{N} et ceci de façon non linéaire. La raideur croît en général rapidement avec u_{N} pour éviter les pénétrations outrageuses. Des formes variées de fonction de u_{N} peuvent être choisies. Les plus usuelles sont les exponentielles

et les cosinus hyperboliques ; ces dernières offrant en plus la différentiabilité en 0. Des lois de contact de HERTZ sont aussi introduites dans le cas de contact ponctuel sphérique.

La réaction tangentielle suit une loi de COULOMB régularisée représentée par un patin frottant de seuil variable μr_{N} mis en série avec un ressort de raideur c_{T}. Sa valeur est déterminée de la manière suivante :

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} = \max(c_{\mathrm{T}}\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|, \mu r_{\mathrm{N}})\frac{\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|}. \tag{3.2.2}$$

Suivant les applications envisagées, un seuil de cohésion constant c peut être ajouté sur la partie tangentielle et normale.

Intégration temporelle des équations du mouvement Les équations de NEWTON-EULER sont écrites dans un repère attaché au solide rigide. Nous supposons qu'elles peuvent s'écrire sous la forme suivante dans le cas d'un système discret :

$$\boldsymbol{M}\ddot{q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \tag{3.2.3}$$

où $\boldsymbol{M}$ représente la matrice d'inertie, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ les efforts intérieurs et les termes d'accélération quadratique et $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ les efforts extérieurs appliqués au système ainsi que les forces de réactions. Le terme $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ représente, quant à lui, l'amortissement et les liaisons élastiques par rapport à un repère fixe. Nous noterons par commodité la somme de ces trois termes par $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$.

Une des caractéristiques des méthodes MED usuelles est l'emploi de schémas d'intégration en temps explicites. Parmi les plus utilisés, nous pouvons citer la θ-méthode pour $\theta < \dfrac{1}{2}$, les méthodes appartenant à la famille de NEWMARK [3] pour $\gamma \leq \dfrac{1}{2}$ et $\beta = 0$. Donnons ici le schéma aux différences centrées qui est le plus largement répandue :

$$\boldsymbol{M}\ddot{q}_{i+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{q}_{i+\frac{1}{2}}, \dot{\boldsymbol{q}}_i, t_{i+\frac{1}{2}}) \tag{3.2.4}$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{q}}_i + \Delta t\ddot{q}_{i+\frac{1}{2}} \tag{3.2.5}$$

$$\boldsymbol{q}_{i+1+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{q}_{i+\frac{1}{2}} + \Delta t\dot{\boldsymbol{q}}_{i+1} \tag{3.2.6}$$

L'intégration explicite possède l'avantage d'estimer de manière simple les termes non linéaires présents dans les équations. En particulier, l'estimation des efforts de contact se fait sans difficulté dès lors que l'on a choisi une forme explicite pour leur formulation (équations (3.2.1) et (3.2.2)). Si, de plus la matrice d'inertie est choisie diagonale, l'algorithme se réduit à des opérations vectorielles.

Equilibre et amortissement La formulation employée est celle de la dynamique des solides rigides. Elle paraît naturelle lorsqu'il s'agit de traiter une collection de solides dont certains peuvent être libres d'évoluer sans contraintes si ils ne subissent aucun contact. Si l'on recherche

3. Des détails sur ces méthodes sont donnés au § 6.2

une position d'équilibre de la structure, ce type de formulation peut être un inconvénient pour plusieurs raisons. D'une part, si le système est conservatif (absence de frottement et de viscosité), l'évolution dynamique n'a aucune raison de se stabiliser sur une position d'équilibre. D'autre part, si le système est dissipatif, le coût numérique d'une évolution dynamique complète pour atteindre un régime d'équilibre peut être prohibitif.

Pour surmonter cet inconvénient, deux solutions sont proposées. Le première solution consiste à introduire une dissipation artificielle sous forme de viscosité par l'intermédiaire d'une liaison visqueuse par rapport à un repère fixe. La seconde consiste à considérer une formulation quasi-statique où chaque solide est lié par une rigidité artificielle dans un repère fixe.

3.2.2 Commentaires.

L'avantage majeur de ces méthodes est leur efficacité en rapport de leur coût numérique. L'emploi de schémas explicites et la régularisation des efforts de contacts permet de considérer des systèmes à grands nombre de degrés de liberté (jusqu'à 1000000) pour des temps de calcul raisonnables.

Elles possèdent de plus tous les avantages d'une représentation discrète des structures traitées. En ce qui concerne les maçonneries, elles sont tout à fait aptes à prendre en compte des mécanismes de ruines en grandes transformations, qui impliquent des séparations complètes de certaines parties de la structure.

Les inconvénients de ce type de méthode tiennent pour le plupart aux choix qui sont faits pour privilégier l'efficacité numérique. Donnons ceux qui nous paraissent les plus importants :

- *Inconvénients des schémas explicites* Les schémas explicites utilisés sont conditionnellement stables. Ils nécessitent, en effet, l'emploi de pas de temps petits pour assurer la stabilité du schéma, en particulier en cas de « crise dynamique » lorsque un grand nombre de contacts sont perdus ou créés sur un court laps de temps. Dans ces conditions, les études en dynamique transitoire sont effectuées grâce à un nombre d'incrémentations, certes peu coûteuses, mais important. Elles se révèlent pour cela mieux adaptées aux problèmes dits de « dynamique rapide ».

  A l'inverse des schémas implicites, qui jouent le rôle de filtre passe-bas sur la réponse du système, les résultats des schémas explicites sont entachés de bruits générés par des artefacts numériques. Cet inconvénient rend souvent l'interprétation des résultats très difficile.

  Ces problèmes peuvent être surmontés par l'introduction de viscosité artificielle mais nous verrons dans la suite qu'elle a aussi ses inconvénients.
- *Pertinence des lois de contact* La régularisation des lois de contact oblige à définir des paramètres supplémentaires comme les raideurs c_{N} et c_{T} qui ne sont pas disponibles expérimentalement. Ces raideurs sont généralement grandes et rendent le problème très raide. Ceci concourt alors à perturber la stabilité de l'algorithme en générant des phénomènes oscillatoires artificiels, qui peuvent conduire à des instabilités.
- *Sensibilité aux méthodes de régularisations* Que cela soit pour obtenir la convergence vers

des états d'équilibre ou pour « adoucir » la raideur du système, l'effet de l'introduction d'une rigidité et d'une viscosité artificielle est souvent mal maîtrisé. Dans les systèmes considérés, où l'unicité de la solution n'est pas garantie, ces méthodes de régularisation peuvent jouer un rôle important quant au choix d'un trajet local de chargement. Ces problèmes ne sont pas propres aux méthodes MED. Nous verrons comment au § 7.1 des tentatives ont été proposées pour répondre à ces problèmes communs aux systèmes multi-corps régis par des liaisons unilatérales.

Tous ces inconvénients concourent à la dégradation de la fiabilité des résultats. On constate donc que, si l'efficacité numérique de ces méthodes constitue un avantage majeur, son coût en terme de qualité des résultats est grand.

Nous n'entrerons pas dans les détails des solutions qui peuvent être apportées pour remédier à ces problèmes. Nous verrons que l'approche NSCD tente de répondre à ces problèmes. En particulier, les schémas d'intégration explicites seront rejetés et les efforts de contact ne seront pas régularisés. Pour une discussion concernant les problèmes d'intégration temporelle des systèmes multi-corps en présence de contact unilatéral, on renvoie aux travaux d'Abadie (1998).

3.3 Les modèles micromécaniques continus

Le point commun des approches précédentes est le caractère discret conféré à la maçonnerie. Dans ce qui va suivre, la maçonnerie est considérée comme un matériau hétérogène mais dont la continuité n'est pas remise en cause par le processus de déformation. Comme nous l'avons rappelé en introduction à ce chapitre, l'hypothèse de continuité du matériau suppose que la transformation engendre des microfissures à une échelle plus fine que celle de la description. En clair, l'échelle de description est la méso-échelle qui tient compte de phénomènes de la micro-échelle. La continuité macroscopique du matériau n'étant pas alors remise en cause, cette hypothèse semble valable jusqu'à l'apparition de macrofissures générées par la croissance et la coalescence des microfissures.

Le cadre théorique est celui de la plasticité et de la mécanique de l'endommagement fragile. Le cadre numérique dérive de la même manière des méthodes usuelles empruntées à la mécanique des milieux continus, en particulier la méthode des éléments finis plans. Cependant, la prise en compte de l'hétérogénéité du matériau requiert la description géométrique de chaque phase. Devant les tailles caractéristiques de chaque phase rencontrée, cette description nécessite une adaptation des méthodes dédiées aux matériaux homogènes. Pour les appareillages réguliers par exemple, pour lesquels une description micromécanique s'avère particulièrement bien adaptée, la notion d'interface est généralement introduite pour décrire les joints.

Les modèles d'interfaces éléments finis pour les géomatériaux quasi-fragiles sont nombreux, en particulier pour les roches fissurées. Depuis les travaux pionniers de Goodman *et al.* (1968), de nombreux modèles ont été développés que le lecteur intéressé pourra trouver dans (Selvadurai & Boulon, 1995). Dans cette partie, on ne s'attachera qu'aux applications aux maçonneries de ces modèles.

3.3.1 Un modèle micromécanique semi-empirique.

Page (1978) a été le premier à proposer d'appliquer les méthodes numériques dédiées à la mécanique non linéaire des milieux continus à la simulation des maçonneries. La méthode des éléments finis est utilisée dans le but de caractériser la résistance en compression des maçonneries.

Les briques sont modélisées avec des éléments finis bidimensionnels en contraintes planes dans le régime de l'élasticité linéaire. Les joints sont modélisés par l'intermédiaire d'éléments d'interfaces unidimensionnels simulant leurs comportements normal et tangentiel. Les lois de comportement en compression tant normale que tangentielle sont des lois élasto-plastiques données, de manière empirique, par des courbes issues d'essais expérimentaux. Ces équations sont résolues par une méthode numérique incrémentale de façon à prendre en compte le comportement non-linéaire des matériaux.

Page (1978) introduit tout de même un caractère discontinu à sa modélisation par l'intermédiaire d'un critère de rupture fragile en traction superposé aux lois de comportements empiriques. Lorsque ce critère de rupture est violé, l'auteur stoppe la simulation pour la reprendre en supprimant l'élément rompu. Comme nous l'avons déjà remarqué au § 2.2, ce type de méthode peut poser de graves problèmes de convergence et d'objectivité.

Ali & Page (1988) améliorent sensiblement le modèle précédent en incluant, après une phase de comportement linéaire orthotrope, deux comportements de dégradation distincts. Le premier est un comportement fragile en traction pris en compte par une annulation pure et simple du terme d'élasticité correspondant. Le second est un comportement plastique adoucissant donné par une fonction triangulaire.

Riddington & Naom (1994) proposent le même type d'approche en incluant un critère de rupture en traction pour les briques.

3.3.2 Modèles d'interface élasto-plastiques avec adoucissement

Il faut attendre Lotfi & Shing (1994) pour constater une avancée sensible dans ce type d'approche. Les auteurs considèrent un comportement élasto-plastique avec durcissement/adoucissement à la fois pour les éléments et pour les joints. Les efforts dans l'interface sont décrits par la contrainte normale σ et la contrainte de cisaillement τ associées aux déformations normale ϵ_n et tangentielle, ϵ_t. Le comportement élastique de l'interface est donné par l'opérateur diagonal $\boldsymbol{C}^e$, qui relie les efforts aux déformations de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}^e \begin{bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_n \\ \epsilon_t \end{bmatrix}. \tag{3.3.1}$$

Le comportement des joints est donné par un critère du type Mohr-Coulomb avec une limite de résistance en traction. Pour éviter les problèmes engendrés par une surface limite non régulière, le critère est approché par une hyperbole (*voir* figure 3.3) d'équation :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = \tau^2 - \mu^2(\sigma - s)^2 + 2r(\sigma - s) = 0, \tag{3.3.2}$$

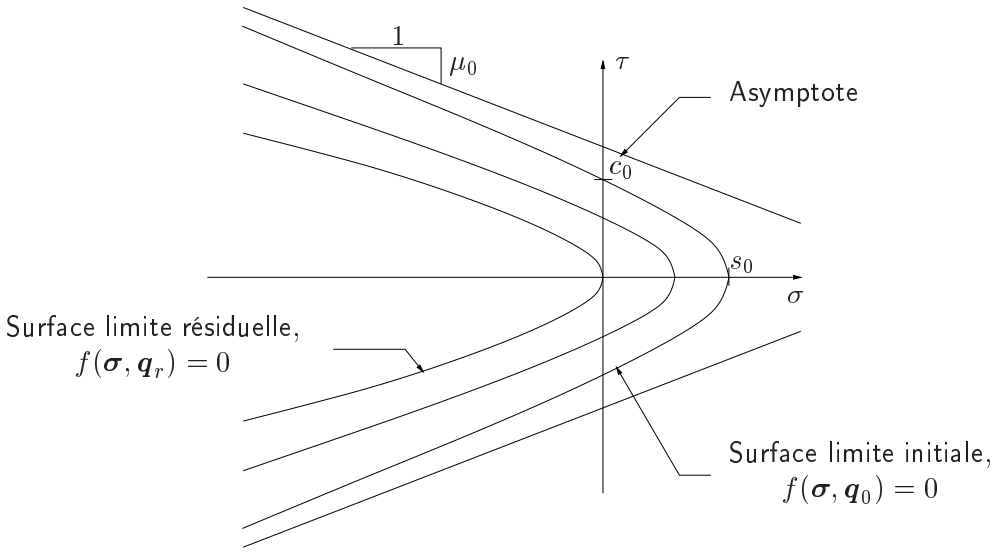


FIGURE 3.3 – *Surface limite du joint, d'après (*LOTFI & SHING, *1994)*

où $r = (c^2 - \mu^2 s^2)/2s$ est le rayon de courbure de la surface limite, c la cohésion et s la résistance en traction. La variable interne $\boldsymbol{q} = {}^{\mathsf{T}}[s, r, \mu]$ contrôle l'évolution de la surface limite. Comme l'illustre la figure 3.3, $\boldsymbol{q}_0 = {}^{\mathsf{T}}[s_0, r_0, \mu_0]$ définit la surface initiale, $\boldsymbol{q}_r = {}^{\mathsf{T}}[s_r, r_r, \mu_r]$ la surface résiduelle.

La loi d'écoulement plastique est choisie non associée pour limiter l'effet de la dilatation de l'interface. Le potentiel plastique $g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ est choisi de la manière suivante :

$$g(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q}) = \eta\tau^2 - (r - r_r)(\sigma - s) = 0, \tag{3.3.3}$$

où η est le paramètre qui contrôle la dilatation. Il est à noter que dans l'état résiduel ($\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_r$) la dilatation de la surface est nulle. On retrouve alors un comportement du type frottement sec.

Les lois d'adoucissement sont pilotées par la puissance plastique dissipée pendant la transformation :

$$\dot{\kappa}^p = \sigma\,\dot{\epsilon}_n^p + \tau\,\dot{\epsilon}_t^p. \tag{3.3.4}$$

Quelques hypothèses sont faites sur l'évolution de la surface limite :

1. Seule la limite de résistance en traction s est affectée par le travail plastique en traction/cisaillement.
2. Le travail plastique en compression/cisaillement diminue, à la fois, la résistance en traction et en cisaillement. Dans ce cas, seule la partie du travail plastique associé à la contrainte de cisaillement est prise en compte pour la dégradation de la résistance en cisaillement.

Ces hypothèses peuvent s'exprimer par l'intermédiaire des trois puissances plastiques suivantes :

$$\dot{\kappa}_1 = (\sigma)^+\,\dot{\epsilon}_n^p, \tag{3.3.5}$$

$$\dot{\kappa}_2 = [\tau - \tau_{r1}\mathrm{sign}(\tau)]\;\dot{\epsilon}_t^p, \tag{3.3.6}$$

$$\dot{\kappa}_3 = [\tau_{r1} - \tau_{r2}]\,\mathrm{sign}(\tau)\,\dot{\epsilon}_t^p, \tag{3.3.7}$$

où τ_{r1} correspond à la résistance en cisaillement sous une contrainte normale donnée lorsque la résistance en traction est détruite ($s = 0$) et τ_{r2} correspond à la capacité de résistance résiduelle en cisaillement, soit

$$\tau_{r1} = \mu^2\sigma^2 - 2r\sigma, \qquad \tau_{r2} = \mu_r^2\sigma^2 - 2r_r\sigma. \tag{3.3.8}$$

La variable $\boldsymbol{q}$ qui définit la surface limite, est reliée aux mesures du travail plastique par les équations suivantes :

$$s = s_0\left(1 - \frac{\kappa_1}{G_f^I} - \frac{\kappa_2}{G_f^{II}}\right) \geq 0, \tag{3.3.9}$$

$$r = r_r + (r_0 - r_r)\exp(-\beta\kappa_3), \tag{3.3.10}$$

$$\mu = \mu_r + (\mu_0 - \mu_r)\exp(-\alpha\kappa_3), \tag{3.3.11}$$

où G_f^I et G_f^{II} sont les énergies de rupture en mode I et mode II, et les variables α et β sont des paramètres contrôlant le taux d'adoucissement. On peut remarquer que les lois d'adoucissement s'écrivent de façon à retrouver les énergies de fracture G_f^I et G_f^{II} sur des essais de traction directe et de cisaillement.

Ces lois d'adoucissement peuvent être condensées sous la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\sigma}) \bar{\otimes} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\kappa}), \qquad \text{où } \dot{\boldsymbol{\kappa}} = {}^{\intercal}[\dot{\kappa}_1, \dot{\kappa}_2, \dot{\kappa}_3]. \tag{3.3.12}$$

Le problème de plasticité à résoudre peut donc être exprimé ainsi :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\boldsymbol{m}, \tag{3.3.13}$$

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \geq 0, \quad \dot{\lambda}f = 0, \tag{3.3.14}$$

dans lequel le multiplicateur plastique est exprimé *via* la relation de cohérence (i.e. $\dot{f} = 0$) qui donne :

$$\dot{\lambda} = \frac{{}^{\intercal}\boldsymbol{n}\boldsymbol{C}^e \bar{\bar{\otimes}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{{}^{\intercal}\boldsymbol{n}\boldsymbol{C}^e \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{m} - {}^{\intercal}\boldsymbol{p}\boldsymbol{t}}, \tag{3.3.15}$$

avec les vecteurs normaux suivants :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \boldsymbol{p} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad \boldsymbol{t} = \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{H}\boldsymbol{m}. \tag{3.3.16}$$

Ce système d'équations est intégré numériquement par une méthode de point milieu généralisée pour une plasticité non associée (Ortiz & Popov, 1985).

Le comportement des éléments est lui aussi élasto-plastique. Il est décrit par un critère composite isotrope de von Mises en compression et Rankine en traction. La plasticité est associée et les lois de durcissement-adoucissement sont données par la courbe représentée à la figure 3.4. Les auteurs obtiennent de très bons résultats en relation avec les expériences de cisaillement de murettes. Le modèle exposé permet de prendre en compte un bon nombre de possibilités de ruines de la structure avec précision.

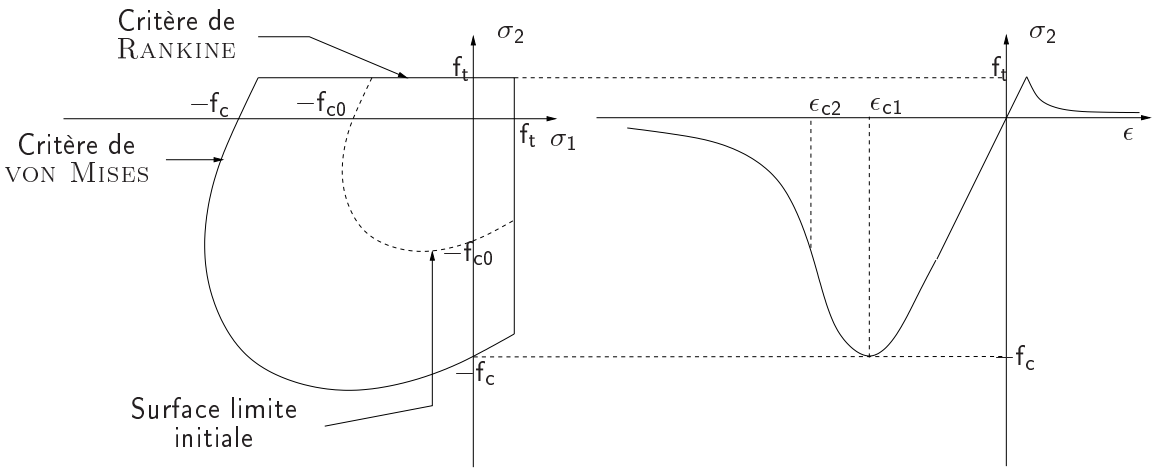


FIGURE 3.4 – *Surface limite et loi de durcissement/adoucissement pour les éléments, d'après (*LOTFI & SHING*, 1994)*

Dans le même esprit, LOURENÇO & ROTS (1997) proposent un modèle d'interfaces élasto-plastiques pour les maçonneries. A la différence du modèle précédent, les éléments sont considérés comme parfaitement élastiques. Le modèle des joints est enrichi par un critère de résistance limite en compression. Ce critère est capable de rendre compte d'une dégradation du joint en compression et de la rupture des briques lorsque de fortes sollicitations compression/cisaillement sont rencontrées.

Le critère de résistance limite en compression dérive des critères utilisés en mécanique des sols pour décrire la compaction plastique (« Cap Model »). Il est introduit ici par l'intermédiaire d'un cercle dans l'espace des contraintes (σ, τ) :

$$f_{cap}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_{cap}) = C_{nn}\sigma^2 + C_{ss}\tau^2 + C_n\sigma - \bar{\sigma}^2(\kappa_{cap}), \tag{3.3.17}$$

où C_{nn}, C_{ss} et C_n sont les paramètres matériaux définissant la résistance en compression et κ_{cap} est une norme de déformation donnée en plasticité associée par :

$$\dot{\kappa}_{cap} = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \bar{\bar{\otimes}}\, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3}{}^{\mathsf{T}}\left[\frac{\partial f_{cap}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right] \bar{\bar{\otimes}} \left[\frac{\partial f_{cap}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right]}. \tag{3.3.18}$$

La fonction qui contrôle l'écrouissage du matériau $\bar{\sigma}(\kappa_{cap})$ est donnée par une courbe identique à celle présentée sur la figure 2.9.

Le critère de MOHR-COULOMB est repris avec un seuil de résistance en traction. Les deux critères sont donnés par leur fonction seuil :

$$f_1(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_1) = \sigma - f_t(\kappa_1), \tag{3.3.19}$$

$$f_2(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_2) = |\tau| + \sigma \tan\phi(\kappa_2) - c(\kappa_2), \tag{3.3.20}$$

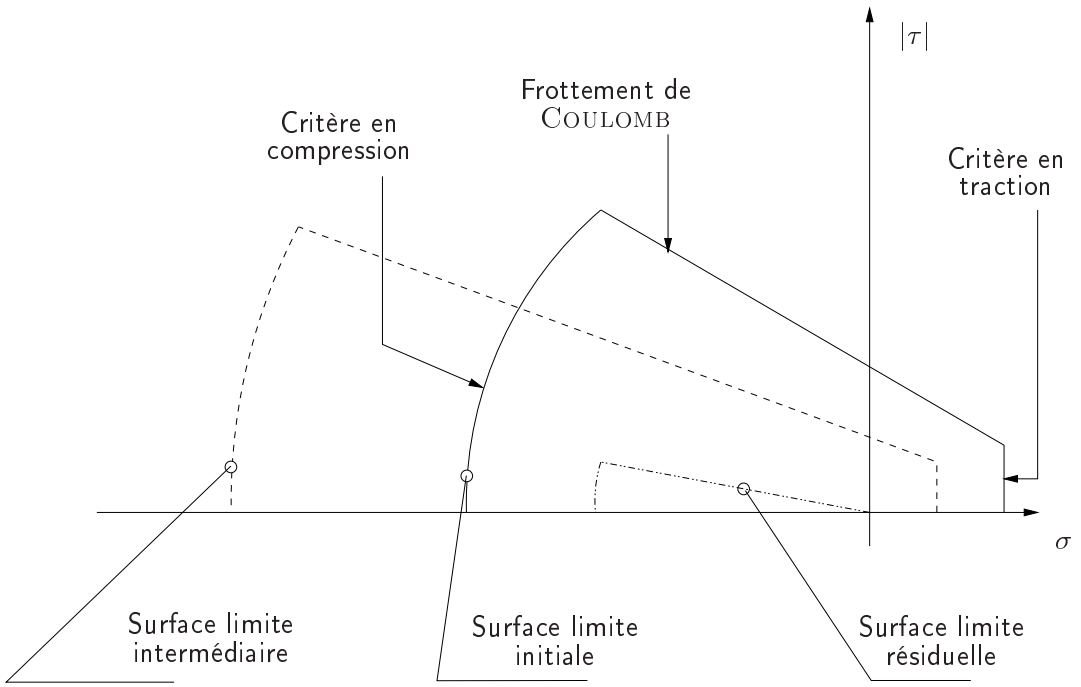


FIGURE 3.5 – *Surface limite d'interface, d'après* LOURENÇO & ROTS *(1997)*

et les lois d'adoucissement suivantes :

$$f_t(\kappa_1) = f_{t0} \exp\left(-\frac{f_{t0}}{G_f^I}\kappa_1\right), \qquad \dot{\kappa}_1 = |\dot{u}_n^p|, \tag{3.3.21}$$

$$c(\kappa_2) = c_0 \exp\left(-\frac{c_0}{G_f^{II}}\kappa_2\right), \qquad \dot{\kappa}_2 = |\dot{u}_t^p|, \tag{3.3.22}$$

$$\tan\phi(\kappa_2) = \tan\phi_0 + (\tan\phi_r - \tan\phi_0)\frac{c_0 - c_r}{c_0}. \tag{3.3.23}$$

Les trois critères sont assemblés pour former un critère composite non régulier illustré à la figure 3.5.

L'intégration des équations de la plasticité est effectuée grâce à un algorithme d'EULER rétrograde (ORTIZ & POPOV, 1985). Le traitement des angles du critère composite est effectué en introduisant un couplage entre les différents modes d'écoulement plastique (SIMO *et al.*, 1988). Cet algorithme est une fois encore appliqué à des essais de cisaillement de murettes. Les auteurs notent une bonne objectivité des résultats face aux maillages.

AMBROSETTI & PEGON (1998), qui adoptent une approche identique de joints élasto-plastiques, soulignent la difficulté de la génération des maillages dans une étude tridimensionnelle de blocs aux géométries compliquées. L'utilisation d'éléments d'interfaces impose de nombreuses contraintes aux maillages par éléments finis. Tout d'abord, les éléments d'interfaces de chaque bloc doivent être en vis-à-vis pour pouvoir écrire correctement les relations de comportement. Une autre difficulté liée à l'utilisation d'éléments d'interface est l'orientation de leurs normales, qui définissent le sens de traction et de compression de l'élément.

Le choix d'un schéma d'intégration numérique (Gauss, Newton-Cotes, Lobatto, *etc...*) reste ardu. Boulon *et al.* (1995) précisent que la méthode d'intégration de Newton-Cotes est souvent la plus satisfaisante du point de vue de l'intégration des contraintes. En effet, une intégration de Gauss génère des oscillations sur les résultats en contraintes. Bien que le problème disparaisse lorsque le nombre d'élément augmente, il semble pour les auteurs que l'intégration d'une loi impliquant la vitesse relative entre deux corps est plus représentative si elle s'effectue aux noeuds.

3.3.3 Modèles d'interface basés sur des considérations tribologiques.

Giambanco & Di Gati (1997) optent aussi pour une modélisation élasto-plastique des joints. Le critère de plasticité est toujours le critère de Mohr-Coulomb avec un seuil en traction. L'originalité de l'approche se situe dans l'écriture des lois d'adoucissement basées sur des considérations tribologiques proposées initialement par Mròz & Giambanco (1996) dans le cadre de la mécanique des roches fissurées. Les auteurs considèrent que les microdécohésions, leur coalescence et d'une manière générale les mécanismes de dégradation des mortiers conduisent à la formation d'une surface de rupture rugueuse. En introduisant α l'angle de dilatation initial de la surface engendrée par la rugosité, la contrainte de cisaillement s'exprime par :

$$\tau = \sigma \tan(\phi + \alpha) \tag{3.3.24}$$

où ϕ est l'angle de frottement résiduel. L'angle de dilatation α est confondu avec l'angle géométrique des pointes des aspérités supposées hyperboliques générées par la dégradation du mortier (*voir* figure 3.6). Le taux de croissance des aspérités est lié à la variation de la cohésion de la manière suivante :

$$\alpha = \alpha_0 - \left(1 - \frac{c}{c_0}\right)^{\nu} \tag{3.3.25}$$

où ν est le paramètre contrôlant le taux de croissance des aspérités et α_0 l'angle final des aspérités.

La seconde phase du mécanisme traduit l'usure de ces aspérités pour retrouver un comportement de frottement sec. Cette loi est donnée en fonction de $[u_T]$ le saut de déplacement tangentiel à l'interface :

$$\tan(\alpha([u_T])) = \frac{[u_T]\tan^2(\alpha_0)}{\sqrt{[u_T]^2\tan^2(\alpha_0) + g^2}} \tag{3.3.26}$$

où g est une mesure de l'usure donnée par :

$$g(\mathcal{W}_f) = g_f(1 - \exp(\frac{\mathcal{W}_f}{\mathcal{W}_0})). \tag{3.3.27}$$

Le travail spécifique de frottement $\mathcal{W}_f$ pilote l'usure de la surface jusqu'à une valeur limite de l'usure g_f.

Pour une discussion sur les approches micromécaniques des interfaces dans les géomatériaux, aussi bien au niveau des modélisations que des essais expérimentaux, on renvoie le lecteur à (Selvadurai & Boulon, 1995). En particulier en ce qui concerne les relations entre usure, frottement et aspérités dans les joints rocheux, Plesha (1995) fait une revue des différents

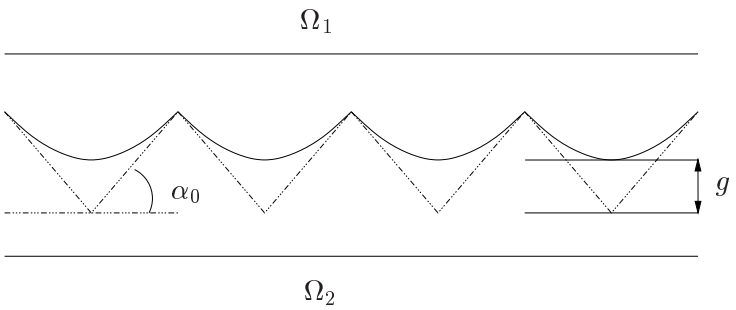


FIGURE 3.6 – *Surface rugueuse - Aspérités et usure, d'après (*GIAMBANCO & DI GATI, *1997)*

modèles recensés dans la littérature. Ces modèles ont été, à ma connaissance peu appliqués au cas des mortiers. Ils constitueraient sans doute des modèles fiables permettant de distinguer les comportements des divers types de mortier.

3.4 Conclusions sur la modélisation micromécanique des maçonneries.

Si le caractère hétérogène des maçonneries a suscité de nombreuses approches micromécaniques, le caractère continu ou discret de la modélisation a permis de distinguer deux grands types de méthodes.

Les approches discrètes, basées essentiellement sur le respect de l'impénétrabilité des éléments et sur le frottement de Coulomb, se révèlent particulièrement efficaces, du moins d'un point de vue numérique, dans le traitement de grandes collections d'éléments en grandes transformations. Le caractère discret autorise en effet la propagation de fissures et la séparation complète des éléments. Cependant, ces phénomènes de rupture brutale contraignent généralement à user de la dynamique et de l'amortissement visqueux pour contourner les problèmes de mouvements de solides rigides indéterminés et les problèmes liés aux sauts de solutions.

Leurs applications semblent naturelles dans la simulation mécanique des appareillages de pierres sèches et les structures soumises à de fortes sollicitations dynamiques comme les séismes. Dans le premier problème, les lois d'interfaces considérées sont en bonne adéquation avec le comportement des joints-vifs. Concernant les sollicitations sismiques, le cadre de dynamique, introduit naturellement par l'approche discrète, permet de prendre en compte les mécanismes de ruines assez brutaux.

Les approches continues offrent des lois d'interfaces plus sophistiquées qui permettent une description plus fine des phénomènes dissipatifs dans les joints. Les mécanismes de ruines sont représentés à la fois en traction, en compression et en cisaillement. Ces descriptions plus fines offrent des résultats quantitatifs meilleurs mais sur des structures plus modestes. Ces modélisations permettent l'évaluation précise de la réponse mécanique aux tests traditionnels sur les

panneaux de maçonnerie présentés au § 1.2.1.b. En ce sens, elles fournissent les bases d'une extrapolation vers des modèles macromécaniques continus à grande échelle.

Les principaux inconvénients de ces méthodes résident dans la difficulté de mise en oeuvre numérique et l'identification des paramètres caractérisant le matériau. La représentation matérielle des joints, i.e. de leur géométrie, par des éléments d'interfaces conformes est une réelle difficulté. Le caractère fortement non linéaire de leur comportement induit de plus de nombreux problèmes numériques. Enfin, l'identification des nombreux paramètres caractérisant le matériau reste un problème ardu. Il est important de noter que peu de commentaires sont faits sur le domaine de validité de ces modèles. Ils sont généralement confrontés aux mêmes expériences que celles qui ont servis à estimer leurs paramètres.

Points communs des comportements modélisés. Néanmoins, si des différences peuvent être exhibées en ces deux types de méthodes, elles rendent compte de deux comportements mécaniques majeurs des joints de maçonneries :

- Le comportement normal est caractérisé, le plus souvent par une faible résistance à la traction qui tend à s'annuler sous la sollicitation. On note alors la présence d'un fort adoucissement, voire même d'un comportement fragile.
- Le comportement tangent du joint est caractérisé par un mécanisme de type frottement sec dont le seuil est sensible à la pression de confinement. Une résistance supplémentaire au frottement peut être introduite dans le comportement du matériau sain. Là encore, un mécanisme d'adoucissement fait tendre le comportement résiduel vers le frottement sec.

3.5 Perspectives pour une modélisation micromécanique des maçonneries

Dans la partie suivante (Partie II), nous proposerons une approche micromécanique qui tentera de reprendre les deux comportements principaux mentionnés précédemment. Toutefois, des améliorations sensibles seront proposées sur les point suivants :

1. Le premier point est celui de la génération des maillages. Les approches micromécaniques s'appuient sur une description géométrique fine des éléments et des joints. Cette description est difficile et technique. Nous tâcherons d'y répondre au moyen de méthodes de restitutions stéréo-photogrammétriques et des algorithmes de détection de contact performants (voir § 7.3.2 et § 7.3.3).
2. Le second point concerne le comportement mécanique du joint. Si l'on fait le bilan des comportements rencontrés dans la littérature, nous sommes confrontés à deux types de modélisations distinctes :
   - Dans le premier type de modèle (approche discrète), le comportement normal est guidé par des conditions unilatérales de type Signorini. La condition de complémentarité (où si l'on préfère un système de Kuhn-Tucker) est écrite sur le saut de déplacement

à l'interface. Le comportement normal est généralement réversible et la cohésion n'est pas prise en compte. Le comportement tangent est décrit par un frottement sec de COULOMB et donne un caractère dissipatif au modèle. Cette modélisation est très bien adaptée aux traitements des joints-vifs ; nous conserverons ce modèle dans ce cadre.

– Dans le second type d'approche (approche continue), l'introduction de la plasticité dans les modèles d'interfaces conduit à considérer un problème de complémentarité écrit en vitesses (*cf* (3.3.13)). Les déformations associées sont donc irréversibles. Le comportement tangent est modélisé par une plasticité non associée avec une dilatance plus ou moins marquée. Pour les modèles ne tenant pas compte de la cohésion, le comportement tangent est donné par une loi de frottement sec de COULOMB. Si une cohésion est introduite, le comportement est donné par de la plasticité de type MOHR-COULOMB. D'une manière générale, on note la présence d'adoucissement qui fait tendre le comportement plastique vers un frottement sec résiduel.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, lorsque nous avons évoqué les comportements caractéristiques des géomatériaux quasi-fragiles au § 1.3, les phénomènes dissipatifs dans les mortiers ont deux sources couplées que sont l'endommagement fragile et la plasticité non associée. On a vu que les modélisations présentées concernant les mortiers cohésifs, ne s'appuient que sur la plasticité. Nous allons essayer de donner dans le § 5.3 une réponse à ce problème en introduisant le concept d'adhésion et d'endommagement surfacique.

CHAPITRE 4

Analyse mécanique multi-échelle des maçonneries

———————— oOo ————————

Dans les chapitres précédents, les structures maçonnées sont abordées à deux échelles distinctes : d'une part une échelle macroscopique, où l'on suppose un milieu continu et homogène et d'autre part, une échelle microscopique (voire mésoscopique), où le milieu est considéré comme hétérogène continu ou discret. Dans ce chapitre, nous allons donner les principaux éléments des méthodes qui permettent de relier ces deux échelles, en introduisant la notion d'un milieu homogène équivalent tenant compte de la microstructure du matériau. Ces méthodes ont pour but de construire des modèles macroscopiques basés sur des considérations micromécaniques fortes. Elles se révèlent particulièrement intéressantes lorsque les analyses micromécaniques fines deviennent trop « coûteuse ». Nous essaierons de dégager le cadre dans lequel elles peuvent être adaptées aux maçonneries ainsi que de nouvelles stratégies qui pourraient être envisagées pour l'analyse multi-échelle des maçonneries.

———————— oOo ————————

Plan du Chapitre 4

4.1 Démarche générale d'homogénéisation des milieux élastiques . 106
4.1.1 Principes de base – Tenseurs de localisation 106
4.1.2 Choix des tenseurs de localisation : méthodes de bornes et homogénéisation périodique 107
4.2 Applications de l'homogénéisation des milieux élastiques 109
4.2.1 Quelles méthodes d'homogénéisation pour quel type de maçonneries ? 109
4.2.2 Méthodes analytiques hybrides 110
4.2.3 Méthodes numériques et homogénéisation périodique 111
4.3 Homogénéisation, Calcul à la rupture & Analyse limite 113
4.3.1 Calcul à la rupture et homogénéisation périodique 113
4.3.2 Application aux maçonneries. 114
4.4 Cas des maçonneries à constituants dissipatifs élasto-plastiques 118
4.4.1 Applications des schémas auto-cohérents aux maçonneries 118
4.4.2 Méthodes semi-analytiques pour les maçonneries périodiques 120
4.4.3 Stratégies pour l'homogénéisation des maçonneries en plasticité . . 123
4.5 Cas des maçonneries à constituants dissipatifs quasi-fragiles . . 126
4.5.1 Homogénéisation et endommagement dans les maçonneries 126
4.5.2 Milieux microfissurés pour l'endommagement et la rupture des matériaux quasi-fragiles 129
4.6 Conclusion sur l'homogénéisation des maçonneries 137

Considérons un milieu hétérogène décrit par un petit paramètre ε représentant la taille moyenne des hétérogénéités en rapport de la taille de la structure complète. On note $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon$ et $\boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon$ les champs de contraintes et de déformations qui règnent dans ce milieu. Considérons maintenant le milieu homogène équivalent, i.e., le milieu qui aura une réponse mécanique semblable pour une gamme de chargements donnée. Supposons qu'il règne dans ce dernier les champs de contraintes et de déformations $\boldsymbol{\sigma}^0$ et $\boldsymbol{\epsilon}^0$. Une définition précise du matériau homogène équivalent peut être donnée sous la forme du problème asymptotique suivant (SUQUET, 1982) :

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon, \quad \boldsymbol{\epsilon}^0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{\epsilon}^\varepsilon. \tag{4.0.1}$$

Une manière plus heuristique d'aborder le problème de l'homogénéisation est de considérer que le milieu homogène équivalent est le résultat d'une moyenne sur un volume suffisamment représentatif du milieu. On introduit, pour cela, deux échelles :

- *une échelle macroscopique*, repérée par un système de coordonnées $\boldsymbol{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq 3}$, à laquelle le milieu est considéré comme homogène,
- *une échelle microscopique*, repérée par un système de coordonnées $\boldsymbol{y} = (y_i)_{1 \leq i \leq 3}$, qui rend compte des hétérogénéités d'un volume élémentaire représentatif [1], $V(\boldsymbol{x})$, autour d'un point $\boldsymbol{x}$ à l'échelle macroscopique. Un point du milieu hétérogène est alors repéré par un point $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

La moyenne spatiale d'une grandeur $\boldsymbol{F}$ s'exprime de la manière suivante [2] :

$$\boldsymbol{F}^0(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{V(\boldsymbol{x})} \int_{V(\boldsymbol{x})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \equiv \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle_{V(\boldsymbol{x})}. \tag{4.0.2}$$

Le matériau homogène équivalent est alors introduit en moyennant les grandeurs mécaniques pertinentes sur un volume que l'on juge représentatif. Le choix de la notation $\boldsymbol{F}^0$ pour la moyenne de $\boldsymbol{F}$ semble à première vue abusif. Toutefois, considérant des milieux périodiques, où l'homothétie $\boldsymbol{x} = \varepsilon \boldsymbol{y}$ permet de décrire le changement d'échelle, SUQUET (1982) a montré le résultat suivant :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{F}^\varepsilon = \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle_{V(\boldsymbol{x})}. \tag{4.0.3}$$

Cette manière d'envisager la procédure d'homogénéisation est souvent appelée « Méthode des moyennes ». De part son abord assez naturel, c'est sous cette forme qu'elle est présentée dans les applications aux maçonneries, évoquées dans la suite. Gardons toutefois en mémoire que l'équivalence entre les méthodes asymptotiques, définissant rigoureusement la notion de matériau équivalent, et la méthode des moyennes n'est prouvée que pour les milieux périodiques.

Le § 4.1 est consacré à l'estimation des caractéristiques élastiques linéaires des maçonneries. On abordera ensuite l'homogénéisation des maçonneries dans le domaine non-linéaire. L'organisation de cette présentation sera dans le même esprit que celle des modélisations macromécaniques. On présentera tout d'abord une application de l'homogénéisation dans le cadre du calcul à la

1. Le choix d'un volume élémentaire représentatif est un problème complexe. Nous essaierons d'en donner quelques éléments au cours de cette présentation.

2. Bien sûr, cette expression de la moyenne n'est pas la seule manière de mesurer la valeur de $\boldsymbol{F}$ sur V.

rupture et de l'analyse limite au § 4.3 puis on évoquera ensuite le cadre de la plasticité seule au § 4.4 et de l'endommagement seul au § 4.5.1. Pour finir cet aperçu, on discutera des modélisations qui tentent de coupler à la fois endommagement et plasticité (§ 4.5.2).

4.1 Démarche générale d'homogénéisation des milieux élastiques

Dans cette partie, nous allons évoquer différentes méthodes pour accéder aux caractéristiques élastiques du matériau homogène équivalent à partir d'un milieu hétérogène. Les principes de base seront évoqués puis différentes méthodes seront passées en revue. L'objectif est non seulement de fournir les clefs pour l'analyse des approches, qui ont été déjà réalisées, mais aussi de discuter des méthodes qui pourraient être appliquées de manière pertinente.

4.1.1 Principes de base – Tenseurs de localisation

Dans un cadre de loi de comportement linéaire, la méthode des moyennes peut se présenter de la manière suivante. Définissons en premier lieu les variables macroscopiques décrivant le matériau homogène équivalent. En suivant (4.0.2), on obtient pour les contraintes et les déformations macroscopiques :

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \rangle \,, \quad \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})) = \langle \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) \rangle \,. \tag{4.1.1}$$

La démarche d'homogénéisation consiste à relier les contraintes et les déformations macroscopiques $\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}))$, en tenant compte de la loi de comportement microscopique $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}$ et éventuellement des équations d'équilibre locales. Deux approches sont possibles :

- *Approche en contraintes.* On se donne $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}))$ et l'on cherche $\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x})$.
- *Approche en déformations.* On se donne $\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x})$ et l'on cherche $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}))$.

Etape de localisation. Pour atteindre cet objectif, les relations de moyenne (4.1.1), la loi de comportement microscopique et les équations d'équilibre ne sont pas suffisantes pour résoudre le problème. Il est nécessaire d'introduire un tenseur de localisation, que nous noterons, $\boldsymbol{A}$, pour une approche en déformations et $\boldsymbol{B}$ pour une approche en contraintes. Dans le cas d'une approche en déformations, la déformation microscopique est reliée à la déformation macroscopique de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})). \tag{4.1.2}$$

Ces tenseurs de localisation apportent l'information manquante pour résoudre le problème. Entre autres, ils traduisent les hypothèses qui sont faites sur la géométrie et la répartition des phases. En pratique, il existe une infinité de façon de choisir ces tenseurs de localisation, qui correspondent aux différents hypothèses que l'on fait sur le volume représentatif. Nous verrons dans la suite quelques exemples de choix de tenseurs de localisation (§ 4.1.2).

Etape d'homogénéisation Il s'ensuit l'étape d'*homogénéisation* où la loi homogène équivalente peut alors s'énoncer ainsi :

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x}) = \left\langle \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\rangle \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})). \tag{4.1.3}$$

La loi élastique du matériau homogène équivalent est donc parfaitement connue dès lors que l'on sait définir le tenseur d'élasticité homogénéisé suivant :

$$\boldsymbol{C}^0 = \left\langle \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\rangle . \tag{4.1.4}$$

Une approche duale en contraintes aurait tout aussi bien pu être écrite. On fait intervenir dans ce cas un tenseur de localisation des contraintes $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x}). \tag{4.1.5}$$

On obtient une expression du tenseur homogénéisé des souplesses :

$$\boldsymbol{S}^0 = \left\langle \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\rangle . \tag{4.1.6}$$

Equivalence énergétique - Principe de macro-homogénéité de Hill-Mandel De nombreuses approximations de ces problème ont été résolues en fournissant un tenseur de localisation particulier. Toutefois, une méthode d'homogénéisation digne de ce nom doit respecter l'équivalence énergétique entre les deux échelles.

Les méthodes que nous allons évoquer dans la suite respectent ce principe, souvent qualifié de principe de macro-homogénéité de Hill-Mandel. Ce principe postule une équivalence énergétique entre l'échelle microscopique et macroscopique ; équivalence de l'énergie libre pour une approche en déformations et équivalence de l'enthalpie libre pour une approche en contraintes. Il peut s'écrire :

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\sigma} \right\rangle \,\bar{\bar{\otimes}}\, \left\langle \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) \right\rangle = \boldsymbol{\sigma}^0 \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}^0 \tag{4.1.7}$$

4.1.2 Choix des tenseurs de localisation : méthodes de bornes et homogénéisation périodique

Bornes de Reuss et de Voigt Les hypothèses les plus simples pour les tenseurs de localisation $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, conduisent aux bornes de Voigt pour une approche en déformations et Reuss en contraintes. Le tenseur de localisation associé est considéré à son tour comme le tenseur identité d'ordre 4. Dans la méthode de Voigt (resp. de Reuss), la déformation (resp. contrainte) microscopique est donc supposée partout égale à la déformation (resp. contrainte) macroscopique. Les deux méthodes donnent généralement des résultats assez éloignés et approximatifs du fait de l'état de déformations ou de contraintes trop idéalisé dans le volume[3]. *A contrario*, elles sont peu restrictives sur les conditions de leur application et ne nécessitent que la connaissance

3. Il est bon de remarquer que l'on n'utilise pas les équations d'équilibre.

des fractions volumiques de chaque constituant. Les bornes obtenues peuvent symboliquement [4] s'exprimer ainsi :

$$(\boldsymbol{S}^0)^{-1} = (\langle \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle)^{-1} \preccurlyeq (\boldsymbol{S}^{eff})^{-1} = \boldsymbol{C}^{eff} \preccurlyeq \boldsymbol{C}^0 = \langle \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle\,, \tag{4.1.8}$$

où $\boldsymbol{C}^{eff}$ et $\boldsymbol{S}^{eff}$ seraient les tenseurs des lois homogénéisées si l'on connaissait exactement les tenseurs de localisation.

Bornes de Hashin & Shtrikman Hashin & Shtrikman (1962, 1963) proposent une méthode de résolution en considérant le problème d'inclusion d'Eshelby (1957) pour une géométrie sphérique de l'inclusion. Grâce à cette information supplémentaire sur la géométrie des phases, ils fournissent des bornes plus précises en considérant une loi des mélanges. Nous reviendrons sur ces méthodes dans le cadre non linéaire des milieux microfissurés (cf. § 4.5.2).

Méthodes de Hill-Mandel Hill (1965a, 1967) & Mandel (1971) proposent deux procédures générales d'estimation des caractéristiques élastiques, qui respectent le principe de macro-homogénéité [5]. Enonçons brièvement la méthode de Hill-Mandel en déformation :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\epsilon}^0 \boldsymbol{y}, \quad \text{sur} \quad \partial V(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{4.1.9}$$

et en contrainte :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{C}^{-1} \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}) \\ \mathrm{div}_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{n}, \quad \text{sur} \quad \partial V(\boldsymbol{x}) \end{cases} \tag{4.1.10}$$

Cependant, la validité des méthodes de Hill-Mandel est subordonnée à un certain nombre de conditions. En particulier, leur application donne de bons résultats sur des « milieux dilués », où la concentration des hétérogénéités est faible. Elle est d'autant meilleure que le volume représentatif choisi est grand (Le cas optimum étant de considérer un volume représentatif $V(\boldsymbol{x})$ égal au volume Ω du solide entier !).

Les méthodes qui viennent d'être présentées, fournissent des bornes qui encadrent d'un point de vue énergétique le matériau homogène idéal. Nous verrons, toutefois, qu'elles peuvent parfois donner des résultats exacts dans des cas limites extrêmement simples.

Homogénéisation périodique L'homogénéisation périodique s'appuie sur l'hypothèse que les déformations et les contraintes qui règnent dans le milieu hétérogène sont périodiques.

4. Relations de grandeurs basées sur des considérations énergétiques.

5. Nous verrons dans la suite que les méthodes d'Hill & Mandel respectent le principe de macro-homogénéité quelque soit le comportement choisi.

Pour tenir compte de la géométrie périodique du milieu, on introduit un espace de contraintes et de déformations périodiques[6] :

$$\mathcal{S}_{per}(V) = \{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau n} \text{ opposé sur les faces opposées de } V(\boldsymbol{x})\} \tag{4.1.11}$$

$$\mathcal{DP}(V) = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{v}; \boldsymbol{E} \in \mathcal{Z}_s; \boldsymbol{v}\ V\text{-périodique}\} \tag{4.1.12}$$

Le problème d'homogénéisation périodique en déformation peut alors s'énoncer ainsi :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}) \\ \operatorname{div}_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}) \\ \langle \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \rangle = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})) \\ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{per}(V), \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{DP}(V) \end{cases} \tag{4.1.13}$$

Ce problème conduit à une solution unique en $\boldsymbol{\sigma}$ et définit $\boldsymbol{u}$ à un vecteur constant près.

Profitant de la linéarité du système, la réponse microscopique du volume à une déformation macroscopique $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x}))$ peut être exprimée comme une combinaison linéaire des réponses à des déformations élémentaires. Pour connaître le tenseur des rigidités homogénéisé, il reste donc à résoudre les problèmes de localisation pour les différentes déformations macroscopiques élémentaires.

Une démarche similaire peut être introduite en contraintes. On peut souligner que pour l'homogénéisation des milieux périodiques, les deux approches sont équivalentes. On a en particulier le résultat suivant : $(\boldsymbol{C}^0)^{-1} = \boldsymbol{S}^0$.

4.2 Applications de l'homogénéisation des milieux élastiques

4.2.1 Quelles méthodes d'homogénéisation pour quel type de maçonneries ?

Les méthodes de bornes fonctionnent correctement lorsque que certaines hypothèses sont vérifiées. Parmi ces hypothèses, on peut citer l'hypothèse d'isotropie statistique du volume élémentaire représentatif, l'hypothèse de milieu dilué, l'hypothèse de modules élastiques proches, *etc.*...

Pour les maçonneries de blocage (*voir* § 1.1), ou, dans une certaine limite, pour des appareils très irréguliers (maçonneries de pierres sèches (bories, gabions, *etc.*...)) , ces hypothèses peuvent être respectées. Le blocage, par exemple, à l'image du béton peut être homogénéisé par une théorie des mélanges.

Des exceptions, sur des appareils réguliers, sont cependant à noter. On peut penser en particulier à l'application des méthodes de Hill-Mandel sur des géométries simples. Le cas d'un volume élémentaire représentatif constitué de couches (mortier et bloc) peut donner de bons résultats. Des méthodes hybrides ont été utilisées sur ces géométries. Nous montrerons que dans ces cas particuliers, elles reviennent à user de l'homogénéisation périodique (§ 4.2.2).

6. On rappelle que $\mathcal{Z}_s$ est l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 symétriques.

L'homogénéisation périodique est la méthode naturelle pour traiter de l'homogénéisation des appareils réguliers. La raison est triviale : les appareils réguliers jouissent d'une périodicité assez grande qui permet de faire appel aux méthodes d'homogénéisation périodique. Cette périodicité est illustrée sur la figure 4.1. Bien que cette remarque semble évidente, les méthodes d'homogé-

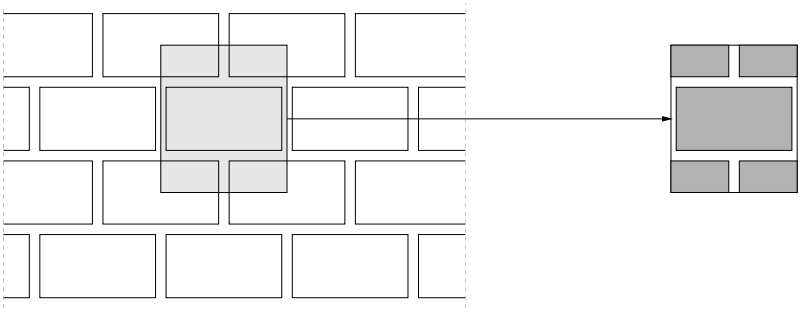


FIGURE 4.1 – *Périodicité d'un appareil régulier - Exemple de définition d'un volume représentatif générateur*

néisation périodique ont été appliquées très tard aux maçonneries. Le travail, très complet, de ANTHOINE (1995), à ce sujet sera évoqué au § 4.2.3.

4.2.2 Méthodes analytiques hybrides

PANDE *et al.* (1989) donnent une estimation approchée des caractéristiques élastiques des maçonneries en s'appuyant sur une procédure en deux étapes. Cette méthode étend aux maçonneries des résultats développés pour les milieux rocheux fissurés (ZIENKIEWICZ & PANDE, 1977).

Une première étape consiste à homogénéiser une assise pour obtenir une couche homogène équivalente élastique. Pour cela, il considère le volume représentatif illustré à la figure 4.2.

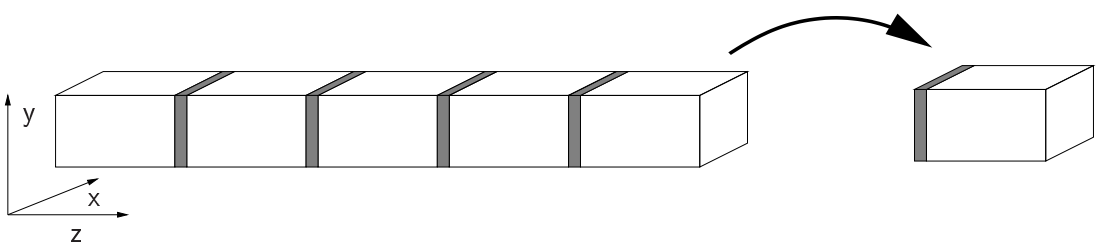


FIGURE 4.2 – *Volume élémentaire représentatif d'une assise*

Choix de tenseurs de localisation. Ils supposent *a priori*, les approximations suivantes sur l'état de contraintes et de déformations :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_x & \hat{\sigma}_{xy} & 0 \\ & \hat{\sigma}_y & 0 \\ \text{sym.} & & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \hat{\epsilon}_{xz} \\ & 0 & \hat{\epsilon}_{yz} \\ \text{sym.} & & \hat{\epsilon}_z \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

Une loi d'élasticité orthotrope est alors établie pour le matériau homogène équivalent. Les fonctions $\hat{\sigma}$ et $\hat{\epsilon}$ corrigent les états de contraintes uniformes qui régneraient si la cellule élémentaire était homogène. Ils sont pris constant, par phase, et sont déterminés par l'intermédiaire des comportements de chaque phase, les conditions de continuités aux interfaces et les relations de moyenne.

Commentaires et validité des hypothèses. Commentons le choix des tenseurs de localisation qui est fait. Pour la direction z, on applique une méthode de Hill-Mandel en contraintes. Les équations de continuité aux interfaces et les équations d'équilibre impliquent alors que la contrainte est constante par phase. Une méthode de Voigt aurait donc été équivalente. La cellule dans la direction z est, en fait, considérée comme un assemblage de ressorts en série.

Des remarques analogues peuvent être faites dans les directions x et y, mais une approche en déformations, une méthode de Reuss et un assemblage en parallèle sont à considèrer.

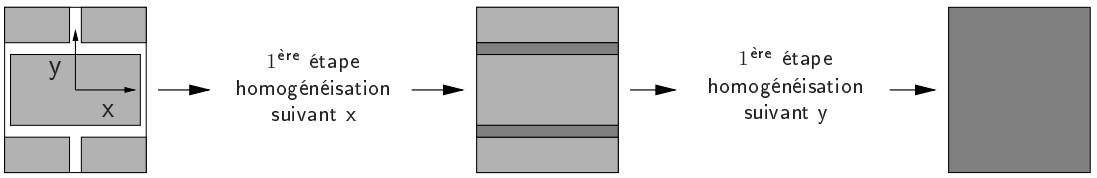
En fait, ces méthodes heuristiques hybrides sont équivalentes à une méthode d'homogénéisation périodique du fait de la simplicité de la géométrie. L'avantage de l'homogénéisation périodique est qu'elle n'introduit pas d'hypothèses, *a priori*, hormis bien sûr la périodicité du milieu.

Approximation d'un milieu multi-couche La structure obtenue est alors homogénéisée comme un milieu multi-couche. Dans le même esprit, Maier *et al.* (1991) propose d'effectuer ces deux étapes dans l'ordre inverse. Ces procédures sont illustrées sur le figure 4.3.

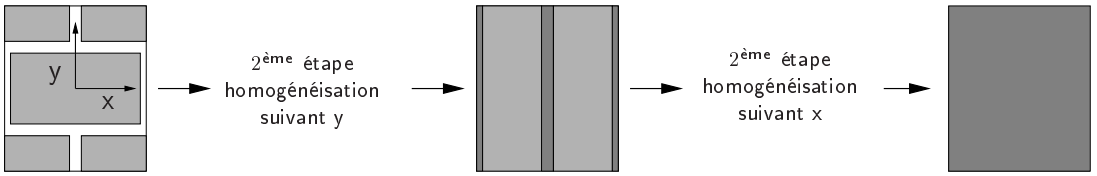
Si les procédures présentées fournissent facilement une estimation des caractéristiques élastiques, elles restent tout de même assez discutables. D'une part, comme l'ont montré (Geymonat *et al.*, 1987) dans un cadre général, les résultats de ces deux procédures ne sont pas identiques. D'autre part, l'arrangement géométrique n'est pas pris entièrement en compte, en particulier le lieu des joints montants par rapport aux éléments des assises adjacentes. A cet effet, Maier *et al.* (1991) proposent une troisième étape pour tenir compte de l'appareil et donc du placement des joints par rapport aux assises adjacentes. De même, le problème est traité soit en deux dimensions sous l'hypothèse des contraintes planes, soit comme un milieu tridimensionnel infiniment épais.

4.2.3 Méthodes numériques et homogénéisation périodique

En appliquant de manière rigoureuse la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques, Anthoine (1995) évalue les caractéristiques élastiques des maçonneries chargées dans leur plan.



(a) d'après Pande *et al.* (1989)



(b) d'après Maier *et al.* (1991)

Figure 4.3 – *Procédure d'homogénéisation en deux étapes*

La théorie générale est adaptée aux milieux tridimensionnels qui ne possèdent que deux directions de périodicité. La méthode s'appuie sur le choix d'un volume élémentaire représentatif sur lequel on n'impose que deux directions de périodicité. Sur la dernière direction, on se donne des conditions de surface libre.

Il est important de noter que cette procédure n'est pas restreinte à l'appareil plein-sur-joint mais s'applique à tout type d'appareil régulier. Le choix du volume représentatif permet de prendre en compte de manière complète le type d'appareil. Même si, pour un comportement linéaire, l'appareil influe peu, il peut être déterminant pour l'estimation des charges extrêmes à la rupture.

Anthoine (1995) compare ses résultats avec les méthodes approchées présentées au § 4.2.2. D'une manière générale, les caractéristiques élastiques sont semblables même si les méthodes approchées surestiment des modules élastiques de 7 à 15%. L'auteur compare ensuite les résultats d'homogénéisation périodique sous l'hypothèse des contraintes planes et d'homogénéisation périodique tridimensionnelle. L'auteur note que les résultats bidimensionnels sous-estiment les modules élastiques. Ceci tient au fait qu'elles ne prennent pas en compte de l'épaisseur.

Si les contraintes $\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{21}\}$ dans le plan du panneau sont comparables, il n'en est pas de même pour les contraintes hors-plan $\{\sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}\}$ qui sont loin d'être négligeables. Certes ces contraintes influent peu sur les caractéristiques élastiques en chargement plan mais sont déterminantes en régime non linéaire. Considérons un essai de compression simple d'un mur. Les états de contraintes aux surfaces libres sont bien identiques aux états de contraintes planes. Par contre, au cœur du mur, on constate de fortes compressions dans les joints-de-lits alors que les briques sont en traction. Si l'on choisit un critère du type Mohr-Coulomb pour les mortiers et les briques, il risque d'être violé en premier par les contraintes hors plan. En régime non linéaire,

les méthodes approchées risquent de donner des chargements extrêmes surestimés ainsi que des mécanismes de rupture incorrects.

Dans le même esprit, Cecchi & Di Marco (2000) introduisent une hypothèse supplémentaire en considérant les éléments rigides. Ils montrent que pour des rapports de rigidité entre les éléments et les joints de 1/30, il n'existe pas de différence notable sur l'élasticité du matériau homogène équivalent.

Dans ce paragraphe, nous avons vu qu'il existait des méthodes précises pour estimer les caractéristiques élastiques des appareils réguliers. Elles fournissent une base saine pour les calculs en régime inélastique que nous allons voir dans les § 4.3 et 4.5.2.

4.3 Homogénéisation, Calcul à la rupture & Analyse limite

de Buhan & De Felice (1997) proposent d'appliquer la théorie de l'homogénéisation périodique au calcul à la rupture des structures maçonnées. Comme l'a montré Suquet (1983), la détermination d'un domaine de résistance du matériau équivalent revient à résoudre un problème de calcul à la rupture sur la cellule de base. On se propose de rappeler le cadre dans lequel ce résultat a été démontré au § 4.3.1 et de présenter son application aux appareils réguliers au § 4.3.2.

4.3.1 Calcul à la rupture et homogénéisation périodique

Le cadre formel et les notations sont celles de l'annexe A. On considère un domaine admissible pour les contraintes microscopiques : $\mathcal{G}(\boldsymbol{y})$ associé à sa fonction seuil $g(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}))$. On définit de la même façon un domaine admissible $\mathcal{G}^{hom}$ pour les contraintes macroscopiques $\boldsymbol{\sigma}^0 = \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle$ tel qu'il existe un champ microscopique $\boldsymbol{\sigma}$ tel que :

$$\begin{cases} \mathrm{div}_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{n}, \quad \text{sur} \quad \partial V(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{per}(V), \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{y}). \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Les équations (4.3.1) constituent la définition statique de $\mathcal{G}^{hom}$. Une définition cinématique peut être proposée en considérant un champ de vitesses de déformations de la forme suivante :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) / \quad \boldsymbol{u} \text{ est } V-\text{périodique}. \tag{4.3.2}$$

En différenciant ce champ, on obtient :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{D}^0(\boldsymbol{x}) + \delta(\boldsymbol{y}), \tag{4.3.3}$$

où $\boldsymbol{D}$ est le tenseur des vitesses de déformations, $\boldsymbol{D}^0$ la partie symétrique de $\boldsymbol{F}$ et $\delta(\boldsymbol{y})$ le taux de déformations associé à $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y})$. Le principe de macro-homogénéité prend alors la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^0 \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}^0 = \left\langle \boldsymbol{\sigma} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D} \right\rangle. \tag{4.3.4}$$

Comme il l'est rappelé en annexe A, la définition du domaine de résistance du matériau, pour peu qu'il soit convexe, peut se faire par l'intermédiaire de sa fonction d'appui :

$$\pi(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})) = \sup\left\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) / \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{y})\right\}. \tag{4.3.5}$$

La convexité étant conservée à travers l'opérateur d'homogénéisation périodique (Suquet, 1983), on donne la définition cinématique suivante à $\mathcal{G}^{hom}$:

$$\pi^{hom}(\boldsymbol{D}^0) = \sup\left\{\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x}) \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}^0 / \quad \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}^{hom}(\boldsymbol{x})\right\}. \tag{4.3.6}$$

Un résultat permet de majorer la fonction d'appui du domaine homogénéisé par rapport à la moyenne de la fonction d'appui microscopique :

$$\pi^{hom}(\boldsymbol{D}^0) \leq \langle \pi(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}))\rangle, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}. \tag{4.3.7}$$

Tout comme en calcul à la rupture classique, cette inégalité peut être atteinte seulement sous des conditions particulières. Le lecteur interessé pourra trouver une reflexion sur ces conditions dans (Frémond & Friaà, 1982). Les auteurs supposent, ici, qu'elles sont remplies. On a alors l'équivalence entre les approches cinématique et statique et le résultat suivant :

$$\pi^{hom}(\boldsymbol{D}^0) = \inf_{\boldsymbol{u}} \{\langle \pi(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}))\rangle\}. \tag{4.3.8}$$

4.3.2 Application aux maçonneries.

Les éléments sont supposés homogènes et l'on donne leur domaine admissible pour les contraintes $\mathcal{G}^b$ dans l'hypothèse des contraintes planes en fonction de $\{\boldsymbol{\sigma}_{11}, \boldsymbol{\sigma}_{22}, \boldsymbol{\sigma}_{33}\}$.

Pour les joints, le critère de résistance est donné par sa fonction seuil représentant le frottement avec cohésion de Mohr-Coulomb :

$$g(\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}) = g(\sigma,\tau) = |\tau| + \sigma\tan\phi - c \leq 0, \tag{4.3.9}$$

où c est la cohésion et ϕ l'angle de frottement. La réaction aux interfaces $\boldsymbol{t}$ est représentée par ses composantes normale σ et tangente τ.

de Buhan & De Felice (1997) donnent, de manière très élégante l'expression d'un critère macroscopique pour un appareil plein-sur-joint. Ils considèrent pour cela un champ de vitesses de la forme suivante :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{v}_i + \omega_i(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_i)\}_{i\in[\![1,4]\!]}. \tag{4.3.10}$$

où i est l'indice de chaque constituant la cellule de base, ω_i la vitesse angulaire de chaque bloc et v_i la vitesse de l'un des sommets des blocs. Pour éclaircir les notations, la cellule de base est représenté à la figure 4.4.

En interdisant tout mouvement arbitraire de solide rigide et en imposant la périodicité du champ de vitesses, on est conduit à écrire :

$$\omega_i = 0, i \in [\![1,4]\!], \tag{4.3.11}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_4 = -\boldsymbol{\beta}. \tag{4.3.12}$$

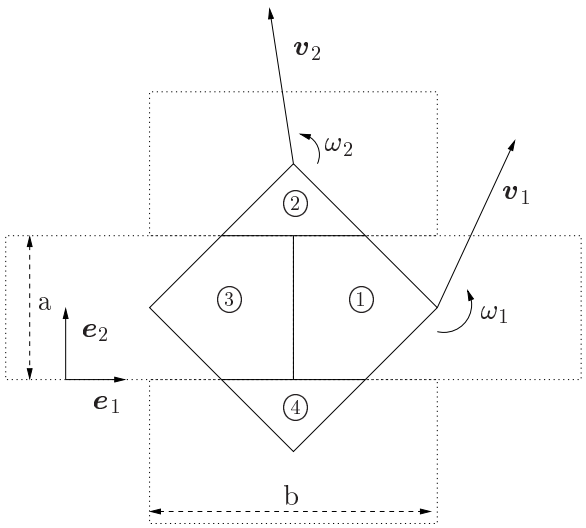


FIGURE 4.4 – *Cinématique de solide rigide pour chaque sommet de la cellule de base*

Deux variables vectorielles $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ décrivent alors la déformation de la cellule. Le gradient de vitesses $\boldsymbol{F}$ est donné par :

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{ab}(2a\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{e}_2), \tag{4.3.13}$$

et sa partie symétrique par :

$$\boldsymbol{D}^0 = \frac{1}{b}(\boldsymbol{\alpha} \otimes_S \boldsymbol{e}_1) + \frac{1}{2a}(\boldsymbol{\beta} \otimes_S \boldsymbol{e}_2). \tag{4.3.14}$$

L'écriture du principe de macro-homogénéité conduit à :

$$\boldsymbol{\sigma}^0 \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}^0 = \frac{1}{ab}\left[2a\alpha_1\sigma^0_{11} + (2a\alpha_2 + b\beta_1)\sigma^0_{12} + b\beta_2\sigma^0_{22}\right]. \tag{4.3.15}$$

Le calcul de la puissance dissipée en moyenne aux interfaces donne (*voir* Annexe A) :

$$\langle \pi(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}))\rangle = \frac{1}{ab}\int_\Sigma \pi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}), [\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})])\, d\Sigma. \tag{4.3.16}$$

Pour un critère de MOHR-COULOMB, la fonction d'appui peut être exprimée par (SALENÇON, 1983) :

$$\pi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}), [\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})]) = \begin{cases} \dfrac{c}{\tan\phi}[v(\boldsymbol{y})].\boldsymbol{n} & \text{si } [v(\boldsymbol{y})].\boldsymbol{n} \geq |[v(\boldsymbol{y})]| \sin\phi, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases} \tag{4.3.17}$$

En appliquant ces expressions, pour les différents modes de glissement et d'ouverture des joints, on obtient :

$$\langle \pi(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}))\rangle = \frac{1}{ab}\frac{c}{\tan\phi}(2a\alpha_1 + b\beta_2). \tag{4.3.18}$$

avec les conditions :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geq |\alpha_2| \tan\phi, \\ \beta_2 - \alpha_2 &\geq |\beta_1 - \alpha_1| \tan\phi, \\ \beta_2 + \alpha_2 &\geq |\beta_1 + \alpha_1| \tan\phi. \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

En supposant que les conditions de l'égalité (4.3.8) soient vérifiées, la fonction d'appui du domaine macroscopique s'exprime par :

$$\pi^{hom}(\boldsymbol{D}^0) = \frac{c}{\tan\phi}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{D}^0) \tag{4.3.20}$$

Le domaine de contraintes admissibles vérifie donc :

$$\boldsymbol{\sigma}^0 \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}^0 \leq \frac{c}{\tan\phi}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{D}^0), \tag{4.3.21}$$

soit

$$\begin{cases} m\alpha_1\sigma^0_{11} + (m\alpha_2 + \beta_1)\sigma^0_{12} + \beta_2\sigma^0_{22} \leq \dfrac{c}{\tan\phi}(m\alpha_1 + \beta_2), \\ m = \frac{2a}{b}, \\ \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \text{ vérifiant (4.3.19)}. \end{cases} \tag{4.3.22}$$

Les auteurs montrent que cette fonction d'appui correspond à un domaine polyédrique convexe $\mathcal{G}^{hom}$ de sommet $\{\boldsymbol{\sigma}^0_{11} = \boldsymbol{\sigma}^0_{22} = \frac{1}{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^0_{12} = 0\}$ avec $\mu = \tan\phi$ le coefficient de frottement. Les arêtes du polyèdres sont formées des segments émanant de ce sommet de vecteurs unitaires (*voir* figure 4.5) :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ -m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\mu \\ \pm 1 \\ -1/\mu \end{bmatrix} \qquad \text{si } m \leq 1/\mu, \tag{4.3.23}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \\ -m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/m \\ \pm 1 \\ -m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (-m - \mu + 1/\mu)/m\mu \\ pm1 \\ -1/\mu \end{bmatrix} \qquad \text{si } m > 1/\mu. \tag{4.3.24}$$

Commentaires Les auteurs mettent donc en évidence, de manière rigoureuse un critère de résistance macroscopique pour un appareil plein-sur-joint avec un critère microscopique de Mohr-Coulomb. Les éléments ont été considérés pour un moment de résistance infinie. En reprenant la démarche précédente avec un champ périodique $\boldsymbol{u}$ tenant compte de la déformation des éléments eux-mêmes, on peut donner un critère macroscopique pour la brique. Le critère global peut être obtenu par intersection des deux critères.

On peut de plus remarquer que le critère macroscopique fait apparaître naturellement l'anisotropie du matériau. Une étude sur un mur sollicité en cisaillement, validée sur des essais expérimentaux montre que les maçonneries où les éléments ont un rapport d'aspect $\frac{a}{b}$ faible sont plus résistantes.

Les auteurs notent aussi que les résultats sont en accord avec les expériences lorsque la taille caractéristique des éléments est faible devant la taille de la structure considérée. Ceci nous

rappelle que les résultats de l'homogénéisation périodique sont bons lorsque le nombre de de cellule de base tend vers ∞.

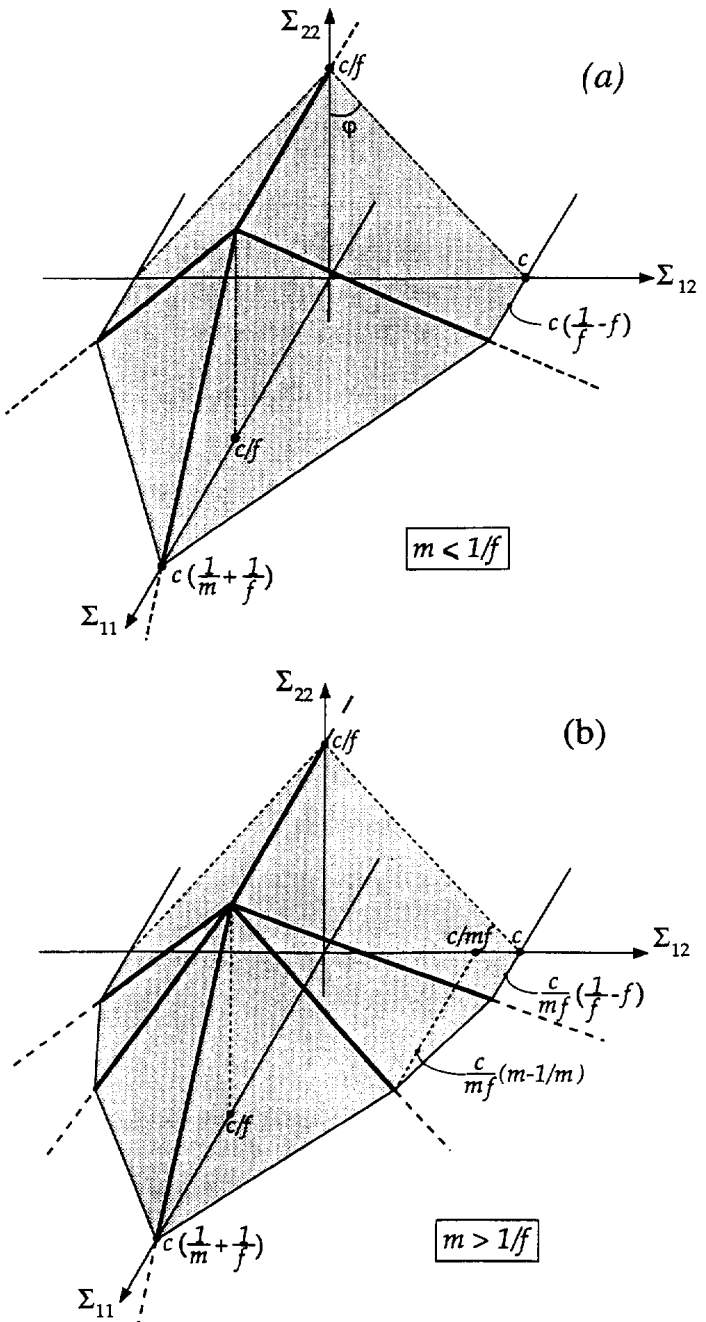


Fig. 5. Strength domain of brick masonry as a homogenized material in the space of stresses.

FIGURE 4.5 – *Domaine de résistance de la maçonnerie $\mathcal{G}^{hom}$, d'après (*DE BUHAN & DE FELICE, *1997). La contrainte macroscopique σ^0 est représentée par Σ et f correspond au coefficient de frottement $\mu = \tan\phi$.*

4.4 Cas des maçonneries à constituants dissipatifs élasto-plastiques

L'homogénéisation périodique des milieux à constituants dissipatifs pose de nombreux problèmes, à la fois théoriques et pratiques quant à leur résolution. L'absence de loi univoque pour décrire leur comportement, l'irréversibilité de leur évolution sont des écueils importants à l'application des méthodes d'homogénéisation périodique. Nous verrons, par exemple, dans la suite, qu'une écriture simple et efficace de lois de comportement homogénéisées est rarement possible.

Pour surmonter ces problèmes et donner des estimations du comportement macroscopique des maçonneries, il est souvent fait appel à des méthodes d'approximation telles que les méthodes de bornes ou les modèles auto-cohérents. Pour une description détaillée des méthodes d'homogénéisation des matériaux à constituants dissipatifs, nous renvoyons le lecteur aux travaux de synthèse de Ponte Castañeda & Suquet (1995, 1998).

Nous présenterons, au § 4.4.1, des applications de méthodes d'approximation des caractéristiques effectives. Ensuite nous évoquerons, au § 4.4.2, quelques tentatives d'estimation semi-analytique de ces caractéristiques en essayant de tirer profit de la périodicité de la structure et de la géométrie simple des phases du volume représentatif. Enfin, nous essaierons d'envisager, en guise de conclusion au § 4.4.2 quelques stratégies pour améliorer ces estimations à la lumière des travaux récents de spécialistes du domaine.

4.4.1 Applications des schémas auto-cohérents aux maçonneries

Pietrusczak & Niu (1992) sont les premiers à s'intéresser à l'estimation des caractéristiques non linéaires globales des maçonneries. La méthode qu'ils utilisent est basée sur deux étapes d'approximations.

La première de ces approximations consiste à considérer deux matériaux intermédiaires, illustrés à la figure 4.6, dont les caractéristiques sont déterminées de la manière suivante :

1. Le premier de ces matériaux, désigné par l'exposant « 1 » est obtenu en considérant que la maçonnerie est constituée d'un matériau homogène, donné par les caractéristiques des briques seules, entrecoupé d'un faisceau de joints verticaux. Chaque joint vertical est considéré comme une inclusion élastique fragile dans une matrice élasto-plastique. Les caractéristiques élastiques sont données par la résolution du problème d'inclusion d'Eshelby (1957) et en considérant, en outre, leurs interactions par la méthode des champs moyens de Mori & Tanaka (1973). On peut remarquer au passage que cette méthode revient à une estimation de type Hashin-Shtrikman (Willis, 1977). Le comportement fragile des joints verticaux est introduit en considérant ou non les raideurs élastiques dans leurs directions normales. La loi de comportement obtenue s'exprime alors par :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^1 = \boldsymbol{C}^1 \bar{\bar{\otimes}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^1. \tag{4.4.1}$$

2. Le second matériau est le matériau composite multi-couche constitué d'une couche épaisse

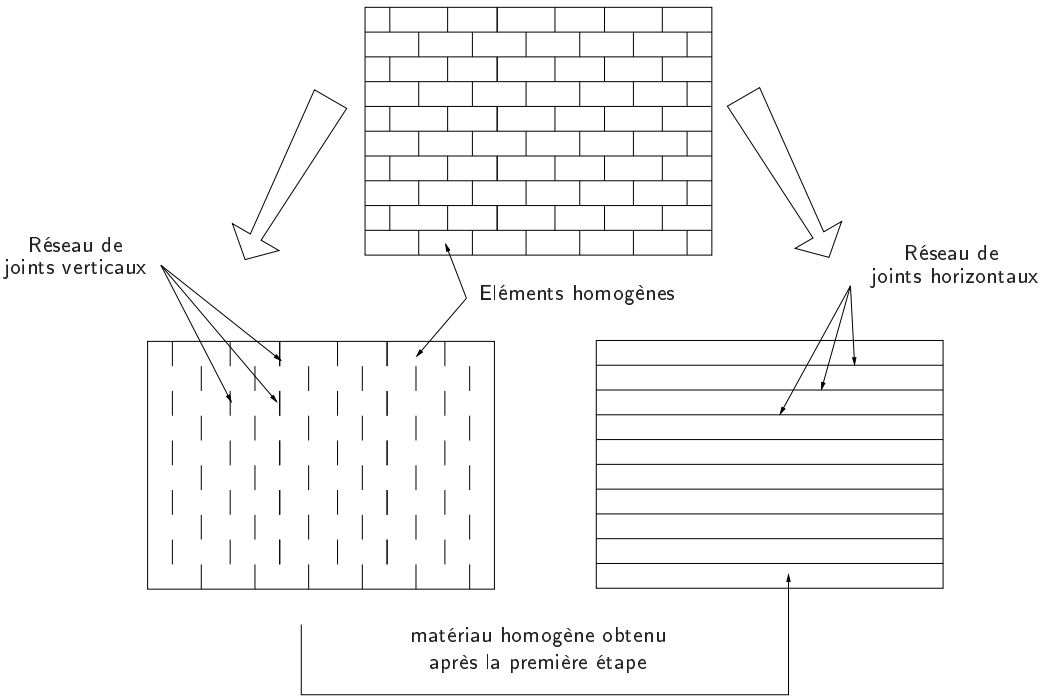


FIGURE 4.6 – *Etapes d'homogénéisation*

du matériau élastique fragile obtenue à l'étape 1 et du réseau de joints horizontaux considérés comme un matériau élasto-plastique. Le comportement de ces joints horizontaux sera noté par :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^2 = \boldsymbol{C}^2 \bar{\bar{\otimes}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2. \tag{4.4.2}$$

La seconde et dernière étape d'homogénéisation est l'application d'une loi des mélanges (HILL, 1963) entre ces deux matériaux qui fournit le comportement global du matériau, soit :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \eta^1 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^1 + \eta^2 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \eta^1 \dot{\boldsymbol{\sigma}}^1 + \eta^2 \dot{\boldsymbol{\sigma}}^2, \tag{4.4.3}$$

où η^1 et η^2 sont les fractions volumiques respectives des constituants. L'hypothèse que les constituants sont parfaitement collés permet de compléter les équations en introduisant des contraintes cinématiques supplémentaires. Les auteurs obtiennent ainsi une relation univoque entre $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ et leurs homologues dans les phases.

Commentaires Les validations données par les auteurs dans les travaux semblent satisfaisantes, tout au moins, pour les chargements simples abordés. La méthode offre donc une première estimation des caractéristiques non linéaires des maçonneries.

Les hypothèses qui sont faites sur les joints verticaux et horizontaux ne semblent pas dénuées de bon sens. En effet, pour des maçonneries sous compression verticale, les joints verticaux sont sollicités en traction et leur comportement peut être assimilé à un comportement élastique

fragile. De même, le choix d'une plasticité non associée pour les joints horizontaux sous pression de confinement semble judicieux.

Cependant, il est important de souligner que les méthodes d'homogénéisation utilisées sont assez anciennes et qu'elles sont assez « grossières ».

Hill (1965b) & Budiansky (1965) proposaient déjà de perfectionner ces estimations en proposant une méthode auto-cohérente incrémentale. Elle est basée sur une approche itérative, considérant le problème d'une inclusion noyée dans une matrice infinie dont les caractéristiques mécaniques sont les caractéristiques globales du composite à déterminer. Budiansky & O'Connell (1976) ont utilisé et développé cette approche pour les matériaux quasi-fragiles microfissurés.

Depuis, de nombreuses autres approches variationnelles ont vu le jour donnant des estimations plus fines garantissant le respect de bornes rigoureuses obtenues soit analytiquement soit numériquement sur des exemples simples. Pour le développement de telles approches, on renvoie le lecteur aux travaux de référence suivant : (Willis, 1983 ; Ponte Castañeda, 1991 ; Suquet, 1993) et aux travaux plus récents concernant les estimations affines, tangentes et du second ordre des propriétés mécaniques globales des composites : (Ponte Castañeda & Suquet, 1995 ; Ponte Castañeda, 1996 ; Masson *et al.*, 2000). Enfin, pour une synthèse sur ces travaux, on pourra consulter (Ponte Castañeda & Suquet, 1998 ; Willis, 2000).

4.4.2 Méthodes semi-analytiques pour les maçonneries périodiques

Lopez *et al.* (1999) proposent une application de l'homogénéisation aux appareils réguliers, où les constituants, éléments et mortiers, sont supposés élasto-plastiques. Ils donnent les équations d'évolution élasto-plastique pour quatre modes de chargements élémentaires sur un volume élémentaire représentatif (illustré sur la figure 4.7) sous l'hypothèse des contraintes planes.

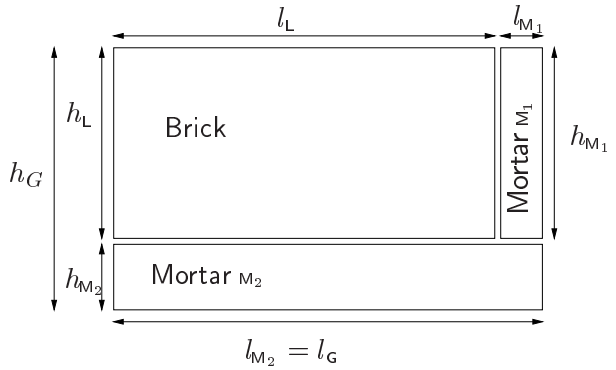


Figure 4.7 – *Volume élémentaire représentatif*

Dans le même esprit que Pande *et al.* (1989), la méthode d'homogénéisation est appliquée de manière heuristique profitant de la simplicité de la cellule de base. La contrainte macroscopique réduite au contraintes planes $\{{}_x\sigma, {}_y\sigma, \tau, \sigma_z\}$ est imposée à la cellule et l'on en déduit l'évolution de la déformation macroscopique $\{{}_x\epsilon_{\mathrm{G}}, {}_y\epsilon_{\mathrm{G}}, {}_{xy}\gamma, \epsilon_z\}$.

Les auteurs imposent des équations de compatibilité sur les déformations, similaires à celles imposées par Pande *et al.* (1989) dans le cas d'un « bi-couche » simple. Elles reviennent, ici, à considérer que la déformation de la cellule est périodique. La méthode est donc équivalente, jusqu'à cette étape, à une méthode d'homogénéisation périodique dans laquelle les vecteurs de périodicité seraient x et y.

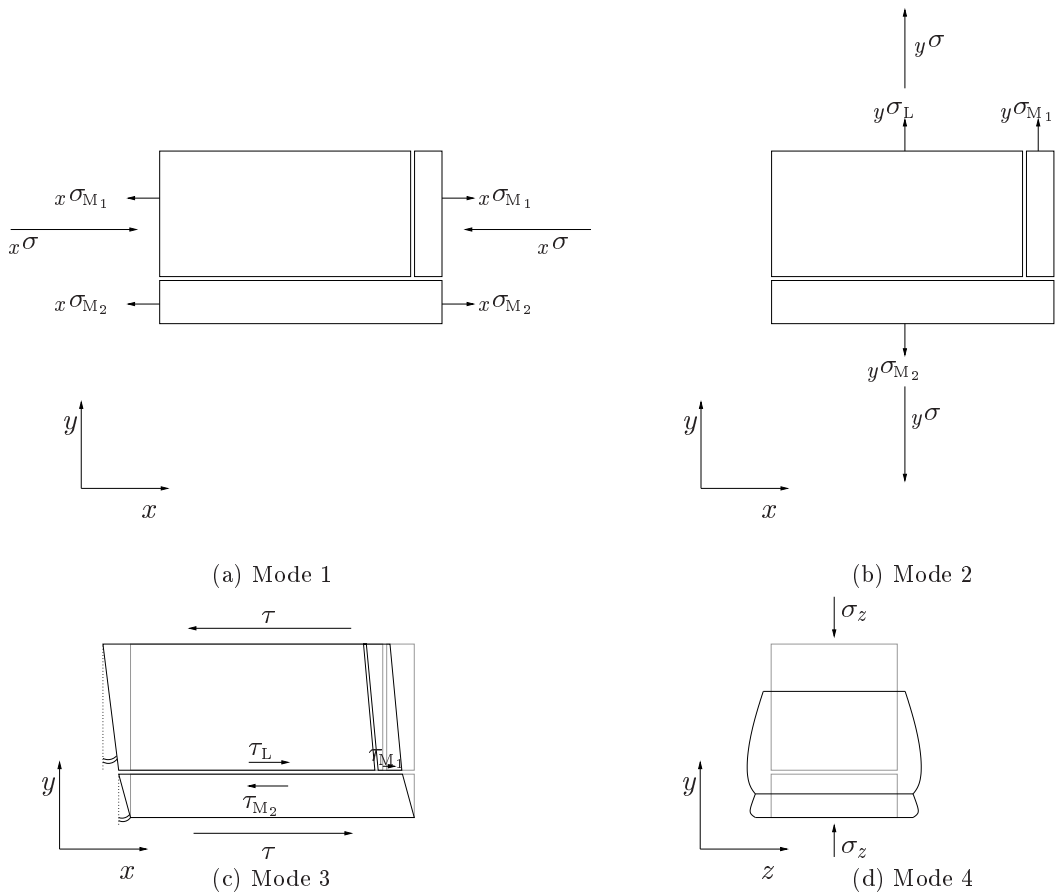


Figure 4.8 – *Représentation des modes de chargements*

Une approximation supplémentaire est faite mais qui n'est pas mise explicitement en évidence par les auteurs. Ils considèrent, en effet, que les déformations sont homogènes par phase. Cette hypothèse, qui est clairement justifiée pour un bi-couche où les calculs peuvent être menés de manière analytique (Elomri & Sidoroff, 1991), est une approximation assez grossière dans ce cas. Il suffit pour s'en rendre compte de considérer le chargement de cisaillement. Cette hypothèse implique que l'on considère que la cellule de base peut être assimilée à un assemblage de ressorts en série et/ou parallèle. Nous reviendrons sur cette hypothèse dans le § 4.4.2.

Dans un soucis de brièveté, on renvoie le lecteur à (Lopez *et al.*, 1999) pour une présentation complète des équations d'évolution pour chaque mode de chargement. La résolution, en effet plus technique qu'ardue, est assez lourde du point de vue des notations. Afin tout de même de fixer

les idées, nous donnons la forme de l'équation d'évolution en déformations pour le mode 1 :

$$\begin{aligned} {}_x\dot{\epsilon}_{\mathrm{G}} &= {}_x\dot{\epsilon}^e_{\mathrm{G}} + {}_x\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{G}}, \\ &= \underbrace{{}_xA\,{}_xD\left(\frac{l_{\mathrm{M}_2}}{{}_xE_{\mathrm{M}_2}}\frac{h_{\mathrm{G}}}{h_{\mathrm{M}_2}}\right)}_{{}_xS^0}\,{}_x\sigma \quad + \quad {}_xA\,{}_xD({}_x\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{M}_2} l_{\mathrm{M}_2} + {}_x\,\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{L}} l_{\mathrm{L}} + {}_x\,\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{M}_1} l_{\mathrm{M}_1}), \\ &\qquad\qquad + \quad \left({}_x\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{L}}\frac{l_{\mathrm{L}}}{l_{\mathrm{G}}} + {}_x\,\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{M}_1}\frac{l_{\mathrm{M}_1}}{l_{\mathrm{G}}}\right), \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

où ${}_xA$ et ${}_xD$ sont deux constantes dépendant des caractéristiques élastiques et géométriques des constituants de la cellule de base, E désigne de manière générique un module d'Young. En assemblant les différents modes de chargements les auteurs obtiennent l'expression d'une matrice de souplesse homogénéisée.

En ce qui concerne les lois d'évolution élasto-plastique, l'étape de localisation ne peut se faire sans information supplémentaire sur le comportement plastique des matériaux. Pour cela, les auteurs supposent la micro-homogénéité des taux de déformation plastique pour l'ensemble des phases constitutives de la cellule de base, soit :

$${}_x\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{M}_2} = {}_x\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{M}_1} = {}_x\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{L}}. \tag{4.4.5}$$

Ils choisissent, de plus, un unique critère de plasticité isotrope de type de Mohr-Coulomb pour les phases et une règle d'écoulement associée. Ils notent ${}_x\dot{\epsilon}^p|_{\mathrm{Mohr}}$ la déformation qui respecte ce critère. D'après (4.4.4), on obtient alors l'expression suivante entre les grandeurs microscopiques et macroscopiques :

$${}_x\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{G}} = \left[{}_xA l_{\mathrm{M}_2} + \left(\frac{1}{l_{\mathrm{G}}} - {}_xA\right)(l_{\mathrm{L}} + l_{\mathrm{M}_1})\right]\,{}_x\dot{\epsilon}^p|_{\mathrm{Mohr}}. \tag{4.4.6}$$

Sous cette hypothèse, une forme analytique d'un opérateur $\boldsymbol{M}^p$ tenant compte de l'anisotropie est fournie. Cet opérateur permet de relier la déformation plastique globale anisotrope à un critère de Mohr-Coulomb isotrope :

$$\dot{\epsilon}^p_{\mathrm{G}} = \boldsymbol{M}^p\,\dot{\epsilon}^p|_{\mathrm{Mohr}}. \tag{4.4.7}$$

Les auteurs justifient cette hypothèse d'une manière un peu douteuse. Ils font remarquer qu'à l'inverse des modèles micromécaniques, la plasticité n'est pas localisée dans une phase précise. Il peut sembler osé, tout de même, de supposer qu'elle est partout identique. Pour tenter d'éclairer la question, on se propose dans le prochain paragraphe de rappeler les éléments fondamentaux de l'homogénéisation périodique en plasticité.

4.4.3 Stratégies pour l'homogénéisation des maçonneries en plasticité

4.4.3.a Rappels d'homogénéisation périodique en plasticité (Suquet (1982,1985b)).

Considérons un modèle microscopique d'élasto-plasticité standard donné par un potentiel de dissipation $\varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$ que nous supposerons régulié :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\epsilon}^e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\epsilon}^p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{\epsilon}^e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}) \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})). \end{cases} \tag{4.4.8}$$

Le problème d'homogénéisation périodique peut dès lors être étendu sous la forme suivante (Suquet, 1982) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}) \bar{\bar{\otimes}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}), \\ \operatorname{div}_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}), \\ \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle = \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{per}(V), \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{DP}(V), \\ \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \text{condition initiale.} \end{cases} \tag{4.4.9}$$

Suquet (1982) a démontré, sous réserve que φ possède la propriété de Lipschitz en contraintes, que ce problème avait une solution $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{v})$, unique en contraintes. Pour obtenir la loi homogénéisée, on introduit le tenseur de localisation en contraintes $\boldsymbol{B}$ et une contrainte auxiliaire $\boldsymbol{\sigma}^r(\boldsymbol{y}, t)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}, t) = \boldsymbol{B} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}^0(t) + \boldsymbol{\sigma}^r(\boldsymbol{y}, t). \tag{4.4.10}$$

Cette contrainte est la contrainte résiduelle lorsque que la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\sigma}^0$, est annulée. C'est un champ de contraintes auto-équilibrées qui satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{\sigma}^r = 0, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}), \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}^r \in \mathcal{S}_{per}(V). \end{cases} \tag{4.4.11}$$

On note $\Phi(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^r) = \left\langle \varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{B} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^r(\boldsymbol{y})) \right\rangle$. La loi homogénéisée répond alors au système suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{S}^0 \bar{\bar{\otimes}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^0(t) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^r) = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}^0(t)), \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \boldsymbol{C}^{-1} \bar{\bar{\otimes}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^r(t) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^r}(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^r) = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}^r(t)), \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}), \\ \operatorname{div}_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{\sigma}^r = 0, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}), \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}^r \in \mathcal{S}_{per}(V), \quad \boldsymbol{v}^r \in \mathcal{DP}(V), \\ \oplus \text{ conditions initiales.} \end{cases} \tag{4.4.12}$$

Le système homogénéisé (4.4.12) ne peut pas se réduire à un système à l'échelle macroscopique sur Ω. Il est couplé à un problème de contraintes résiduelles sur la cellule $V(x)$. L'introduction d'une fonctionnelle non locale en temps fournissant $\boldsymbol{\sigma}^r$ en fonction de l'histoire $\boldsymbol{\sigma}^0$ (4.4.13) peut permettre une élimination de $\boldsymbol{\sigma}^r$ dans le système (4.4.12). Cette élimination est toute théorique puisque on reporte le problème sur la connaissance de l'histoire de $\boldsymbol{\sigma}^0$ et l'évaluation de :

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \boldsymbol{\sigma}^r(\boldsymbol{\sigma}^0(s), 0 \leq s \leq t) \tag{4.4.13}$$

En gardant le système sous sa forme (4.4.12), on met en évidence la structure standard généralisée de la loi de comportement (*voir* § 5.1.4.d). Cette structure peut être précisée en considérant la force thermodynamique suivante :

$$\Sigma = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^0, & \text{le tenseur des contraintes homogénéisées,} \\ \boldsymbol{\sigma}^r(\boldsymbol{y}), & \text{un champ de tenseur défini sur } v(\boldsymbol{x}) \text{ et respectant (4.4.11),} \end{cases} \tag{4.4.14}$$

et la variable conjuguée :

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0) = \boldsymbol{\epsilon}^e(\boldsymbol{u}^0) + \boldsymbol{\epsilon}^p(\boldsymbol{u}^0), & \text{le tenseur des déformations homogénéisées,} \\ 0. \end{cases} \tag{4.4.15}$$

Introduisons maintenant l'enthalpie libre du milieu homogénéisé $W^{\star 0}$ et le potentiel de force Φ :

$$W^{\star 0} = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}^0 \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}^0 \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2}\left\langle \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma}^r \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}^r \right\rangle, \tag{4.4.16}$$

$$\Phi(\Sigma) = \Phi(\boldsymbol{\sigma}^0, \boldsymbol{\sigma}^r) = \left\langle \varphi(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{B} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^r(\boldsymbol{y})) \right\rangle. \tag{4.4.17}$$

Les lois d'état s'écrivent donc :

$$\boldsymbol{\epsilon}^e(\boldsymbol{u}^0) = \frac{\partial W^{\star 0}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}(\Sigma), \tag{4.4.18}$$

$$-\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial W^{\star 0}}{\partial \boldsymbol{\sigma}^r}(\Sigma), \tag{4.4.19}$$

et les lois complémentaires :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\boldsymbol{u}^0) = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}(\Sigma), \tag{4.4.20}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^r}(\Sigma). \tag{4.4.21}$$

On retrouve bien les principaux ingrédients de la structure de matériau standard généralisé mais cette structure s'applique à une infinité de variables internes. L'approche, qui a été exposée dans ce paragraphe, s'applique à tout type de milieux dissipatifs dont la déformation anélastique est régie par un potentiel de pseudo-dissipation. Nous verrons qu'elle s'applique par exemple aux milieux micro-fissurés de la même façon. En ce qui concerne la plasticité parfaite, la règle de normalité est bien conservée par changement d'échelle à condition d'introduire un nombre suffisant de variables internes. Ce résultat rend la théorie et en particulier le problème (4.4.12) presque inutilisable pour des applications pratiques.

Toutefois, nous essayons d'envisager, à la lumière des difficultés mises en évidence dans ce paragraphe, quelques alternatives pour l'homogénéisation des maçonneries en plasticité.

4.4.3.b Solutions envisageables

La première solution consiste à résoudre le problème (4.4.9) posé sur la cellule de base par voie numérique. Par exemple, on peut envisager une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis et résoudre le problème pour des trajets de chargements. Le nombre de variables internes est alors réduit aux valeurs des $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ aux points d'intégration de la méthode numérique. Pour une bonne précision, synonyme de maillage fin, l'écriture de la loi homogénéisée (4.4.12) n'est pas pour autant facilitée. Cependant, on voit qu'il est possible d'obtenir une réponse précise de la structure périodique à un trajet de chargement donné.

Dans le cadre de la plasticité associée, pour peu que le domaine de plasticité microscopique soit fermé et convexe, Suquet (1982) a démontré l'existence d'un domaine de plasticité macroscopique lui aussi convexe et fermé. A l'image du calcul des charges limites (*voir* Annexe A), ce domaine macroscopique est indépendant du trajet de chargement que l'on utilise pour l'atteindre. Il constitue donc une information indépendante de l'histoire des variables internes. Ce critère macroscopique, qui peut être obtenu par voie numérique en appliquant des trajets radiaux à contraintes imposées, fournit alors une information macroscopique indépendante de l'état des variables microscopiques.

Dans le cas particulier envisagé par Lopez *et al.* (1999), une autre voie pourrait être considérée. Le nombre de variables internes peut en effet être réduit si on arrive à montrer que la déformation anélastique est constante dans la cellule de base ou constante par morceaux (Suquet, 1982). Bien que les hypothèses soient assez discutables, en particulier en cisaillement, le modèle mécanique de la cellule de base choisi par Lopez *et al.* (1999) répond à ces exigences. On l'illustre pour la direction x sur la figure 4.9. Une méthode d'homogénéisation rigoureuse aurait donc pu être appliquée pour fournir une loi de comportement macroscopique.

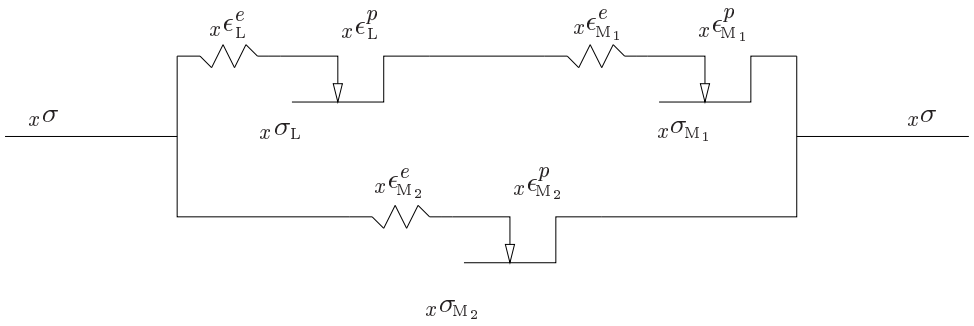


Figure 4.9 – *Modèle mécanique de la cellule de base dans la direction x, choisi par* Lopez *et al. (1999) permettant une réduction du nombre des variables internes plastiques.*

On peut alors supposer qu'en choisissant un critère de plasticité associée pour chaque déformation plastique de chaque phase, on puisse écrire des lois de plasticité macroscopiques avec un nombre raisonnable de variables.

Comme on l'a évoqué dans la partie précédente, dans le cadre du bi-couche, l'hypothèse qui consiste à considérer la déformation plastique homogène par phase est pleinement justifiée. Les

travaux dans ce cadre de Elomri & Sidoroff (1991) montrent que l'on peut aboutir à des résultats entièrement analytiques. Cependant, pour la géométrie considérée, cette approximation reste assez grossière.

Enfin, une troisième voie pourrait être développée en appliquant les méthodes dites de « Transformation Field Analysis (TFA) » de Dvorak (1992). L'idée de cette méthode est de considérer une déformation plastique par morceaux qui ne correspondent par forcément aux découpages des phases. Le nombre des variables internes du modèle est donc réduit au nombre de fonctions de forme choisies uniformes sur les domaines considérés. On imagine que, sur cette géométrie particulière proposée par Lopez *et al.* (1999), on puisse obtenir des bons résultats avec un minimum de sous-domaines.

Michel *et al.* (2000) proposent une autre voie qu'ils nomment « Nonuniform Transformation Field Analysis (NTFA) » qui ne considère plus des fonctions uniformes par domaine mais des fonctions non uniformes sur la cellule. Ces fonctions de forme sont choisies comme les modes de réponse de la cellule à des chargements caractéristiques. La réponse à un chargement quelconque se définit dont comme une combinaison linéaire de ces modes. Les résultats, mis en avant par Michel *et al.* (2000) sur des géométries proches de celles qui nous préoccupent, montrent un très bon accord avec les résultats de référence hétérogène et ceci, pour un nombre faible de modes considérés (trois dans la pratique).

4.5 Cas des maçonneries à constituants dissipatifs quasi-fragiles

4.5.1 Homogénéisation et endommagement dans les maçonneries

On considère une forme encore plus générale du problème d'homogénéisation périodique :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}[\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})], \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}), \\ \operatorname{div}_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \text{dans} \quad V(\boldsymbol{x}), \\ \langle \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \rangle = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})), \\ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{per}(V), \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{DP}(V), \end{cases} \tag{4.5.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}[\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})]$ représente de manière formelle la loi de comportement microscopique du matériau. Il important de remarquer que, indépendamment du comportement microscopique choisi, la procédure d'homogénéisation périodique respecte le principe de macro-homogénéité et est équivalente en contraintes ou en déformations.

Comme on l'a vu précédemment, Suquet (1982) a prouvé l'existence d'une solution $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u})$ unique en contraintes au problème (4.5.1) pour les comportements d'élasticité linéaire, de viscoélasticité linéaire et de plasticité parfaite. Pour les autres types de comportement, les résultats mathématiques sont rares.

Rien n'empêche pourtant d'essayer de résoudre le problème (4.5.1) (en général de manière numérique) pour différents trajets de chargement avec pour objectif d'enregistrer la réponse

macroscopique reliant $\boldsymbol{\sigma}^0$ et $\boldsymbol{\epsilon}^0$. Dans la suite, nous allons présenter des tentatives numériques de répondre à ce problème.

Un modèle d'endommagement continu et l'homogénéisation périodique. Pegon & Anthoine (1997) tente d'appliquer ce principe dans le cadre de l'endommagement continu des matériaux quasi-fragiles. Le modèle d'endommagement choisi est le modèle de Mazars (1984, 1986). Ce modèle est un modèle d'endommagement fragile continu introduisant clairement une dissymétrie entre le comportement en traction et le comportement en compression. Ce modèle initialement dédié au béton est adapté au mortier et aux éléments de maçonneries. Il est donné par le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = (1-d)\boldsymbol{C} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\epsilon}, \quad 0 \leq d = d(\gamma\tilde{\epsilon}) \leq 1, \\ \tilde{\epsilon} = \sqrt{\sum_i ((\boldsymbol{\epsilon}_i)^+)^2}, \\ \gamma = -\dfrac{1}{\sum_i ((\boldsymbol{\sigma}_i)^-)} \sqrt{\sum_i ((\boldsymbol{\sigma}_i)^-)^2}, \end{cases} \tag{4.5.2}$$

où $(\boldsymbol{\epsilon}_i)^+$ (resp.$(\boldsymbol{\sigma}_i)^-$)) est la partie positive (resp. négative) de la $i$ème déformation (resp. contrainte) principale. L'évolution de la variable d'endommagement d est donnée par :

$$d = \alpha_t^\beta d_t + \alpha_c^\beta d_c, \quad \dot{d} > 0, \quad \alpha_t + \alpha_c = 1, \tag{4.5.3}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \gamma\tilde{\epsilon} \leq \epsilon_{d0} \Rightarrow D_a = 0, \quad a \in \{c, t\}, \\ \gamma\tilde{\epsilon} > \epsilon_{d0} \Rightarrow D_a = 1 - \dfrac{\epsilon_{d0}(1-A_a)}{\gamma\tilde{\epsilon}} - A_a \exp[B_a(\epsilon_{d0} - \gamma\tilde{\epsilon})], \end{cases} \tag{4.5.4}$$

où A_t, B_t, A_c, B_c sont des paramètres matériaux relatifs a l'endommagement en traction et en compression. Le coefficient α_t caractérise la tension (rapport entre la norme des déformations positives dues à des contraintes positives et $\tilde{\epsilon}$) :

$$\alpha_= \frac{\sum_i ((\boldsymbol{\epsilon}_i)^+ (\boldsymbol{\epsilon}_i)^{++})}{\sum_i ((\boldsymbol{\epsilon}_i)^+)^2}, \quad \text{avec } (\boldsymbol{\epsilon}_i)^{++} = \left((1-d)^{-1}\boldsymbol{C}^{-1} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}^+\right)^+. \tag{4.5.5}$$

Comme tout modèle adoucissant, le modèle de Mazars souffre des maux relatifs à la perte d'objectivité des réponses numériques (cf. § 2.6). L'introduction d'un limiteur de localisation de type intégrale permet de redonner au problème son objectivité. Pour cette application, la forme intégrale suivante est choisie[7] :

$$\langle \tilde{\epsilon}(\boldsymbol{x}) \rangle_\Omega = \frac{\displaystyle\int_\Omega \alpha(|\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{x}}|)\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}}{\displaystyle\int_\Omega \alpha(|\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{x}}|)d\boldsymbol{x}}, \tag{4.5.6}$$

7. L'intégration est réalisée sur tout le volume et non sur la cellule de base.

où α est une distribution de Gauss :

$$\alpha(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|) = \exp - \left(\frac{2|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}{l_c} \right)^2 . \tag{4.5.7}$$

La longueur l_c caractérise la taille de la plus petite région sur laquelle l'endommagement peut se localiser. Pegon & Anthoine (1997) précisent deux voies possibles pour l'estimation de cette longueur :

1. la longueur l_c peut être considérée comme une nouvelle caractéristique matérielle qui peut être déterminée par des essais expérimentaux en mesurant la taille caractéristique des zones, où l'endommagement est localisé. Le maillage est alors adapté pour que la taille caractéristique des éléments soit inférieure à l_c. Comme nous l'avons rappelé précédemment, Mazars (1990) fournit une estimation de l_c pour les bétons en la reliant à la taille des hétérogénéités.
2. la longueur l_c n'est pas connue ou alors trop petite pour adapter le maillage de manière raisonnable. Dans ce cas, on introduit cette longueur comme un paramètre purement numérique. Le problème numérique se retrouve alors correctement posé mais les résultats dépendent de la valeur choisie pour l_c. On modifie alors les paramètres de la loi de comportement en rendant explicite leur dépendance à l_c. Cette opération peut par exemple être réalisée en imposant que l'énergie de rupture reste constante sur un volume donné. (cf. § 2.3, travaux de Lourenço *et al.* (1997).)

Pegon & Anthoine (1997) optent pour la deuxième stratégie mais ne donnent pas de comparaison entre l_c et la taille caractéristique du volume élémentaire représentatif $V(\boldsymbol{x})$. Ces renseignements auraient pu être intéressants pour deux raisons. D'une part, cette longueur peut être reliée à la taille des hétérogénéités et l'on pense en particulier à l'épaisseur des joints, en considérant que l'endommagement se localise par exemple sur toute l'épaisseur du joint. D'autre part, l'emploi de deux échelles microscopiques décrivant, pour la première la géométrie de hétérogénéités et pour l'autre la taille caractéristique des zones endommagées, n'est peut être pas trivial. On peut, en effet, se poser des questions lorsque ces effets non-locaux dépassent le cadre de la cellule de base.

Cependant, les auteurs examinent en profondeur les aspects numériques de la résolution des problèmes en présence de comportement adoucissant. L'introduction d'une loi de comportement non-locale modifie, de façon sensible les procédures associées aux problèmes non-linéaires usuels.

Tout d'abord, la matrice de rigidité tangente entrant dans la composition de la matrice des itérations du schéma incrémental n'est plus symétrique. La dépendance de la valeur de l'endommagement d en un point de Gauss par rapport aux valeurs de $\tilde{\epsilon}$ aux points voisins introduit des relations qui brisent les symétries de la matrice tangente. De plus, la notion de matrice de rigidité élémentaire se revèle être obsolète. L'algorithme de résolution doit alors prendre en compte des matrices très creuses dans une procédure d'assemblage sensiblement différente. D'autre part, la convergence quadratique d'un schéma usuel comme l'algorithme de Newton-Raphson n'est plus constatée avec un modèle d'endommagement fortement adoucissant.

Pegon & Anthoine (1997) proposent une méthode incrémentale sophistiquée pour surmonter ces problèmes. De manière à éviter des évaluations trop nombreuses de la matrice tangente constante de Newton-Raphson, ils utilisent une approche sécante. La matrice est actualisée uniquement en début de pas de temps et est gardée constante durant les itérations. Le taux de convergence de la méthode est accélérée par une méthode de recherche de direction[8]. Dans le cas de modèle de comportement comportant un fort adoucissement, un contrôle standard en force ou en déplacement s'avère inadéquat. C'est pourquoi les auteurs étendent la méthode développée à un contrôle en longueur d'arc (Riks, 1979). La mesure de la longueur d'arc usuelle, basée sur une norme en déplacement est délaissée pour une norme sur le taux de déformation. Cette nouvelle norme paraît en effet plus adaptée aux problèmes générant de la localisation de la déformation.

Un modèle d'endommagement brutal Pour terminer cette partie, évoquons brièvement les travaux de Luciano & Sacco (1997, 1998). Ces auteurs proposent une extension des travaux de Francfort & Marigo (1993) en considérant un modèle élastique fragile pour une cellule de base identique à celle illustrée sur la figure 4.1.

Pour chaque segment de joint, ils considèrent que le matériau est soit sain soit rompue et confèrent ainsi une valeur binaire à chaque joint représentant son état. En analysant, heuristiquement, comment l'endommagement peut se propager dans la cellule, ils déduisent les lois d'évolution mécaniquement acceptables pour cette cinématique. En postulant une surface seuil contrôlant l'évolution de l'endommagement, ils mettent alors en évidence, grâce à des essais numériques de chargements radiaux, une surface de rupture macroscopique.

4.5.2 Milieux microfissurés pour l'endommagement et la rupture des matériaux quasi-fragiles

Les travaux s'appuyant sur une analyse multi-échelle des matériaux quasi-fragiles sont nombreux. Cependant, le passage entre l'échelle microscopique et macroscopique n'est pas toujours clairement identifié et effectué avec rigueur ; il est effectué, le plus souvent, au moyen de méthodes heuristiques difficiles à comparer entre elles.

Parmi les travaux où les techniques d'homogénéisation sont employées en toute rigueur dans le cadre de l'homogénéisation périodique, nous pouvons citer les travaux de Suquet (1982, 1985a) ; Marigo *et al.* (1987) concernant les milieux micro-perforés et de Andrieux *et al.* (1986) pour les milieux micro-fissurés. Nous donnons un exemple de construction de lois de comportement pour les matériaux quasi-fragiles s'appuyant sur ces principes.

4.5.2.a Application de la théorie de l'homogénéisation aux milieux micro-fissurés.

Dans les travaux de Andrieux *et al.* (1986), les auteurs considèrent une fissure γ rectiligne de longueur $2a$ orientée par la normale $\boldsymbol{n}$ plongée dans un volume élémentaire représentatif

8. Pour une présentation détaillée des méthodes incrémentales, on renvoie le lecteur à l'ouvrage de Crisfield (1991,1997).

carré de coté l constitué d'un matériau homogène élastique isotrope. La cellule est illustrée à la figure 4.10.

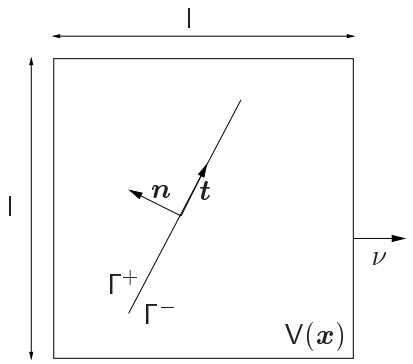


FIGURE 4.10 – *Cellule de base affaiblie par une fissure*

Ils considèrent, dans un premier temps que le saut de déplacement sur les lèvres de la fissure respecte les conditions de SIGNORINI, soit :

$$\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}.\boldsymbol{n} \leq 0, \quad [\boldsymbol{u}].\boldsymbol{n} \geq 0, \quad (\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}.\boldsymbol{n})([\boldsymbol{u}].\boldsymbol{n}) = 0. \tag{4.5.8}$$

En utilisant la méthode des modules effectifs, ou si l'on préfère, de HILL-MANDEL en contraintes, et en remarquant que la contrainte normale est continue à l'interface, ils déduisent les relations qui prolongent les notions de contraintes et les déformations macroscopiques pour un milieu perforé :

$$\boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \rangle = \frac{1}{V(\boldsymbol{x})} \int_{V(\boldsymbol{x}) \setminus \Gamma} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}, \tag{4.5.9}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^0(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{V(\boldsymbol{x})} \int_{\partial V(\boldsymbol{x})} (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \otimes \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_S\, d\boldsymbol{y}, \tag{4.5.10}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale sortante à $V(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{u}$ est le champ de déplacement dans le volume $V(\boldsymbol{x})$. Les grandeurs macroscopiques prennent en compte sans les séparer les déformations élastiques de la matrice et les déformations dues au saut de déplacement sur la fissure.

Si l'on considère maintenant un mécanisme dissipatif sur les lèvres de la fissure représenté par le frottement de COULOMB, l'écriture d'une loi de comportement homogène ne peut se faire sans une approximation qui peut permettre la réduction du nombre des variables internes. En effet, le champ de déplacements tangentiels sur les lèvres de la fissure constitue le champ de variables internes décrivant l'état mécanique du système. Pour effectuer cette réduction, ANDRIEUX *et al.* (1986) considèrent que la fissure est de petite taille par rapport au volume, soit $2a \lll l$. Ils utilisent la solution élémentaire d'une fissure en milieu infini, soit :

$$u_{\mathrm{N}} = K_{\mathrm{N}} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad u_{\mathrm{T}} = K_{\mathrm{T}} \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{4.5.11}$$

Cette hypothèse permet de réduire le nombre de variables internes à deux grandeurs α et β caractérisant les sauts de déplacements normaux et tangentiels à la fissure.

En considérant que le déplacement $\boldsymbol{u}$, généré par la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\sigma}^0$, peut être trouvé comme la superposition d'un déplacement élastique du matériau sain $\boldsymbol{u}^e$ et d'un déplacement provoqué par les discontinuités à la fissure $\boldsymbol{u}_f$, les relations suivantes peuvent être établies :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^0 &= (\boldsymbol{\epsilon}^0)^e + (\boldsymbol{\epsilon}^0)^f, & \langle \boldsymbol{\epsilon}^f \rangle &= 0, & \langle \boldsymbol{\epsilon}^e \rangle &= (\boldsymbol{\epsilon}^0)^e, \\ \boldsymbol{\sigma}^0 &= (\boldsymbol{\sigma}^0)^e + (\boldsymbol{\sigma}^0)^f, & \langle \boldsymbol{\sigma}^f \rangle &= 0, & (\boldsymbol{\sigma}^0)^e &= \langle \boldsymbol{\sigma}^e \rangle = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\epsilon}^0)^e, \\ (\boldsymbol{\epsilon}^0)^f &= \alpha(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{t})_S + \beta(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}), & \alpha &= \frac{1}{V(\boldsymbol{x})}\textstyle\int_{\Gamma^+}[u_{\mathrm{T}}]\,d\boldsymbol{y}, & \beta &= \frac{1}{V(\boldsymbol{x})}\displaystyle\int_{\Gamma^+}[u_{\mathrm{N}}]\,d\boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

Maintenant que l'état mécanique du matériau est complètement défini par la donnée d'un déformation macroscopique, $\boldsymbol{\epsilon}^0$ et des deux variables internes α et β, (ou de manière équivalente $(\boldsymbol{\epsilon}^0)^f$), Andrieux *et al.* (1986) proposent d'écrire deux types de lois de comportement contrôlant l'évolution. Il serait trop long ici de les décrire en détail, mais nous donnerons tout de même leurs principales caractéristiques :

– *Modèle à fissuration constante* Grâce à la décomposition de la déformation, une forme naturelle pour l'énergie peut être déduite :

$$W(\boldsymbol{\epsilon}^0,(\boldsymbol{\epsilon}^0)^f) = \frac{1}{2}\boldsymbol{C}\,\bar{\bar{\otimes}}\,(\boldsymbol{\epsilon}^0-(\boldsymbol{\epsilon}^0)^f)\,\bar{\bar{\otimes}}\,(\boldsymbol{\epsilon}^0-(\boldsymbol{\epsilon}^0)^f) + \frac{1}{2}K\mathbb{1}\,\bar{\bar{\otimes}}\,(\boldsymbol{\epsilon}^0)^f\,\bar{\bar{\otimes}}\,(\boldsymbol{\epsilon}^0)^f, \tag{4.5.13}$$

où K est une constante qui est exprimeée, élémentairement, en fonction de la densité de fissuration $d = 4a^2/l^2$. Il est intéressant de remarquer, ce qui avait été déjà évoqué au § 4.4.3.a, que l'énergie libre se divise en une partie élastique classique et une partie qui correspond à l'énergie bloquée sous forme de contraintes résiduelles $(\boldsymbol{\sigma}^0)^f$ auto-équilibrées. Les lois complémentaires se déduisent de l'étude du comportement de la fissure en fonction de la déformation macroscopique $\boldsymbol{\epsilon}^0$. Le critère de fissure ouverte donne le domaine où l'évolution est réversible. On obtient alors :

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{K}(\boldsymbol{T}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0), \quad \text{avec } \boldsymbol{T} = \boldsymbol{C}\,\bar{\bar{\otimes}}\,(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{t})_S \tag{4.5.14}$$

$$\dot{\beta} = \frac{1}{K}(\boldsymbol{N}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0), \quad \text{avec } \boldsymbol{N} = \boldsymbol{C}\,\bar{\bar{\otimes}}\,(\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}) \tag{4.5.15}$$

Lorsque le critère indique que la fissure est fermée, le matériau suit un loi élasto-plastique non standard du fait du frottement de Coulomb. La fonction seuil de glissement s'exprime alors par :

$$fc(\boldsymbol{\epsilon}^0,\alpha) = (\boldsymbol{T}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{\epsilon}^0 + \mu\,\boldsymbol{N}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{\epsilon}^0 - K\alpha)(\boldsymbol{T}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{\epsilon}^0 - \mu\,\boldsymbol{N}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{\epsilon}^0 - K\alpha) \tag{4.5.16}$$

et la loi d'écoulement plastique par :

$$\begin{cases} (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0)^f = 0, & \text{si } fc(\boldsymbol{\epsilon}^0,\alpha) < 0 \\ (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0)^f = \dfrac{\theta}{K}[\theta(\boldsymbol{T}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0 + \mu\boldsymbol{N}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^0)](\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{t})_S, & \text{si } fc(\boldsymbol{\epsilon}^0,\alpha) = 0 \end{cases} \tag{4.5.17}$$

où $\theta = \pm 1$ suivant le sens de glissement. Il est intéressant de noter que l'énergie d'autocontrainte emmagasinée dans la fissure provoque un écrouissage cinématique proportionnel au glissement α.

– *Modèle d'endommagement par microfissuration* Pour prendre en compte l'évolution de la microfissuration, la densité de fissuration d est ajoutée comme variable d'état. Un modèle d'endommagement scalaire est alors construit en suivant le cadre général proposé par Marigo (1981). On obtient alors un modèle capable de prendre en compte les deux sources principales des phénomènes dissipatifs dans les géomatériaux, que sont l'endommagement scalaire et la plasticité non associée.

Commentaires et applications aux maçonneries Ces modélisations permettent, avec un faible nombre de paramètres, de rendre compte de manière quantitative, du comportement des géomatériaux quasi-fragiles jusqu'à la propagation stable des fissures comprise (asymétrie traction compression, phase de serrage, hystérésis en début de charge élastique, déformation résiduelle sous confinement). Pour la propagation instable, les résultats sont simplement qualitatifs. On comprend, en effet, qu'à partir d'un certain niveau de chargement, la plasticité de la matrice et l'interaction entre les microfissures ne peuvent plus être négligées. Nous verrons, dans la suite, comment des méthodes, plus heuristiques, peuvent répondre à ces deux questions.

Il n'existe pas, à notre connaissance d'application rigoureuse de ces méthodes aux maçonneries. Dans le cas de maçonnerie de blocage, ou comme le font remarquer Lotfi & Shing (1991) pour des maçonneries chaînées et renforcées, leur application pourrait être fructueuse et pourrait contribuer à surmonter les difficultés rencontrées par ces auteurs (voir § 2.5.1).

Pour les appareils réguliers, il est clair que l'interaction entre les fissures, que l'on considérera schématiquement comme étant localisées dans les joints, est grande. Peut-être serait-il tout de même intéressant de reprendre ces méthodes dans le cadre de l'homogénéisation périodique mais en conservant une cinématique réduite dans les joints ? Ce travail prolongerait alors celui de de Buhan & De Felice (1997) vers l'obtention de lois de comportement. Nous verrons, dans la suite, que Alpa & Monetto (1994) ont développé des modèles dans cet esprit mais avec des méthodes où les passages micro-macro ne sont pas clairement identifiés.

4.5.2.b Méthodes auto-cohérentes pour les milieux micro-fissurés

Nous avons déjà cité les travaux précurseurs de Budiansky & O'Connell (1976) concernant les milieux microfissurés. Ils considèrent que les caractéristiques du matériau peuvent être approchées au moyen des méthodes auto-cohérentes et de la résolution du problème d'inclusion d'Eshelby (1957). Ils obtiennent alors un comportement homogénéisé dans l'hypothèse que les fissures sont aléatoirement distribuées, faiblement concentrées et qu'elles ne se propagent pas. Si la procédure tient compte de l'interaction entre les micro-fissures, elle ne prend par contre pas en compte leur refermeture et, par conséquent, le frottement à l'interface.

Kachanov (1982a,b) propose de tenir compte de la refermeture des fissures et du frottement éventuel qui peut se produire sur leurs lèvres. Il obtient alors une loi de comportement proche de celle déduite rigoureusement par Andrieux *et al.* (1986). Par contre, ces travaux ne tiennent pas compte de l'interaction et de la croissance des fissures. Horii & Nemat-Nasser (1983)

étendent les travaux de KACHANOV pour tenir compte de l'interaction des fissures sur la base des idées de BUDIANSKY & O'CONNELL (1976).

KACHANOV (1992) signale, à propos de ces méthodes où l'interaction des fissures est prise en compte par des schémas auto-cohérents de type (HILL, 1965b), qu'il viole, comme c'est le cas pour les milieux élastoplastiques, des bornes rigoureuses, établies au moyen de principes variationnels. Depuis ces remarques, de nombreux travaux ont essayé de mettre au point de nouvelles méthodes respectant ces bornes. Citons, seulement, les plus récents (WANG *et al.*, 2000 ; SHEN & YI, 2000).

4.5.2.c Application de l'homogénéisation des milieux micro-fissurés aux maçonneries.

Une des rares applications de ces méthodes aux maçonneries a été réalisée par ALPA & MONETTO (1994). Ces auteurs considèrent que le comportement macroscopique des maçonneries est le fruit de trois phénomènes dissipatifs microscopiques distincts. Pour cela, ils expriment la déformation macroscopique $\boldsymbol{\epsilon}^0$ sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon}^0 = \boldsymbol{C}^{-1} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{V(\boldsymbol{x})} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_i^f} ([\boldsymbol{u}] \otimes \boldsymbol{n}_i)_S \, d\boldsymbol{y} + \frac{1}{V(\boldsymbol{x})} \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_i^m} ([\boldsymbol{u}] \otimes \boldsymbol{n}_j)_S \, d\boldsymbol{y} \tag{4.5.18}$$

où Γ_i^f sont les lieux géométriques des N micro-fissures orientées par $\boldsymbol{n}_i$ présentes dans le volume représentatif $V(\boldsymbol{x})$ et, Γ_i^m sont les lieux géométriques des M joints de mortier présents dans le volume $V(\boldsymbol{x})$. Le tenseur, $\boldsymbol{C}$, est naturellement le tenseur des rigidités élastiques du matériau sain.

L'équation générale de la déformation est alors spécialisée pour une maçonnerie régulière de joints vifs, représentée à la figure 4.11. Elle conduit à la formulation suivante :

$$\boldsymbol{\epsilon}^0 = \boldsymbol{C}^{-1} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{\sigma}^0 + \sum_{i=1}^{N} ([\boldsymbol{u}]^* \otimes \boldsymbol{n}_i)_S + \frac{1}{a}([\bar{\boldsymbol{u}}_x] \otimes \boldsymbol{e}_x)_S + \frac{1}{b}([\bar{\boldsymbol{u}}_y] \otimes \boldsymbol{e}_y)_S, \quad \text{où } [\boldsymbol{u}]^* = \int_{\Gamma_i^f} [\boldsymbol{u}] \, d\boldsymbol{y} \tag{4.5.19}$$

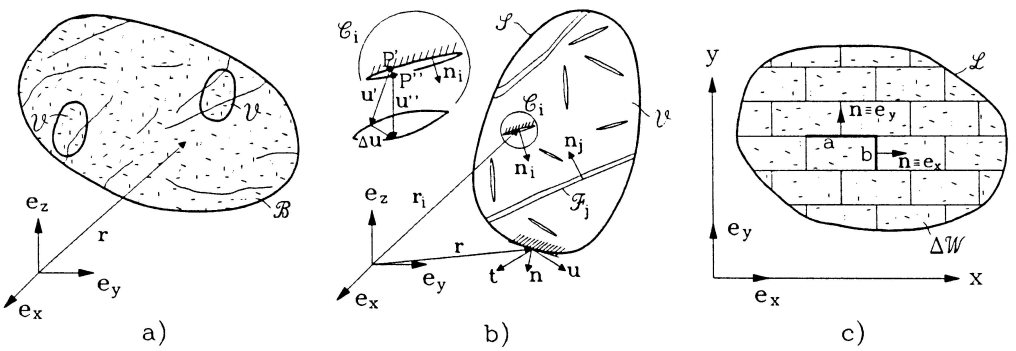


FIG. 1. (a) Small portions $\mathcal{V}$ of a body $\mathcal{B}$ containing microcracks and parts of large flaws ; (b) displacement jumps at microcracks and flaws ; (c) portion $\Delta\mathcal{W}$ of a masonry wall.

FIGURE 4.11 – *Plusieurs échelles de fissuration, d'après (*ALPA & MONETTO, *1994)*

Si l'on se réfère aux travaux d'Andrieux *et al.* (1986), on pourrait interpréter cette approximation par le choix d'un volume élémentaire représentatif correspondant à un élément de la maçonnerie. Sur les frontières de cet élément, on suppose que l'on impose les déplacements moyens $[\bar{\boldsymbol{u}}_x]$ et $[\bar{\boldsymbol{u}}_y]$ constants par faces et que dans le volume, N fissures sont présentes associées aux champs de sauts de déplacements moyens $[\boldsymbol{u}]^*$.

Le terme correspondant aux microfissures présentes dans les éléments est exprimé grâce à une extension des travaux de Horii & Nemat-Nasser (1983) pour des cas de chargements tridimensionnels. Ceci constitue le premier phénomène dissipatif modélisé dans les éléments.

Pour les autres termes, modélisant les phénomènes dissipatifs dans les joints, deux mécanismes sont considérés.

Le premier correspond à un écoulement plastique limité, illustré à la figure 4.12. Il est pris en compte en modélisant la maçonnerie comme un milieu élastique micro-fissuré affaibli par un double réseau de joints verticaux périodiques. La technique utilisée est similaire à celle employée par Andrieux *et al.* (1986) à ceci prés qu'un facteur d'amplification des sauts de déplacements est ajouté pour tenir compte des joints horizontaux. Ce nouveau paramètre est considéré comme étant significatif du matériau et par là facile à mesurer expérimentalement.

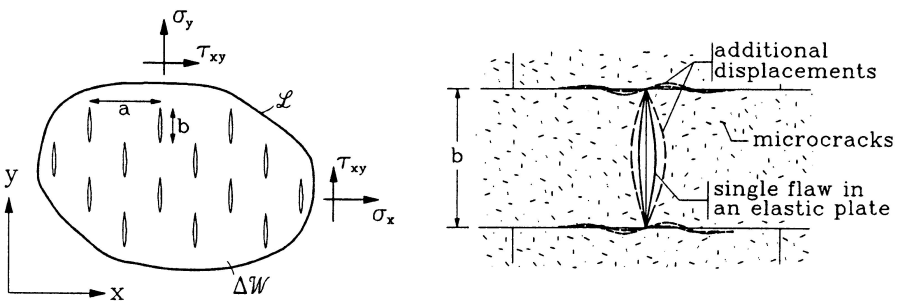


Fig. 4. (a) Doubly periodic array of flaws simulating the staggered joints; (b) additional displacements due to microcracks and to aligned joints.

Figure 4.12 – *d'après (*Alpa & Monetto*, 1994)*

Le second mécanisme correspond à un écoulement plastique illimité qui met en jeu plusieurs joints à la fois horizontaux et verticaux. Quatre mécanismes d'écoulement sont étudiés ; ils sont illustrés à la figure 4.13. Le premier correspond à un mécanisme d'ouverture pur des joints horizontaux et le second à un mécanisme de glissement pur. Pour les derniers, on mêle l'ouverture d'un réseau de joints donnés au glissement du réseau orthogonal.

Chacun de ces mécanismes est analysé de façon à part entière et fournit une surface de plasticité macroscopique à la manière dont Andrieux *et al.* (1986) et de Buhan & De Felice (1997) opèrent. Ils donnent enfin l'évolution globale de la maçonnerie en considérant les différents potentiels. Si les résultats obtenus sont très élégants et semblent concorder avec des résultats à la fois expérimentaux et analytiques, il est dur de juger de leur valeur par rapport à des techniques

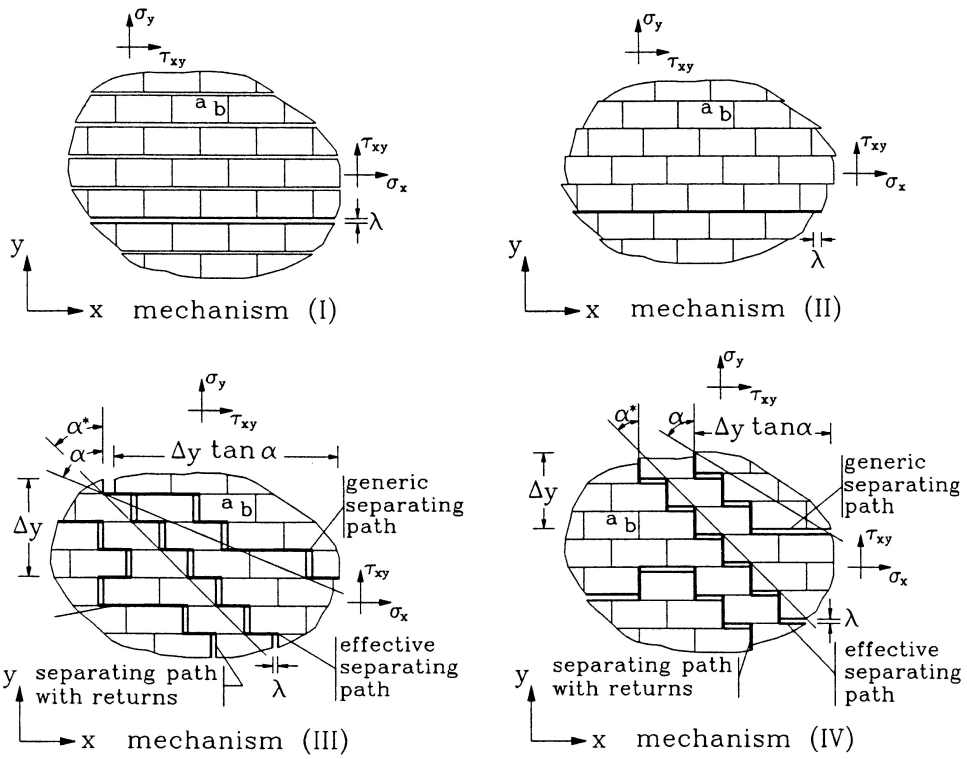


FIG. 5. Fundamental mechanisms of uncontained flow.

FIGURE 4.13 – *d'après* (ALPA & MONETTO, *1994*)

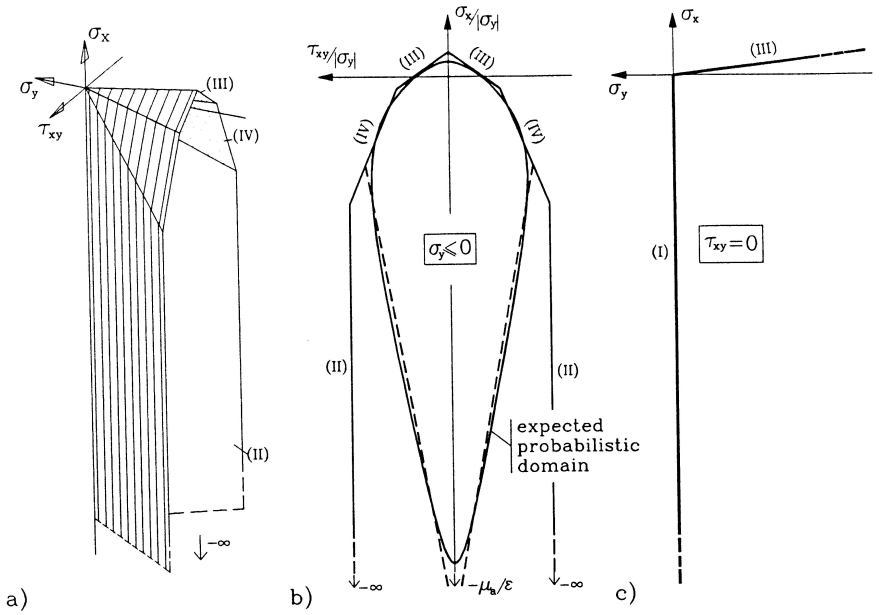


FIG. 6. Piecewise linear limiting surface of local possible equilibrium for $a/b = 0.5$ and $\mu = 0.5$: (a) in the space of the stress state components σ_x, σ_y, τ_{xy}; (b) on a plane σ_y = constant; (c) on the plane $\tau_{xy} = 0$.

FIGURE 4.14 – *d'après* (ALPA & MONETTO, *1994*)

d'homogénéisation classiques.

4.6 Conclusion sur l'homogénéisation des maçonneries

Les conclusions sur l'application des méthodes d'homogénéisation des maçonneries peuvent se scinder en deux groupes :

- Pour le blocage, ou les appareils très irréguliers, les méthodes de bornes peuvent très bien fonctionner. Le matériau profite, en effet d'une isotropie relative qui permet de réaliser de bonnes approximations de son comportement, aussi bien dans un cadre linéaire que non linéaire. Les méthodes d'homogénéisation des milieux micro-fissurés peuvent aussi fournir de bons résultats sur ces matériaux.
- Pour les appareils réguliers, l'estimation d'un matériau homogène équivalent dans un cadre élastique linéaire est aujourd'hui maîtrisée. Dans un cadre non linéaire, le problème est encore d'actualité. Les comportements mis en jeu rendent difficiles les démarches d'homogénéisation. Cependant lorsque la maçonnerie est considérée comme un milieu micro-fissuré — En est-ce vraiment un ? —, les approches propres aux matériaux quasi-fragiles semblent offrir des perspectives intéressantes.

D'une manière générale, dans un cadre non linéaire, les méthodes qui ont été utilisées sont souvent approximatives et mal justifiées. Il semble qu'un gros effort soit encore à faire pour obtenir des matériaux homogénéisés satisfaisants. On a donné quelques alternatives possibles pour l'homogénéisation des maçonneries à constituants dissipatifs. Les nouvelles bornes qui ont été dégagées ces dernières années par les spécialistes du domaine pourraient fournir de meilleures approximations. De nombreux travaux sur les maçonneries s'efforcent de promulguer des lois homogénéisées analytiques pour les maçonneries. Il semble aujourd'hui que des méthodes numériques plus rigoureuses aient fait leur preuve. Ces alternatives n'ont pas été explorées plus avant dans ce travail faute de temps. Il est pourtant sûr qu'elles auraient fait un sujet de recherche consistant.

Enfin, une conclusion plus générale quant à l'application de l'homogénéisation aux maçonneries est la suivante. Comme nous déjà souligné à plusieurs reprises, le caractère adoucissant et non associé des lois de comportements des maçonneries fait apparaître de nombreux problèmes liés à la localisation de la déformation. Ce phénomène de localisation est t-il vraiment compatible avec la notion de matériau homogène équivalent ? Il y a tout lieu de penser que non, et que la recherche d'un tel matériau est vaine dès lors que des processus de localisation entrent en jeu.

Conclusions et perspectives

Sans rappeler en détail les conclusions des chapitres précédents, il nous semble tout de même bon, pour conclure cette première partie, de donner les principaux enseignements que nous pouvons tirer de ce tour d'horizon des modélisations des maçonneries :

- Deux comportements principaux, intimement couplés, sont attribués aux maçonneries.
  - Le premier de ces comportements est un endommagement fragile plus ou moins progressif. Pour les joints vifs ou les joints de mortier anciens, cet endommagement se traduit par une rupture fragile des joints qui ont une faible tenue à la traction. Pour les joints traditionnels, la cohésion élastique du matériau sain est dégradé plus progressivement dans une phase de propagation stable des microfissures. Dans une seconde phase, la propagation devient instable et conduisant à la rupture.
  - Le second comportement est une plasticité non associée. Elle est bien représentée par un frottement de Coulomb pour les joints vifs et les mortier anciens. Pour les mortiers cohésifs, une résistance supplémentaire au seuil de frottement doit être prise en compte ainsi qu'une éventuelle dilatance.
- La localisation de la déformation, ou tout sa concentration, est la principale conséquence du caractère adoucissant et non associé des deux comportements qui viennent d'être cités. Elle se produit principalement dans les joints qui ont d'une manière générale une tenue mécanique plus faible. Elle conduit rapidement à des phénomènes de rupture, ou si l'on préfère de séparation de la matière, qui remettent en cause le caractère continu du matériau.
- Le caractère fortement hétérogène des maçonneries, ainsi que la structure microscopique, anisotrope voire cristalline est le dernier point qui caractérise les maçonneries. Il se traduit par une forte anisotropie et influe grandement sur le comportement non linéaire macroscopique.

Nous avons vu dans le chapitre 2 que les modélisations macroscopiques des maçonneries peinent à prendre en compte les phénomènes liés à la localisation ainsi que le caractère hétérogène et cristallin des maçonneries. Les modélisations micromécaniques, présentées au chapitre 3 s'attachent quant à elles à décrire explicitement les hétérogénéités et leurs structures explicitement. Toutefois, lorsque l'accent st mis sur la rupture et l'aspect discret des structures maçonnées fissurées, cela se fait, le plus souvent au prix d'une simplification drastique des comportements. Un second inconvénient majeur d'une modélisation micromécanique discret est son coût. En effet, une description géométrique et mécanique des édifices monumentaux, élément par élément,

est rapidement prohibitive. Pour cela, les modélisations présentées au chapitre 4 s'appuient sur une analyse multi-échelle afin de fournir un matériau homogène équivalent basé sur des considérations micromécaniques fortes. Si ces méthodes arrivent à décrire le comportement linéaire des maçonneries et, non sans quelques difficultés, le comportement « faiblement » non linéaire, elles buttent sur les phénomènes de localisation conduisant à la rupture.

Une voie raisonnable consiste à envisager un découpage des structures suivant la sollicitation mécanique qu'elles subissent. Pour les parties faiblement sollicitées, l'emploi de méthodes d'homogénéisation performantes semble être la solution. Pour les parties fortement sollicitées, un modèle micromécanique discret semble plus adapté à traiter les phénomènes de rupture et de ruine. Ce découpage peut être le fruit de l'oeil expert d'un ingénieur mais il peut aussi être inhérent à la méthode de modélisation choisie. Dans cet esprit, l'application de la méthode de « Quasi-continnum » initiée par TADMOR *et al.* (1996a,b) pourrait fournir une solution très prometteuse.

Sur ces enseignements, le travail exposé dans la seconde partie cherchera à construire un modèle micromécanique discret laissant pour le moment les aspects « analyse multi-échelle ». Ce modèle se concentrera sur les points suivants :

- La formulation de modèles d'interfaces, basés sur la condition de SIGNORINI et le frottement de COULOMB, et enrichie par la prise en compte de la cohésion et de son caractère endommageable. Nous avons, en effet, noté que l'ensemble des modèles d'interfaces était basés sur des lois de comportements élasto-plastiques.
- La prise en compte et la maîtrise du caractère unilatéral des interfaces. Cet aspect du comportement des joints induit, en effet, de nombreux problèmes quant à la régularité des solutions. Le problème est souvent contourné en, régularisant les lois ; nous essaierons de l'aborder de front.
- L'acquisition des données aussi bien géométriques que matérielles. Cet aspect est peu discuté dans les travaux de modélisation. Les structures envisagées sont le plus souvent très simples. Une représentation, géométrique et mécanique correcte des maçonneries, ou plus généralement des structures maçonnées, est pourtant indispensable.

Deuxième partie

Une modélisation micromécanique discrète des maçonneries

Préambule

Cette partie est consacrée à la formulation et à la résolution numérique d'un modèle micromécanique discret dédié aux structures en appareillage de blocs. Le choix d'une nouvelle modélisation de ce type est motivé par les considérations suivantes :

- La prise en compte du caractère hétérogène des maçonneries semble indispensable. Comme nous l'avons dit tout au long de la première partie, la microstructure des appareils joue un rôle prépondérant dans leur réponse mécanique globale.
- Les appareils de joints vifs, ainsi que les mortiers anciens, ont une très faible tenue à la traction. Les phénomènes inélastiques concentrés, en première analyse, dans le joint conduisent irrémédiablement à la formation de fissures. L'aspect discret de la modélisation, ou si l'on préfère, discontinu, permet de représenter la séparation de la matière qu'impliquent ces ruptures. Une représentation discrète est indissociable de la notion même de matériau divisé.
- Les appareils de joints de mortier jouissent d'une cohésion supplémentaire, qui modifie le comportement réversible du matériau sain — résistance à la traction, flexibilité, *etc*... Deux phénomènes inélastiques caractérisent la réponse inélastique de l'appareil. Il s'agit de la plasticité non associée et l'endommagement fragile. Ils conduisent à la localisation de la déformation dans les joints impliquant, à terme, la rupture de la matière. Après la phase de dégradation du matériau, l'aspect discret est une nouvelle fois à prendre en compte.

Ce travail s'est articulé en deux phases : une première phase de modélisation — représentation et formulation du modèle —, et une phase de résolution — discrétisation et application.

L'aspect discret implique une représentation des maçonneries comme une collection de corps interconnectés par des liaisons. Nous considérerons que le joint est d'épaisseur faible devant les éléments. Les liaisons, qui matérialiseront les joints d'un point de vue mécanique, relieront les éléments traités comme des corps rigides ou déformables.

La formulation du modèle empruntera des concepts issus à la fois de la Mécanique des Milieux Continus et de la Mécanique Rationnelle. Sans tenter d'homogénéiser les approches, elle essaiera simplement de s'inspirer de notions fondamentales comme la Thermodynamique des Processus Irréversibles pour l'écriture des lois de comportement, ou la Mécanique Analytique des liaisons unilatérales, ntions, pour lesquelles l'Analyse Convexe joue une rôle essentiel.

Entrons dans le détail des comportements, qui vont être formulés et résolus :

- Le comportement basique des liaisons rend compte du caractère unilatéral des joints par la condition de SIGNORINI — impénétrabilité de la matière, résistance nulle à la traction—, et du frottement de COULOMB. Ces deux lois sont non régulières. Elles impliquent sur les grandeurs cinématiques telle que la vitesse, des discontinuités. L'accélération, ainsi que les efforts de liaisons, ne sont plus des fonctions bornées du temps ; ils doivent être considérés comme des distributions singulières. Pour les modéliser et les résoudre, il sera fait appel aux concepts afférents à la Mécanique Non Régulière.
- Les liaisons entre les éléments doivent rendre compte de la cohésion éventuelle, de l'endommagement et de la plasticité non associée des joints de mortier. Ces comportements sont pris en compte, à la fois dans la formulation et dans la résolution, en enrichissant le comportement basique précité. Un modèle d'endommagement brutal (rupture fragile) et un modèle d'endommagement progressif intimenent couplé au frottement de COULOMB et au contact unilatéral seront proposés.

La résolution numérique de ces comportements s'appuiera sur une formulation dynamique et sur une procédure de discrétisation/approximation pertinente, capable d'appréhender les problèmes non réguliers. A cet effet, la méthode NSCD servira de support et sera adaptée aux spécificités des maçonneries. En particulier, la dynamique sera aussi nécessaire à surmonter les problèmes liés à l'adoucissement présent dans le comportement des joints.

Enfin, cette représentation et cette formulation théoriques ne sont utiles que si elles sont appliquées. Pour les édifices monumentaux, l'application d'une modélisation mécanique nécessite la connaissance de la géométrie de la structure ainsi que des matériaux utilisés. Au delà de ces informations techniques, il est nécessaire d'en savoir plus sur l'histoire de la construction. Dans les faits, une représentation architecturale et archéologique du bâti est indispensable à la modélisation mécanique des édifices monumentaux. Nous verrons comment ces éléments ont été pris en compte, dans le cadre d'une collaboration transdisplinaire.

CHAPITRE 5

Equations constitutives du modèle micromécanique discret

———————— oOo ————————

L'objet de ce chapitre concerne la représentation et la formulation d'un modèle micromécanique discret pour les maçonneries. Comme souvent, dans un travail de modélisation, l'effort a consisté à rassembler et à rendre cohérent le matériel nécessaire à la construction du modèle. L'hypothèse fondamentale qui sous-tend ces travaux suppose que la maçonnerie en appareillage de blocs peut être représentée par une collection de corps interconnectés par des liaisons. Dans cet esprit, on rappellera brièvement le cadre de la Mécanique et de la Thermodynamique des Milieux Continus, qui nous servira de guide pour la construction des modèles de comportement. Ensuite, on concentrera notre attention sur le contact unilatéral et sur le frottement, qui fourniront l'assise à tous nos modèles de comportement des liaisons. Enfin, des modèles tenant compte de la cohésion seront présentés.

———————— oOo ————————

Plan du Chapitre 5

5.1 Eléments de mécanique des milieux continus déformables 147
5.1.1 Cinématique des milieux continus déformables 148
5.1.2 Equations de conservation 155
5.1.3 Théorème des Puissances Virtuelles 157
5.1.4 Écriture des lois de comportement - Cadre thermodynamique . . . 160
5.2 Contact unilatéral et frottement 169
5.2.1 Les liaisons unilatérales parfaites et les systèmes discrets 169
5.2.2 Cinématique et sthénique du contact pour les milieux déformables . 174
5.2.3 Contact unilatéral - Condition de Signorini 177
5.2.4 Frottement sec - Frottement de Coulomb 179
5.3 Modèles couplant contact unilatéral, frottement et adhésion . . 184
5.3.1 Saut de déplacement à l'interface 184
5.3.2 Comportement élastique de l'interface 184
5.3.3 Un modèle d'adhésion fragile 186
5.3.4 Un modèle adhésif/frottant avec endommagement progressif, le modèle de Frémond-Cangémi 189
5.3.5 Pertinence du modèle de Frémond-Cangémi pour les mortiers . . 194
5.3.6 Problèmes de sauts solutions liés à l'adoucissement 201
5.4 Conclusion 205

Nous l'avons déjà dit, notre intérêt portera sur des collections de corps rigides ou déformables, liés entre eux par des liaisons unilatérales. Les outils, qui nous servirons à appréhender ces systèmes multi-corps sont empruntés à la Mécanique Analytique et à la Mécanique Non Régulière. En suivant, les travaux de Jean Jacques Moreau, le traitement des liaisons unilatérales se fera dans un cadre dynamique au moyen de vitesses appartenant à l'ensemble des fonctions à variations bornées et de mesures différentielles se substituant à la notion élémentaire d'accélération (§ 5.2).

Si les lois gouvernant les liaisons unilatérales usuelles (condition de Signorini et frottement de Coulomb (§ 5.2.3 et § 5.2.4)) semblent bien adaptées aux appareils de joints-vifs, la cohésion éventuelle des joints de mortier nous oblige à tenir compte d'une résistance à la traction non négligeable. L'écriture de nouvelles lois d'interfaces se fera dans le cadre désormais traditionnel de la Mécanique des Milieux Continus rappelé briévement au § 5.1. Ces modèles de zones cohésives seront choisies pour représenter les comportements suivants :

- une cohésion de la matière, éventuellement élastique (§ 5.3.2),
- un endommagement brutal (rupture fragile § 5.3.3) ou progressif de cette cohésion (§ 5.3.4) couplé à,
- une plasticité non associée de type frottement de Coulomb.

Nous verrons une fois encore que ces modèles s'inscrivent naturellement dans un cadre dynamique, qui leur évite les problèmes de perte d'objectivité de la réponse numérique (§ 5.3.6).

La contribution de l'auteur apparaît tout au long de ce chapitre en filigrane. Naturellement, il ne prétend pas à la construction d'un modèle *ex nihilo*. Le travail a consisté à rassembler, adapter et justifier les divers approches et modèles, qui lui semblent pertinents pour les maçonneries afin de fournir une modélisation cohérente.

5.1 Eléments de mécanique des milieux continus déformables

Afin de préciser le cadre dans lequel les équations fondamentales sont écrites, nous proposons de donner quelques éléments de mécaniques de milieux continus. Le lecteur averti pourra passer ce paragraphe.

Nous tenons à faire ces quelques rappels pour montrer notre volonté de considèrer pleinement les fondements de la mécanique des milieux continus, bien que les structures maçonnées soient envisagées de façon discrète. Pour chaque corps continu, constituant la structure discrète, on souhaite pouvoir faire appel au cadre thermodynamique rigoureux de l'écriture des lois de comportement. De même, pour les interfaces, le développement des modèles ainsi que la réflexion qui est menée sur leur écriture, sera emprunte des idées fondamentales de la thermodynamique des milieux continus. Ce sera particulièrement vrai pour les modèles tenant compte de l'adhésion (voir § 5.3).

Quelques rappels de cinématique des milieux continus seront faits dans le paragraphe 5.1.1. Ils ont pour principal objectif d'engager une discussion sur une cinématique pertinente pour les

systèmes discrets composés de corps déformables[1].

La suite de ce paragraphe est largement inspirée des travaux suivants :(Moreau, 1974 ; Halphen & Nguyen, 1975 ; Suquet, 1982 ; Germain *et al.*, 1983a ; Maugin, 1992 ; Débordes, 1996) et du cours de Pierre Suquet (1997), qui m'a éclairé et qui a été, pour moi, le début d'un parcours initiatique.

5.1.1 Cinématique des milieux continus déformables

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la description du mouvement indépendamment de ses causes. Cette présentation a deux objectifs majeurs. Il s'agit tout d'abord de fixer les notations et le formalisme qui seront adoptés dans les parties suivantes. Le deuxième objectif, justifiant peut-être la présentation de la cinématique classique des milieux continus rigides et déformables, est d'engager une discussion sur le choix d'une cinématique pour les systèmes multi-corps déformables susceptibles de subir de grandes rotations mais de petites déformations.

5.1.1.a Configuration, déplacement, vitesse

Considérons un milieu continu $\mathcal{M}$, i.e, un milieu continu de particules matérielles non isolées. A tout instant $t \in [O,T]$, on appelle la *configuration* $\overline{\Omega}^t$ la partie de $\mathbb{R}^3$ occupée par les particules constituants $\mathcal{M}$. On note Ω^t l'intérieur de cet ensemble et Γ^t sa frontière. La configuration à l'instant initial $\overline{\Omega}^0$ sera appelée la *configuration de référence*.

Définissons un repère attaché à la configuration de référence que nous nommerons *repère de référence* définie par trois axes orthogonaux $\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$ et $\boldsymbol{X}_3$ munis de leurs vecteurs unitaires $\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{E}_2$ et $\boldsymbol{E}_3$ et son origine O. Les particules matérielles seront désignées par leur position, $\boldsymbol{X}$, dans ce repère :

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}^T_{\{E_i\}} = X_1\boldsymbol{E}_2 + X_2\boldsymbol{E}_2 + X_3\boldsymbol{E}_3. \tag{5.1.1}$$

On définit maintenant la *fonction position* χ par :

$$\begin{aligned} \chi : \overline{\Omega}^0 \times [0,T] &\longrightarrow \mathbb{R}^3, \\ (\boldsymbol{X}, t) &\longrightarrow \boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X}, t). \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Cette fonction fournit à l'instant t la position de la particule de $\mathcal{M}$ qui occupait la position $\boldsymbol{X}$ à l'instant initial. Cette position est repérée à l'instant t par ses composantes :

$$\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T_{\{E_i\}} = x_1\boldsymbol{E}_2 + x_2\boldsymbol{E}_2 + x_3\boldsymbol{E}_3. \tag{5.1.3}$$

Par abus de notation, la fonction position est souvent confondue avec la fonction transformation.

On appelle *fonction déplacement* $\boldsymbol{u}$ la fonction définie par rapport à la configuration de référence suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} : \overline{\Omega}^0 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{X} &\longrightarrow \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t) = \chi(\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{X}. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

1. A cet effet, un essai d'écriture d'une cinématique co-rotationnelle est proposé en annexe ??.

Description lagrangienne et description eulérienne. On parle pour $\boldsymbol{X}$ de *variables lagrangiennes* ou variables matérielles, ou encore inertielles. C'est le point de vue courant en mécanique du solide, où il est *a priori* facile de suivre une particule dans son mouvement. La configuration de référence est alors privilégiée pour l'étude du mouvement. Lorsque les diverses grandeurs décrivant un système mécaniques sont exprimées par rapport à la configuration de référence en suivant les particules dans leur mouvement, on parle de description lagrangienne. Les variables indépendantes sont donc les composantes de $\boldsymbol{X}$, qui dépendent elles-mêmes du temps, t.

La vitesse se définit de la manière suivante en description lagrangienne :

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t) = \frac{d\chi(\boldsymbol{X},t)}{dt}. \tag{5.1.5}$$

L'accélération se définit dès lors de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{X},t) = \frac{d^2\chi(\boldsymbol{X},t)}{dt^2}. \tag{5.1.6}$$

Lorsque l'on souhaite que la description soit indépendante d'une configuration de référence et que l'on étudie les champs mécaniques en un point donné par $\boldsymbol{x}$, on utilise une description eulérienne basée sur les variables indépendantes, $\boldsymbol{x}$ et t, dites *variables eulériennes* ou encore géométriques ou spatiales. La configuration actuelle est alors privilégiée et toute la cinématique de la transformation est décrite par la vitesse eulérienne :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}. \tag{5.1.7}$$

L'accélération eulérienne doit tenir compte de l'indépendance des variables de description et conduit à la formulation suivante :

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\,\bar{\otimes}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t). \tag{5.1.8}$$

Bien sur, ces deux descriptions sont équivalentes pour peu que l'on puisse définir une configuration de référence. Pour résumer, la description lagrangienne, qui suit une particule dans son mouvement à partir de sa configuration de référence est particulièrement bien adaptée aux problèmes de mécanique des solides. C'est une description en trajectoires. La description eulérienne, quant à elle, décrit les particules qui passe en un point géométrique donné au cours du temps. C'est une description en lignes de courant particulièrement bien adaptée aux problèmes de mécanique des fluides.

5.1.1.b Mesures de déformations

Cas linéaire Soit $\boldsymbol{L}$ une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$, L est une isométrie si elle conserve les longueurs et les angles soit :

$$\forall \boldsymbol{V},\boldsymbol{W}, \langle \boldsymbol{L}(\boldsymbol{V}), \boldsymbol{L}(\boldsymbol{W})\rangle = \langle \boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\rangle\,. \tag{5.1.9}$$

Si la transformation est un mouvement de solide rigide, $\boldsymbol{L}$ est une isométrie. Ceci constitue d'ailleurs une définition possible d'un mouvement de solide rigide linéarisé.

Si $\boldsymbol{L}$ est différent d'une isométrie, la mesure de déformation naturelle est la variation d'angle et de longueur engendrée par $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}\left[\langle \boldsymbol{L}(\boldsymbol{V}),\boldsymbol{L}(\boldsymbol{W})\rangle - \langle \boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\rangle\right], \tag{5.1.10}$$

où $\boldsymbol{E}$ est donc une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire $\langle \boldsymbol{V},\boldsymbol{W}\rangle$ est la métrique initiale et $\langle \boldsymbol{L}(\boldsymbol{V}),\boldsymbol{L}(\boldsymbol{W})\rangle$ est la métrique transportée par $\boldsymbol{L}$. Si $\boldsymbol{L}$ est une isométrie, la mesure de déformations $\boldsymbol{E}$ est identiquement nulle, ce qui parait naturel pour une mouvement de solide rigide. Avec un produit scalaire euclidien, la déformation peut alors s'écrire :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}({}^{\intercal}\boldsymbol{L}\boldsymbol{L} - \mathbb{1}), \tag{5.1.11}$$

où $\mathbb{1}$ est le tenseur identité.

Le tenseur $\boldsymbol{E}$ définit le *tenseur de déformation de* Green-Lagrange et $\boldsymbol{C} = {}^{\intercal}\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}$ le *tenseur de* Cauchy-Green *droit* ou de *dilatations.*

Cas non linéaire L'application transformation χ n'est généralement pas linéaire. On considère alors l'application linéaire tangente obtenue par développement de Taylor de χ autour de $\chi(\boldsymbol{X}_0)$:

$$\boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X},t) + \chi(\boldsymbol{X}_0) + \nabla_{\boldsymbol{X}}\chi(\boldsymbol{X}_0)(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0) + o(|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0|^2). \tag{5.1.12}$$

La déformation est alors une notion purement locale. Dans la théorie du premier gradient, on se limite à un développement au premier ordre de la transformation :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + L(\boldsymbol{V}), \tag{5.1.13}$$

$$\text{avec} \quad L = \nabla_{\boldsymbol{X}}\chi(\boldsymbol{X}_0) = D\chi(\boldsymbol{X}_0). \tag{5.1.14}$$

On obtient alors une application linéaire de l'espace tangent à $\overline{\Omega}^0$ en $\boldsymbol{X}_0$ dans l'espace tangent à $\overline{\Omega}^t$ en $\boldsymbol{x}_0$. Cette application permet de définir une déformation basée sur la métrique d'un espace vectoriel. Cette application linéaire est usuellement noté $\boldsymbol{F}$ et représente le *gradient de déformations :*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\chi(\boldsymbol{X},t) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}(\chi(\boldsymbol{X},t) = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}. \tag{5.1.15}$$

Le tenseur de Green-Lagrange se définit naturellement par :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \mathbb{1}). \tag{5.1.16}$$

Si l'on choisit $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{w}$ pour exprimer le transport de la métrique, on obtient le *tenseur d'*Euler-Almansi :

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - (\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}^T)^{-1}). \tag{5.1.17}$$

A travers cette opération, on peut constater que le gradient de transformation $\boldsymbol{F}$ est l'application qui nous permet de passer de la métrique initiale à la métrique transportée. Cette propriété

est d'un grand intérêt pour le passage des expressions lagrangiennes aux expressions eulériennes. L'opération $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{v}$ nous donne en effet une expression eulérienne du vecteur.

Le tenseur $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}^T$ est le *tenseur de* CAUCHY-GREEN *gauche*. Le tenseur d'EULER ALMANSI n'est pas, malgré sa dénomination, un tenseur purement eulérien car il fait intervenir χ et donc la connaissance de la configuration de référence. Pour une description purement eulérienne du mouvement, indépendante d'une configuration de référence, une formulation en vitesses du mouvement et des déformations se révèle indispensable.

Cas des transformations infinitésimales Grâce à la définition de la fonction déplacement,

$$\boldsymbol{x} = \chi(\boldsymbol{X}, t) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t),$$

le tenseur gradient de transformation $\boldsymbol{F}$ et le tenseur de GREEN-LAGRANGE $\boldsymbol{E}$ s'expriment de la manière suivante :

$$\boldsymbol{F} = \nabla_{\boldsymbol{X}}\chi(\boldsymbol{X}, t) = \mathbb{1} + \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u}, \tag{5.1.18}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \mathbb{1}) = \frac{1}{2}(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u} + \nabla^T_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u} + \nabla^T_{\boldsymbol{X}}.\boldsymbol{u}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u}). \tag{5.1.19}$$

Explicitons maintenant l'hypothèse des petites perturbations :

- hypothèse de petits déplacements $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t) \lll l$. La longueur de référence l est une dimension caractéristique du système. La configuration de référence $\overline{\Omega}^0$ est alors confondue avec la configuration actuelle $\overline{\Omega}^t$;
- hypothèse de petites déformations $\|\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u}\| \lll 1$.

Suite à ces hypothèses, on obtient alors une mesure de déformation linéaire par rapport à $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{E} \approx \boldsymbol{\epsilon} = (\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u} + \nabla^T\boldsymbol{u}) = (\nabla^s_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u}), \tag{5.1.20}$$

où ∇^s est la partie symétrique du gradient.

Décomposition polaire du gradient de transformation [2] Comme tout tenseur du second ordre, $\boldsymbol{F}$ admet une décomposition polaire unique à droite ou à gauche qui peut s'exprimer de la sorte :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{R}. \tag{5.1.21}$$

Les tenseurs $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{R}$ se déduisent à partir de $\boldsymbol{F}$ de la sorte :

$$\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T. \tag{5.1.22}$$

2. De nombreux autres systèmes de mesure de déformation ont été proposés, privilégiant différentes approches suivant le type de problèmes. Le but, dans ce texte, n'étant pas de faire une liste exhaustive de ses mesures, on se contentera de donner un type particulier de mesure issue de la décomposition polaire de $\boldsymbol{F}$. Cette décomposition sera utile par la suite, lorsque l'on discutera de transformation de solide rigide et de repère matériel attaché à un solide déformable

Les tenseurs $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ possèdent les mêmes valeurs propres et si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre de $\boldsymbol{U}$ alors $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre de $\boldsymbol{V}$. La déformation locale $\boldsymbol{F}$ est alors mesurée comme la composition d'une transformation rigide locale $\boldsymbol{R}$ qui est une rotation pure et d'une transformation locale $\boldsymbol{U}$ ou $\boldsymbol{V}$ mesurant la déformation du milieu.

Tenseur des vitesses de déformations Comme on l'a déjà évoqué, une description purement eulérienne de la transformation se fait naturellement en termes de vitesses. Les deux descriptions peuvent être reliées de la manière suivante :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d\chi(\boldsymbol{X}, t))}{dt} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}, t). \tag{5.1.23}$$

Cette relation conduit à une équivalence entre le gradient de transformation lagrangien et le gradient des vitesses eulériennes :

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}. \tag{5.1.24}$$

Une fois de plus, si l'on choisit $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{v}$ pour exprimer la transformation de la métrique, on obtient une mesure des vitesses de déformations en description lagrangienne de la manière suivante :

$$\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) = \frac{1}{2}{}^{\intercal}\boldsymbol{V}({}^{\intercal}\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F} + {}^{\intercal}\boldsymbol{F}\dot{\boldsymbol{F}})\boldsymbol{W}. \tag{5.1.25}$$

On peut déduire alors une version purement eulérienne de la mesure de déformation :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) &= \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) = \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{w}), & (5.1.26)\\ &= \frac{1}{2}{}^{\intercal}\boldsymbol{v}({}^{\intercal}(\dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}) + \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1})\boldsymbol{w}. & (5.1.27) \end{aligned}$$

On définit alors naturellement $\boldsymbol{D}$ comme le tenseur des vitesses de déformations purement eulérien :

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}({}^{\intercal}\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)) = \nabla^{s}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t). \tag{5.1.28}$$

5.1.1.c Discussion sur le choix d'une cinématique

Lorsque l'on envisage de décrire une cinématique du solide déformable, on est confronté à deux grandes écoles que sont la mécanique des milieux continus et la mécanique analytique des systèmes lagrangiens. Nous allons essayer de discuter brièvement les motivations qui poussent ces deux écoles à proposer des formulations souvent bien différentes et essayer d'en tirer les enseignements afin de dégager une cinématique pertinente pour les systèmes discrets composés d'une collection de déformables.

Cinématique et mécanique des milieux continus. En ce qui concerne la mécanique des milieux continus, le caractère déformable du corps est généralement mis largement en avant. La cinématique est décrite par des variables le plus souvent dans un cadre purement lagrangien, en rapport à une configuration de référence supposée connue. La mesure des déformations s'appuie

le plus souvent sur le gradient de déformations, $\boldsymbol{F}$, entre un état de référence et un état déformé. Particularisons maintenant les formulations les plus couramment rencontrées.

Si l'hypothèse des petites perturbations est faite, le cadre lagrangien est souverain et l'on confond la configuration déformée avec la configuration de référence.

Lorsque de grandes transformations sont considérées, plusieurs formulations sont suggérées. Une formulation lagrangienne totale, basée sur une mesure des déformations donnée par le tenseur de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$ peut être utilisée pour tenir compte des grands déplacements engendrés par ces grandes transformations. Cette méthode est particulièrement adaptée aux problèmes où cohabitent des grandes rotations avec de faibles déformations du solides. On parle pour ce type de problème de grandes transformations géométriques, à l'opposé des grandes transformation matérielles rencontrées pour grandes déformations du solide. En effet, une des difficultés de cette méthode en grandes déformations est l'écriture des lois de comportement dans le cadre purement lagrangien, c'est à dire à partir de la configuration de référence.

Pour palier à ce problème, les formulations lagrangiennes incrémentales où la configuration de référence est mise a jour au fur à mesure de la transformation, sont parfois proposées. En prenant garde de respecter l'hypothèse des transformations infinitésimales entre deux mises à jour, on réalise alors une linéarisation de la cinématique du corps permettant de décrire de manière incrémentales les grands déplacements. L'inconvénient majeur de ce type de formulation réside dans le fait qu'un mouvement de solide rigide ne produit pas un état de déformations nulles. En outre, l'inertie de solide rigide d'un corps n'est pas respectée en cas de transformation rigide.

Enfin pour ce qui concerne la mécanique des milieux continus, une dernière classe de formulation est souvent proposée s'appuyant sur une écriture des théorèmes des puissances virtuelles à la fois en variables lagrangiennes et eulériennes. Comme nous l'avons évoqué auparavant, l'écriture des lois de comportement en grandes transformations posent de sérieux problèmes en formulation lagrangienne totale. En effet, il est très dur de faire respecter le principe fondamentale d'objectivité pour des matériaux fortement non-linéaires en grandes déformations. Pour contourner ce problème, on préfère écrire la loi de comportement du matériau dans un repère attaché à la matière, fourni par une décomposition polaire du gradient de transformation.

Cinématique et mécanique analytique Une deuxième école est celle de la mécanique analytique. Dans ce cas, on s'attache avant tout à décrire la cinématique du solide déformable en se reposant sur la cinématique du solide rigide. On fait apparaître dans ce cas explicitement la notion de transformation rigide et, en particulier, la présence de rotations rigides inhérentes à la transformation.

Les systèmes mécaniques considérés sont traditionnellement des systèmes lagrangiens où les configurations possibles du système peuvent être représentées par ensemble fini de variable constituant le paramétrage. L'ensemble des configurations permises par le système ne possède généralement pas de structure vectoriel. On s'y ramène le plus souvent en se plaçant sous l'hypothèse des petites perturbations et en effectuant un calcul de variations de l'énergie mécanique d'un système conservatif. On considère alors l'espace vectoriel tangent des déplacements infinitésimaux

en statique ou celui des vitesses dans le cas de la dynamique. Les équations de LAGRANGE, obtenues ainsi à partir du principe de D'ALEMBERT, fournissent alors les équations linéarisées du mouvement.

D'une manière générale, la notion de déformabilité du système est une notion secondaire, qui intervient soit au moyen d'une énergie potentielle élastique dans le principe de D'ALEMBERT, soit par la donnée d'une force généralisée des efforts intérieurs dans les équations de LAGRANGE.

Une cinématique intermédiaire Ces dernières années des approches mixtes ont été proposées pour la cinématique de corps déformables encourant des rotations finies. La littérature sur ce sujet est vaste. Deux approches principales peuvent être dégagées.

La première est issue de la mécanique des systèmes multi-corps[3] Ces systèmes ont la particularité de subir de grandes rotations mais de petites déformations. Après avoir longtemps considérer ces systèmes comme des collections de solides rigides reliés entre eux par des liaisons le plus souvent bilatérales, le formalisme, basé sur la mécanique analytique a été adapté pour tenir compte de faibles déformations élastiques. Citons les travaux de SHABANA (1998) ; BAUCHAU *et al.* (1995) ; PEDERSEN & PEDERSEN (1998) pour les systèmes multi-corps élastiques et CARDONA & GÉRADIN (1992, 1993) ; CARDONA (1995) ; GÉRADIN & CARDONA (2001) pour l'analyse des systèmes faiblement déformables mais subissant de grandes rotations comme les engrenages ou les structures déployables.

L'autre classe de travaux est issue de la mécanique des milieux continus en grandes transformations. Partant de la décomposition polaire du gradient de déformations, la transformation est décomposée en une rotation pure finie puis d'une déformation elle-même finie. C'est pour les structures élancées comme les poutres (SIMO, 1985 ; SIMO & VU QUOC, 1986 ; CARDONA & GÉRADIN, 1998), les plaques et les coques (SIMO *et al.*, 1989 ; SHABANA & CHRISTENSEN, 1997) que les premières applications ont été proposées. La définition de repère matériel est en effet assez naturel dans ce type de structures du fait de l'existence de structures rigides subissant de grandes rotations, comme les sections d'une poutre où les normales aux feuillet moyen dans une coque. En ce qui concerne les solides volumiques, la définition d'un repère matériel en grandes transformations est plus ardue. Dans le cadre de modélisations éléments finis, CRISFIELD & MOITA (1996) et MOITA & CRISFIELD (1996) propose d'associer de manière heuristique une rotation finie à chaque élément de la discrétisation. IBRAHIMBEGOVIC (1995) propose une formulation variationnelle rigoureuse de l'évolution des solides tridimensionnels en grandes déformations et rotations finies. Ces approches sont souvent réunies sous le terme de formulation co-rotationnelle.

La principale différence entre ces deux approches est la nature du champ de rotations finies introduit dans la cinématique. Dans le premier cas, le champ est discret et il est attaché à chaque corps faiblement déformable. C'est même cette hypothèse de petites déformations qui permet de le définir de manière unique. Dans le second cas, il s'agit d'un champ de rotations continues défini en chaque point de la matière.

3. Peut être plus connue sous son acronyme anglais « Multibody systems » dont des exemples classiques sont les systèmes articulées et des mécanismes.

Application aux milieux discrets Nous verrons dans la suite que la modélisation proposée considère que les maçonneries comme une collection des solides faiblement déformables reliées entre eux par des conditions unilatérales. Il semble donc intéressant de fournir une cinématique capable de décrire à la fois les mouvements de solides rigides qui peuvent être occasionnés par les mécanismes de ruine et le caractère déformable de chaque éléments.

Si l'hypothèse des petites déformations est faite pour chacun des corps de la structure, il peut être intéressant de définir une cinématique s'appuyant sur une champ de déplacements de solides rigides pour chaque auquel on adjoint un champ de déplacement correspondant à un déformation pure. Dans l'annexe **??**, on donne quelques éléments d'une telle cinématique.

5.1.2 Equations de conservation

5.1.2.a Géneralités sur les équations de conservation

Introduisons dans cette partie quelques résultats classiques relatifs à la conservation d'une grandeur mécanique. Soit $\mathcal{F}$ une grandeur lagrangienne désignée par $\mathcal{F}(\boldsymbol{X},t)$, sa conservation au cours du temps s'exprime par :

$$\frac{d\mathcal{F}(\boldsymbol{X},t)}{dt}=0. \tag{5.1.29}$$

Si $\mathcal{F}$ est une grandeur eulérienne, soit $\mathcal{F}(\boldsymbol{x},t)=\mathcal{F}(\chi(\boldsymbol{X},t),t)$ sa conservation au cours du temps s'exprime par :

$$\frac{d\mathcal{F}(\boldsymbol{x},t)}{dt}=\frac{\partial F(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\nabla_{\boldsymbol{x}}\mathcal{F}(\boldsymbol{x},t).\frac{\partial\chi(\boldsymbol{X},t)}{\partial t}=0. \tag{5.1.30}$$

Traditionnellement, cette dérivée est appelée dérivée particulaire ou convective. Pour éviter toute ambiguïté, on la notera dans la suite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\frac{D\mathcal{F}(\boldsymbol{x},t)}{Dt}&=\frac{\partial F(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\nabla_{\boldsymbol{x}}\mathcal{F}(\boldsymbol{x},t).\frac{\partial\chi(\boldsymbol{X},t)}{\partial t},\\&=\frac{\partial F(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\nabla_{\boldsymbol{x}}\mathcal{F}(\boldsymbol{x},t).\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t).\end{aligned}$$

Si $\mathcal{F}$ est une grandeur intégrale sur un élément de volume $\Omega(t)$ suivi dans son mouvement, i.e :

$$\mathcal{F}(t)=\int_{\Omega(t)}f(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x}. \tag{5.1.31}$$

on peut s'appuyer sur la formule divergence-flux pour écrire cette conservation sous la forme d'une équation aux dérivées partielles locales :

$$\begin{aligned}\frac{D\mathcal{F}(t)}{Dt}&=\int_{\Omega(t)}\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega(t)}f(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}\,ds,\\&=\int_{\Omega(t)}\frac{\partial f(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}f(\boldsymbol{x},t).\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x},\\&=\int_{\Omega(t)}\frac{Df(\boldsymbol{x},t)}{Dt}+f(\boldsymbol{x},t).\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

Citons enfin le lemme fondamental de CAUCHY qui va nous permettre de traduire ces flux en efforts :

1 **Lemme Fondamental de CAUCHY**
Considérons $\forall \omega(t) \subset \Omega(t), \mathcal{A}(t) = \int_{\omega(t)} \rho(\boldsymbol{x},t) A(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}$, ρ est la masse volumique et $A(\boldsymbol{x},t)$ la densité spécifique de $\mathcal{A}$.

Si on peut exprimer une loi de conservation pour $\mathcal{A}$ sous la forme suivante :

$$\frac{D\mathcal{A}(t)}{Dt} = \int_{\omega(t)} \varphi_{\mathcal{A}}\, d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\omega(t)} J_{\mathcal{A}}\, ds, \tag{5.1.32}$$

alors :

$$1) \qquad \exists\, j_{\mathcal{A}}, \quad J_{\mathcal{A}} = j_{\mathcal{A}}.\boldsymbol{n} \tag{5.1.33}$$

$$, \quad 2) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(\rho A \boldsymbol{v}) = \varphi_{\mathcal{A}} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} j_{\mathcal{A}}, \tag{5.1.34}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale à la surface $\partial\omega(t)$ sortante de $\omega(t)$.

❑

En utilisant la formule de la divergence d'un produit,

$$\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(\rho A \boldsymbol{v}) = A\mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(\rho \boldsymbol{v}) + \rho \boldsymbol{v} \nabla_{\boldsymbol{x}} A, \tag{5.1.35}$$

la deuxième assertion peut être reformulée sous une forme plus traditionnelle :

$$\rho \frac{DA}{Dt} = \varphi_{\mathcal{A}} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}} j_{\mathcal{A}}. \tag{5.1.36}$$

5.1.2.b Bilan de masse

Considérons la masse d'une partie $\omega(t) \subset \Omega(t)$ fermée ; sa conservation au cours du temps s'exprime par :

$$\frac{D\mathcal{M}(t)}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(\int_{\omega(t)} \rho(\boldsymbol{x},t)\, \boldsymbol{x}\right) = 0. \tag{5.1.37}$$

En appliquant le lemme de CAUCHY, on obtient l'équation locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{5.1.38}$$

ou de manière équivalente :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{v}) = 0. \tag{5.1.39}$$

5.1.2.c Bilan de quantité de mouvement — Equations du mouvement

Soit $\mathcal{T}_{ext}$, le torseur des efforts extérieurs appliqués au système, définissons le torseur cinétique noté $\mathcal{T}_{cin}$ par :

$$\mathcal{T}_{cin} = \begin{cases} \mathcal{R}_{cin} = \displaystyle\int_{\omega(t)} \rho \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}, \\ \mathcal{M}_{cin} = \displaystyle\int_{\omega(t)} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x}. \end{cases} \tag{5.1.40}$$

Le bilan de quantité de mouvement s'appuie sur le Principe Fondamental de la Dynamique qui peut être énoncé ainsi :

Soit $\Omega(t)$ la configuration d'un système plongé dans un référentiel galiléen, $\forall \omega(t) \in \Omega(t)$,

$$\frac{D\mathcal{T}_{cin}(t)}{Dt} = \mathcal{T}_{ext}(t). \tag{5.1.41}$$

En introduisant les forces volumiques $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ s'appliquant sur les particules de $\omega(t)$ et $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t)$ les forces surfaciques s'appliquant aux frontières de $\omega(t)$, on obtient :

$$\frac{D\mathcal{R}_{cin}(t)}{Dt} = \int_{\omega(t)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\omega(t)} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t)\, ds, \tag{5.1.42}$$

$$\frac{D\mathcal{M}_{cin}(t)}{Dt} = \int_{\omega(t)} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\omega(t)} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}, t)\, ds. \tag{5.1.43}$$

En appliquant le lemme de Cauchy, on obtient d'une part l'existence d'un tenseur du second ordre (tenseur de contraintes de Cauchy) tel que :

$$\exists \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n}, \tag{5.1.44}$$

d'autre part, l'équation du mouvement [4] :

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{f} + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\sigma} - \rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}). \tag{5.1.45}$$

En utilisant la seconde formulation (5.1.36), on obtient l'expression traditionnelle de l'équation du mouvement :

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)}{Dt} = \rho \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f} + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{\sigma}. \tag{5.1.46}$$

Si l'on considère, comme cela a été fait implicitement ici, que la densité de couple appliquée à chaque particule est nulle, l'équation (5.1.43) portant sur les moments apporte la preuve de la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy.

5.1.3 Théorème des Puissances Virtuelles

Soit $\hat{\boldsymbol{v}} : \boldsymbol{x} \in \Omega(t) \longrightarrow \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ un champ de vitesses virtuelles, écrivons l'égalité issue de l'équation du mouvement au sens faible :

$$\int_{\Omega(t)} \rho \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{v}, t) \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega(t)} (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)) \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x}. \tag{5.1.47}$$

4. $\otimes$ est le produit tensoriel simple

En appliquant la formule de GREEN, on obtient l'égalité bien connue :

$$\int_{\Omega(t)} \rho\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x} = -\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t).\nabla_{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\,ds. \tag{5.1.48}$$

La symétrie du tenseur des contraintes de CAUCHY permet une introduction naturelle du tenseur des vitesses de déformations [5] :

$$\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t).\nabla_{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x} = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})\,d\boldsymbol{x}. \tag{5.1.49}$$

Définissons les différentes puissances virtuelles mises en jeu :

– Puissance virtuelle des quantités d'accélération :

$$\hat{\mathcal{P}}_{acc} = \int_{\Omega(t)} \rho\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x}. \tag{5.1.50}$$

– Puissance virtuelle des efforts extérieurs :

$$\hat{\mathcal{P}}_{ext} = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\,ds. \tag{5.1.51}$$

– Puissance virtuelle des efforts intérieurs [6] :

$$\hat{\mathcal{P}}_{int} = -\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})\,d\boldsymbol{x}. \tag{5.1.52}$$

Deux axiomes supplémentaires vont nous permettre d'énoncer le Théorème des Puissances Virtuelles :

1. La puissance virtuelle des efforts intérieurs est linéaire par rapport à $\hat{\boldsymbol{v}}$.
2. La puissance des efforts intérieurs est nulle dans tout mouvement de solide rigide :

$$\text{Si } \hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{x}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}, \forall(\boldsymbol{x}_O,\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}^6 \quad \text{alors} \quad \hat{\mathcal{P}}_{int} = 0. \tag{5.1.53}$$

1 **Théorème des Puissances Virtuelles (TPV)**

Le Théorème des Puissances Virtuelles peut alors s'énoncer ainsi :

Soit $\Omega(t)$ la configuration d'un système plongé dans un référentiel galiléen, $\forall\omega(t) \in \Omega(t)$,

$$\forall t, \forall\hat{\boldsymbol{v}}, \qquad \hat{\mathcal{P}}_{acc} = \hat{\mathcal{P}}_{ext} + \hat{\mathcal{P}}_{int}. \tag{5.1.54}$$

❑

Ce théorème est souvent énoncé sous forme de principe. En effet, on peut démontrer qu'il y a équivalence entre le Principe Fondamentale de la Dynamique et le Théorème des Puissances Virtuelles accompagné de ses deux axiomes.

Le deuxième axiome donne une signification physique intrinsèque à la puissance des efforts intérieurs. En effet, cet axiome postule l'indifférence matérielle de la puissance des efforts intérieurs. Pour tout changement de repère d'observation correspondant à un mouvement rigidifiant, la puissance doit rester identique. Cet axiome est souvent appelé l'axiome d'objectivité.

5. $\bar{\bar{\otimes}}$ est le produit tensoriel doublement contracté

6. Le signe négatif de la puissance virtuelle des efforts intérieurs est le résultat de la convention usuellement réalisée en mécanique des solides, qui compte comme positives les contraintes de traction.

5.1.3.a Formulation lagrangienne totale

Jusqu'ici le Théorème des Puissances Virtuelles a été exprimé sur la configuration actuelle $\Omega(t)$. Le cadre eulérien a donc été privilégié. Dans ce paragraphe, nous allons introduire des formulations lagrangiennes équivalentes plus communes en mécanique du solide. Ces écritures vont s'appuyer sur l'utilisation du gradient de transformation $\boldsymbol{F}$ pour nous ramener à la métrique dans la configuration de référence $\Omega(0)$.

Commençons par la puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$\hat{\mathcal{P}}_{int} = -\int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t).\nabla_{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x}, \tag{5.1.55}$$

$$= -\int_{\Omega(0)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t).\nabla_{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t)\det(\boldsymbol{F})\,d\boldsymbol{X}, \tag{5.1.56}$$

$$= -\int_{\Omega(0)} \det(\boldsymbol{F})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)^{\intercal}\boldsymbol{F}^{-1}\dot{\hat{\boldsymbol{F}}}\,d\boldsymbol{X}. \tag{5.1.57}$$

Soit en introduisant le tenseur de Piola-Kirchhoff I,

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{X},t) = \det(\boldsymbol{F})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)^{\intercal}\boldsymbol{F}^{-1}, \tag{5.1.58}$$

on peut écrire à nouveau :

$$\hat{\mathcal{P}}_{int} = -\int_{\Omega(0)} \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{X},t)\dot{\hat{\boldsymbol{F}}}\,d\boldsymbol{X}. \tag{5.1.59}$$

Le tenseur de Piola-Kirchhoff I exprime les contraintes dans la configuration de référence $\Omega(0)$ mais dans un repère transporté par $\boldsymbol{F}$. Pour une mesure totalement lagrangienne, on introduit le tenseur de Piola-Kirchhoff II :

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{X},t) = \boldsymbol{F}^{-1}\det(\boldsymbol{F})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)^{\intercal}\boldsymbol{F}^{-1}, \tag{5.1.60}$$

qui nous donne l'expression lagrangienne totale de la puissance des efforts intérieurs :

$$\hat{\mathcal{P}}_{int} = -\int_{\Omega(0)} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X},t)\dot{\hat{\boldsymbol{E}}}(\boldsymbol{X},t)\,d\boldsymbol{X}. \tag{5.1.61}$$

2 **Théorème des Puissances Virtuelles (TPV)**

La formulation lagrangienne totale du Théorème des Puissances Virtuelles conduit à :

$$\int_{\Omega(0)} \rho(\boldsymbol{X},0)\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{X},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)\,d\boldsymbol{X} = -\int_{\Omega(0)} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{X},t)\,\dot{\hat{}}\,(\hat{X},\boldsymbol{E})\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega(0)} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)\,d\boldsymbol{X} + \int_{\partial\Omega(O)} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)\,dS, \tag{5.1.62}$$

❑

où $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{T}$ sont les efforts volumiques et surfaciques appliqués au système et exprimés en variables lagrangiennes dans la configuration de référence.

Applications aux grandes transformations géométriques et aux systèmes multi-corps
Cette formulation est particulièrement bien adaptée aux problèmes en grandes transformations géométriques. La mesure de déformation employée permet de tenir compte des rotations finies susceptibles de se produire dans ce type de transformation. En outre, les problèmes liés à l'écriture des lois de comportement, en particulier le respect de l'objectivité, et l'interprétation des contraintes dans une configuration de référence, sont le plus souvent évacués. En effet, les problèmes en grandes transformations uniquement géométriques mettent en jeu des petites déformations, le plus souvent élastiques.

Pour les applications en grandes transformations géométriques (ruines, éboulement, *etc.*...) concernant les maçonneries, considérées comme des collections de solides faiblement déformables, nous choisirons cette formulation.

5.1.3.b Cas des transformations infinitésimales

Dans le cas des petites perturbations, on confond la configuration actuelle avec la configuration de référence. De plus, on utilise une mesure linéaire des déformations donnée par $\boldsymbol{\epsilon}$.

3 **Théorème des Puissances Virtuelles (TPV)**
Le Théorème des Puissances Virtuelles dans le cadre des petites perturbations conduit à :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(0)} \rho\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{X},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)\,d\boldsymbol{X} = \\ -\int_{\Omega(0)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X},t)\hat{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}\,d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega(0)} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)\,d\boldsymbol{X} + \int_{\partial\Omega(O)} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},t)\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X},t)\,dS.\end{aligned} \tag{5.1.63}$$

❑

5.1.4 Écriture des lois de comportement - Cadre thermodynamique

Dans la partie précédente, les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement nous ont permis d'exprimer la balance entre les puissances des différents efforts mis en jeu dans un champ de vitesses virtuelles. Il reste maintenant à définir comment le matériau « réagit », c'est à dire comment la puissance des efforts intérieurs peut être estimée et comment les efforts intérieurs peuvent être reliés aux déformations du milieu. Pour cela, les lois complémentaires ou secondaires sont introduites pour renseigner la modélisation. Nous parlerons, le plus souvent, de lois de comportement pour désigner ces équations.

Nous allons rappeler tout d'abord au § 5.1.4.a et 5.1.4.b le cadre dans lequel on doit écrire les lois de comportement si l'on veut respecter les principes fondamentaux de la thermodynamique des processus irréversibles (Germain, 1973a ; Germain *et al.*, 1983b). Ce cadre ne fournit en aucun cas les lois de comportement pour les matériaux mais sert de garde-fou face à la violation des principes thermodynamiques.

Ensuite, nous rappellerons au § 5.1.4.d les hypothèses constitutives d'une classe particulière de matériau : les matériaux standards généralisés (Halphen & Nguyen, 1975). Les propriétés de

normalité et de convexité, dont ils jouissent, ont des conséquences fondamentales sur les réponses mécaniques des matériaux et leur traitement mathématique. Maintes fois dans le mémoire, on fait appel à la notion de normalité ou de manière équivalente au caractère associé des lois de comportement. Afin de préciser ce concept, nous avons décidé de lui consacrer un paragraphe (§ 5.1.4.d).

Dans les paragraphes suivants (§ 5.2 et § 5.3), les lois de comportement des interfaces, qui nous servirons de briques de base pour l'élaboration des modèles pour la maçonnerie, seront présentées dans ce cadre. Il est important de garder à l'esprit que les notions de matériau et de comportement doivent être prises au sens large. Il s'agit en effet des comportements classiques des matériaux constitutifs au sens de la mécanique des milieux continus mais aussi des lois qui régissent le comportement des interfaces ou des discontinuités dans le milieu.

5.1.4.a Premier Principe

Afin d'énoncer le Premier Principe, on suppose que l'état à l'équilibre de la matière peut être représenté en chaque point par un ensemble fini de variables, $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x},t) = \{\chi_0(\boldsymbol{x},t),\ldots,\chi_n(\boldsymbol{x},t)\}$, locales[7] et indépendantes. Ces variables sont les variables d'état du système.

Pour un système Ω quelconque, le premier principe de la thermostatique postule qu'à tout état du système à l'équilibre $\mathcal{E}$, on peut associer, en chaque point $\boldsymbol{x}$, un scalaire $U(\boldsymbol{x},t)$, dépendant exclusivement des variables d'état, appelé densité d'énergie interne du système et que l'énergie interne totale du système :

$$\mathcal{U} = \int_{\Omega(t)} \rho U(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}, \tag{5.1.64}$$

se définit par le bilan d'énergie suivant :

$$\mathcal{U}(\mathcal{E}_2) - \mathcal{U}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{T} + \mathcal{Q}, \tag{5.1.65}$$

où $\mathcal{T}$ est le travail (énergie mécanique) et $\mathcal{Q}$ la chaleur fournis au système pour passer de l'état $\mathcal{E}_1$ à l'état $\mathcal{E}_2$.

La variation d'énergie interne est indépendante du chemin suivi pour passer d'un état d'équilibre à un autre et ne fait donc pas de différence entre la nature de l'énergie mécanique et la chaleur. Le premier principe permet de caractériser les processus réversibles d'échange d'énergie.

Le premier principe s'étend à la thermodynamique en ajoutant le postulat de l'état local qui peut se formuler ainsi : l'état thermodynamique d'un système homogène en évolution est caractérisé par le même jeu de variables d'état qu'à l'équilibre, indépendamment des vitesses d'évolution de ces variables. L'énergie interne du système ne dépend donc pas du mouvement, et reste identique à celle du système à l'équilibre pour les mêmes valeurs des variables d'état.

Le Premier Principe de la thermodynamique peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\dot{\mathcal{U}} + \dot{\mathcal{C}} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{cal}, \tag{5.1.66}$$

7. Le terme « local » est à comprendre comme propre à la particule. On parle aussi de variables intensives

où $\mathcal{C}$ est l'énergie cinétique du système définie par

$$\mathcal{C} = \int_{\Omega(t)} \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{x},t),d\boldsymbol{x}, \tag{5.1.67}$$

et $\mathcal{P}_{cal}$ la puissance calorifique reçue.

Cette puissance calorifique est traditionnellement donnée par :

$$\mathcal{P}_{cal} = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega(t)} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x},t)\,ds, \tag{5.1.68}$$

où $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)$ est une densité volumique de taux de chaleur reçue et $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)$ est le vecteur flux de chaleur.

Le premier principe exprime donc que la variation de l'énergie mécanique composée de l'énergie interne $\mathcal{U}$ et de l'énergie cinétique $\mathcal{C}$ est égale aux puissances des actions extérieures appliquées au système.

On rappelle de plus que le Théorème de Puissances Virtuelles (5.1.54) implique l'égalité suivante :

$$\mathcal{P}_{ext} = \dot{\mathcal{C}} - \mathcal{P}_{int} = \int_{\Omega(t)} \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2(\boldsymbol{x},t),d\boldsymbol{x} + \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t))\,\bar{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}. \tag{5.1.69}$$

Grâce à (5.1.66) et (5.1.69), on obtient une expression locale du Premier Principe :

$$\rho\dot{U} = \boldsymbol{\sigma}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{D} - \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{q} + r. \tag{5.1.70}$$

5.1.4.b Second Principe

Le Second Principe sert à caractériser l'irréversibilité des processus de transformations. Si l'on postule l'existence des notions de température $T(\boldsymbol{x},t)$ et d'une densité d'entropie $S(\boldsymbol{x},t)$ respectant le postulat de l'état local, le Second Principe peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\dot{\mathcal{S}} \geq \int_{\Omega(t)} \frac{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},t)}{T(\boldsymbol{x},t)}\,d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega(t)} \frac{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x},t)}{T(\boldsymbol{x},t)}\,ds, \tag{5.1.71}$$

où $\mathcal{S}$ est l'entropie totale du système :

$$\mathcal{S} = \int_{\Omega(t)} S(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x}. \tag{5.1.72}$$

Le Second Principe peut s'exprimer de manière locale sous la forme suivante :

$$\rho T\dot{S} + \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{q} - r - \frac{\boldsymbol{q}}{T}\nabla_x T \geq 0. \tag{5.1.73}$$

En introduisant la notion d'énergie libre :

$$W = U - TS, \tag{5.1.74}$$

et en utilisant l'expression locale du Premier Principe (5.1.70), on aboutit à l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\boldsymbol{\sigma}\,\bar{\bar{\otimes}}\,\boldsymbol{D} - \rho\dot{W} - \rho T\dot{S} - \frac{\boldsymbol{q}}{T}\nabla_x T \geq 0. \tag{5.1.75}$$

Le premier membre de (5.1.75) représente la dissipation totale du système d qui peut se décomposer en une dissipation intrinsèque volumique :

$$d_m = \boldsymbol{\sigma} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D} - \rho \dot{W} - \rho T \dot{S}, \tag{5.1.76}$$

et une dissipation thermique volumique :

$$d_t = -\frac{\boldsymbol{q}}{T} \nabla_x T. \tag{5.1.77}$$

On admettra pour la suite que ces dissipations sont séparément positives.

On suppose de plus que le jeu de variables d'état $\boldsymbol{\chi}$ respectent le postulat de Helmholtz, c'est à dire que l'on peut définir la température, T comme une variable d'état associée à un ensemble de variables normales[8]. On déduit alors de (5.1.76) que l'entropie peut s'exprimer grâce l'équation de Gibbs :

$$S = -\frac{\partial W(\chi, T)}{\partial T}. \tag{5.1.78}$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables $\boldsymbol{\chi}$:

$$\boldsymbol{X} = -\rho \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\chi}}, \tag{5.1.79}$$

permettent de déduire la dissipation intrinsèque sous la forme suivante :

$$d_m = \boldsymbol{\sigma} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D} + \boldsymbol{X} \dot{\boldsymbol{\chi}} \geq 0. \tag{5.1.80}$$

5.1.4.c Cadre pour l'écriture des lois de comportement

Une fois donné un jeu de variables internes respectant le Postulat de Helmholtz, la donnée de l'énergie libre W permet de connaître les lois d'état (5.1.79). Pour les solides, un choix usuel consiste à considérer que l'énergie libre dépend au moins de la mesure de déformations de Green-lagrange $\boldsymbol{E}$. Les autres variables seront notées $\boldsymbol{\alpha}$.

La contrainte réversible est définie comme la force associée à $\boldsymbol{E}$ dérivant de l'énergie libre :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{R}} = \rho \frac{\partial W(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{\alpha}, T)}{\partial \boldsymbol{E}}. \tag{5.1.81}$$

La contrainte irréversible se déduit alors naturellement comme la part restante :

$$\boldsymbol{\sigma}^{|\mathsf{R}} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{R}} \tag{5.1.82}$$

L'inégalité (5.1.80) devient alors :

$$d_m = \boldsymbol{\sigma}^{|\mathsf{R}} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D} + \boldsymbol{A} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0, \tag{5.1.83}$$

$\boldsymbol{A}$ étant la force thermodynamique associée à $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$.

Les lois de comportement du système sont complètement déterminées par la donnée des relations qui lient les vitesses $(\boldsymbol{D}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ aux forces $(\boldsymbol{\sigma}^{|\mathsf{R}}, \boldsymbol{A})$. Le Second Principe fournit simplement un cadre pour l'écriture des ces relations qui doivent respecter l'inégalité (5.1.83).

8. Les variables sont dites normales à la température dans le sens où l'on peut appliquer une variation de température arbitraire au système irréversible de façon réversible.

5.1.4.d Hypothèse de dissipativité normale et matériaux standards généralisés

Il existe une infinité de manière de construire des lois de comportements respectant l'inégalité (5.1.83). Toutefois, une voie particulière s'avère être intéressante dans la pratique. Elle s'appuie sur deux arguments principaux : l'hypothèse de dissipativité normale et la convexité des potentiels. Dans ce cadre, une classe particulière de lois de comportements a été formalisée par Halphen & Nguyen (1975) qui remplit les conditions fixées par le Second Principe (inégalité (5.1.83)). Ce sont les matériaux standards généralisés qui peuvent être vus comme une extension à un ensemble de variables internes du principe de normalité et de convexité pour la plasticité parfaite (Hill, 1950).

Puissance et dualité Reprenons le formalisme utilisé dans (Moreau, 1974). Soit $\{V\}$ l'espace des vitesses de la configuration à l'instant t, $\{F\}$ l'espace des forces. Pour chaque couple $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{f}) \in \{V\} \times \{F\}$, on définit le scalaire $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{f} \rangle$ comme la puissance du couple considéré. Cette puissance met en dualité les espaces $\{V\}$ et $\{F\}$.

Un exemple d'expression de ce scalaire [9] peut être donné par la puissance des efforts extérieurs, pour une cinématique usuelle des milieux continus. De la même manière, on peut définir la puissance pour un couple $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D}) \in \mathcal{Z}_s \times \mathcal{Z}_s$ où $\mathcal{Z}_s$ est l'ensemble des tenseurs symétriques du second ordre. Dans le cas de la cinématique des milieux continus, on écrit :

$$\mathcal{P}_{int} = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D} \rangle = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}. \tag{5.1.84}$$

Dans la suite, on désignera de manière générique par $\boldsymbol{a}$ un vecteur de vitesse associé à un vecteur de force $\boldsymbol{A}$. La puissance de ce couple sera notée $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{A} \rangle$.

Le Second Principe impose que la puissance de ce couple soit positive, soit :

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{A} \rangle \geq 0. \tag{5.1.85}$$

Hypothèse de dissipativité normale L'hypothèse de dissipativité normale, introduite par Ziegler (1963) suppose l'existence d'une fonction $\Phi(\boldsymbol{a})$, différentiable, minimum et nulle en 0 telle que les lois complémentaires soient données par :

$$A = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{a})}{\partial a}. \tag{5.1.86}$$

Cette définition a été étendue par Moreau (1970, 1971) aux fonctions moins régulières mais sous-différentiables sous d'une inclusion [10] :

$$\boldsymbol{A} \in \partial \Phi(\boldsymbol{a}), \tag{5.1.87}$$

9. D'autres expressions plus ou moins sophistiquées peuvent être utilisées lorsque la cinématique est décrite de manière plus étoffée.

10. On donne en annexe B les détails sur les bases de l'analyse convexe.

où Φ est toujours considérée comme minimum et nulle en 0, soit

$$0 \in \partial\Phi(0). \tag{5.1.88}$$

Cette hypothèse de dissipativité normale postule l'existence d'une fonction qui est appelée un pseudo-potentiel de dissipation. Les forces thermodynamiques $\boldsymbol{A}$ associées aux variables $\boldsymbol{a}$ dérivent donc de ce pseudo-potentiel à la manière d'un potentiel thermodynamique usuel.

Une forme duale des lois complémentaires peut être obtenue en utilisant la transformée[10] de Legendre-Fenchel $\Phi^\star$ de Φ :

$$\boldsymbol{a} \in \partial\Phi^\star(\boldsymbol{A}). \tag{5.1.89}$$

La fonction $\Phi^\star$ est communément appelée le potentiel de force ou encore la loi de force.

Remarquons toutefois que l'hypothèse de dissipativité normale sans autre hypothèse n'implique que l'inégalité (5.1.83) soit satisfaite. Pour cela, une hypothèse supplémentaire de convexité est introduite et conduit à la définition des matériaux standards généralisés.

Milieux standards généralisés Nous dirons qu'un milieu est un milieu standard généralisé si les lois complémentaires suivent l'hypothèse de dissipativité normale, et que l'énergie libre W et le potentiel de dissipation Φ, sont des fonctions convexes de leur arguments.

La convexité du pseudo-potentiel de dissipation permet en premier lieu de profiter des résultats de sous-différentiabilité des fonctions convexes. De plus, sachant que chaque relation de sous-différentiel d'une fonction convexe est monotone[10], i.e. :

$$\boldsymbol{A}' \in \partial\Phi(\boldsymbol{a}'), \quad \boldsymbol{A} \in \partial\Phi(\boldsymbol{a}) \Longrightarrow \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}', \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}' \rangle \geq 0, \tag{5.1.90}$$

l'hypothèse de minimum en 0, i.e. :

$$0 \in \partial\Phi(0), \tag{5.1.91}$$

permet d'assurer que la puissance $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{A} \rangle$ soit positive, en d'autres termes que l'inégalité (5.1.83) issue du Second Principe soit satisfaite. On peut remarquer que la condition (5.1.91) implique que $\Phi(0)$ est finie et qu'elle est la valeur minimale de Φ. Comme la relation de sous-différentiel (5.1.87) n'est pas affectée par l'addition d'une constante à Φ, on peut supposer sans perte de généralité que $\Phi(0) = 0$.

Remarque 5.1

Dans les travaux de Moreau (1970, 1971) et Halphen & Nguyen (1975), l'hypothèse de dissipativité normale suppose l'existence d'une fonction $\Phi(\boldsymbol{a})$ convexe, semi-continue inférieurement, appelée pseudo-potentiel de dissipation telle que l'inclusion suivante soit vérifiée :

$$\boldsymbol{A} \in \partial\Phi(\boldsymbol{a}). \tag{5.1.92}$$

Suivant cette définition, l'hypothèse de dissipativité normale inclut la convexité du pseudo-potentiel de dissipation. Cependant, il peut être intéressant de la séparer comme nous l'avons

fait car certains comportements peuvent être décrits par une loi de normalité sans pour autant avoir la convexité des potentiels.

La semi-continuité inférieure du pseudo-potentiel de dissipation assure que la formulation bi-duale de la loi de comportement est identique à sa formulation primale. De plus, la multi-application sous différentiel de ce pseudo-potentiel est non seulement monotone mais aussi maximale[10]. Ceci est particulièrement intéressant d'un point de vue de l'existence des solutions. En particulier, moyennant quelques hypothèses supplémentaires, HALPHEN & NGUYEN (1975) montrent l'unicité du problème en contraintes et la stabilité au sens de DRUCKER pour les matériaux standards généralisés. On remarque, une fois encore, que les notions de convexité et de normalité sont des notions très importantes pour la stabilité, l'existence et l'unicité des solutions. Ceci vient corréler les remarques du paragraphe 2.6, où l'on a vu que la non-convexité et la caractère non-associé des lois de comportements étaient des sources d'instabilités.

❑

REMARQUE 5.2

Afin de faire un lien avec ce qui a été dit sur les « No-Tension Material », nous donnons l'exemple de la plasticité parfaite qui entre dans le cadre des matériaux standards généralisés.

La variable interne choisie est la vitesse de déformation plastique, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ associé au tenseur des contraintes de CAUCHY, $\boldsymbol{\sigma}$. Soit un ensemble convexe $\mathcal{C} \subset \{Z_s\}$, on peut choisir de définir la relation entre $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ et $\boldsymbol{\sigma}$, correspondant à la plasticité parfaite par le principe de dissipation maximale, ou encore le principe de travail maximum de HILL. En d'autres termes, la relation de plasticité parfaite maximise la puissance $\langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \boldsymbol{\sigma} \rangle$, soit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}, \\ \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{C}, \quad \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \boldsymbol{\sigma} \rangle \geq \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle . \end{cases} \tag{5.1.93}$$

Considérons $\Phi_{\mathcal{C}}$ le fonction indicatrice de $\mathcal{C}$, la propriété (5.1.93) est équivalente à :

$$\forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{C}, \Phi_{\mathcal{C}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) + \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \geq \Phi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}), \tag{5.1.94}$$

soit encore,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \in \partial \Phi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}). \tag{5.1.95}$$

Si de plus le convexe $\mathcal{C}$ contient l'origine, alors on vérifie que $0 \in \partial \Phi_{\mathcal{C}}(0)$ et donc que Φ est dissipative. C'est le potentiel de force du matériau.

Si nous considérons la forme duale de (5.1.95), on écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial \Phi^{\star}_{\mathcal{C}}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p), \tag{5.1.96}$$

où $\Phi^{\star}_{\mathcal{C}}$ est la transformée de LEGENDRE-FENCHEL de $\Phi_{\mathcal{C}}$.

D'après le propriété des fonctions duales, on peut écrire une forme équivalente aux deux inclusions (5.1.95) et (5.1.96)

$$\Phi^{\star}_{\mathcal{C}}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) + \Phi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\sigma}) = \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \boldsymbol{\sigma} \rangle . \tag{5.1.97}$$

La fonction $\varphi : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \longmapsto \Phi^\star_{\mathcal{C}}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$ est la puissance dissipée et peut s'écrire :

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathcal{C}} \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \boldsymbol{\sigma} \rangle \,. \tag{5.1.98}$$

Le relation (5.1.97) peut être écrite sous forme équivalente à

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{C}, \\ \langle \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \boldsymbol{\sigma} \rangle = \varphi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p). \end{cases} \tag{5.1.99}$$

Il est intéressant de remarquer que φ est la fonction d'appui du convexe $\mathcal{C}$, c'est le pseudo-potentiel de dissipation.

❑

5.1.4.e Matériaux standards implicites

De Saxcé (1992) propose de définir une nouvelle classe de matériaux basée sur un potentiel unique fonction des vitesses et des forces thermodynamiques associées. Nous reprenons ici le formalisme introduit dans le paragraphe précédent sur la dualité entre les vitesses et les forces.

Soit une fonction,

$$\begin{aligned} b : \{V\} \times \{F\} &\mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ (v, f) &\mapsto b(v, f), \end{aligned} \tag{5.1.100}$$

convexe par rapport à v à f fixé, et convexe par rapport à f à v fixé. Cette fonction est appelée une bi-potentiel si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\forall (v', f') \in \{V\} \times \{F\}, \qquad b(v', f') \geq \langle v', f' \rangle. \tag{5.1.101}$$

Un couple (v, f) est dit extrémal si l'égalité est atteinte dans (5.1.101) pour ce couple :

$$b(v, f) = \langle v, f \rangle. \tag{5.1.102}$$

Tout couple extrémal vérifie donc :

$$\forall v' \in \{V\}, b(v', f) - b(v, f) \geq \langle v' - v, f \rangle, \tag{5.1.103}$$

$$\forall f' \in \{F\}, b(v, f') - b(v, f) \geq \langle v, f' - f \rangle, \tag{5.1.104}$$

ce qui se traduit en terme de sous-différentiel par :

$$v \in \partial_f b(v, f), \tag{5.1.105}$$

$$f \in \partial_v b(v, f). \tag{5.1.106}$$

De Saxcé (1992) définit un matériau standard implicite comme un matériau dont les comportements correspondent aux couples extrémaux d'un bipotentiel. En d'autres termes, les lois (5.1.105) et (5.1.106) définissent les lois constitutives multivoques d'un tel matériau.

Cette classe de matériau est particulièrement intéressante lorsqu'une certaine convexité des potentiels peuvent être exprimée mais que la loi de normalité n'est plus respectée. En généralisant l'inégalité de FENCHEL, elle permet d'utiliser les techniques et les algorithmes de l'analyse convexe et de la programmation mathématique. Les exemples types de matériaux standards implicites sont les lois de plasticité non associée et de frottement de COULOMB. Nous ne donnerons un exemple dans la partie 5.2.4.

REMARQUE 5.3

La classe des matériaux standards implicites englobe les matériaux standards généralisés usuels. En effet, soit Φ un pseudo-potentiel de dissipation convexe définie sur $\{V\}$ et $\Phi^\star$ sa fonction conjuguée, i.e., le potentiel de force, définie sur $\{F\}$. Ils vérifient l'inégalité de FENCHEL :

$$\forall (v', f') \in \{V\} \times \{F\}, \qquad \Phi(v') + \Phi^\star(f') \geq \langle v', f' \rangle. \tag{5.1.107}$$

En posant,

$$b(v', f') = \Phi(v') + \Phi^\star(f'), \tag{5.1.108}$$

on obtient un bi-potentiel séparé dont les couples extrémaux vérifient les lois suivantes :

$$v \in \partial\Phi^\star(f), \qquad f \in \partial\Phi(v). \tag{5.1.109}$$

Ces lois constitutives qui définissent la classe des matériaux standards généralisés expriment un lien explicite entre les vitesses v et les forces f.

❑

5.2 Contact unilatéral et frottement

Le contact unilatéral et le frottement sec sont les deux éléments principaux du modèle de joint proposé pour les maçonneries et ceci pour plusieurs raisons :

- En qui concerne les joints vifs, le contact peut être considéré comme direct entre les éléments, si on omet dans une première approche des considérations tribologiques fines.
  Il s'agit donc pour la direction normale au joint de rendre compte de l'impénétrabilité et de l'absence d'adhésion entre les éléments. Le contact unilatéral s'impose donc naturellement. Pour le comportement tangent, on a pu noter sur les diverses expériences rapportées dans le § 1.1.2.b la présence d'une force de résistance associée à un seuil de glissement. En outre, ce seuil dépend de la pression normale imposée sur le joint. En première approximation, le frottement de Coulomb répond à toutes ces caractéristiques
- Pour le joint de mortier, le comportement résiduel, i.e. après une phase transitoire où le mortier se dégrade fortement, suit un comportement de type Mohr-Coulomb. Pour les mortiers anciens, qui se dégradent à la moindre sollicitation mécanique, le contact unilatéral associé au frottement sec s'avère être des modèles assez bien adaptés.

Nous tâcherons dans la suite de formuler les équations fondamentales qui régissent le contact unilatéral et le frottement sec à l'interface de solides déformables. Ces équations, dont l'interprétation mécanique est simple ne sont pas sans poser de profonds problèmes mathématiques. Nous commencerons donc par évoquer un cadre à la fois mathématique et mécanique, adapté au traitement des conditions unilatérales parfaites dans les systèmes discret (§ 5.2.1). Ce cadre, proposé par Jean-Jacques Moreau, désigné le plus souvent comme le problème de « rafle par un convexe variable », servira de trame pour les milieux continus que nous traiterons ensuite.

Enfin, nous donnerons les principales formulations du contact unilatéral (§ 5.2.3) et du frottement (§ 5.2.4) qui nous seront utiles lors de la résolution numérique de ces comportements.

5.2.1 Les liaisons unilatérales parfaites et les systèmes discrets

Sans entrer dans les détails mathématiques traitant des liaisons unilatérales, nous allons rappeler brièvement dans quel cadre elles peuvent être modélisées par la mécanique analytique. Comme nous le disions, cette présentation est largement inspiré des travaux de Jean Jacques Moreau sur le contact unilatéral et le frottement dans les systèmes discrets. Ce résumé, parfois grossier, ne prétend pas offrir une présentation rigoureuse et complète du sujet. Il s'agit tout d'abord de donner quelques lumières sur la difficulté de traiter des conditions unilatérales dans les systèmes mécaniques. En particulier, le caractère non régulier des vitesses aux instants de contact oblige à considérer des fonctions en temps, qui ne sont plus continues, mais seulement à variations bornées. Nous verrons que l'analyse convexe et les mesures différentielles semblent être les outils adéquats pour formuler et résoudre ces problèmes.

Sans faire de lien précis avec la mécanique des milieux continus, cette présentation succincte a pour but de donner des indications sur le traitement des conditions unilatérales imposées sur les

particules de la frontière d'un milieu continu. Même si le cadre formel est bien différent lorsque l'on considère des systèmes de liberté infinie, ces indications seront précieuses lors de la résolution numérique d'un problème de liberté finie discrétisé en espace.

Pour une présentation détaillée concernant les systèmes discrets, le lecteur intéressé pourra consulter les travaux fondamentaux de Moreau (1974, 1983, 1985, 1988, 1998). L'ensemble de cette œuvre offre non seulement une formulation rigoureuse du problème mais aussi un grand nombre de résultats, tant au niveau mathématique que mécanique, sur les systèmes discrets en présence de conditions unilatérales.

5.2.1.a Condition unilatérale - Cône normal et cône tangent au contact

Dans cette partie, on considère la donnée d'un système lagrangien dont la configuration Ω^t est définie par un ensemble fini de coordonnées généralisées $\boldsymbol{q}$. On dira que le système est soumis à des liaisons unilatérales, si sa configuration représentée par $\boldsymbol{q}$ est contrainte par les inégalités suivantes :

$$f_\alpha(\boldsymbol{q}) \leq 0, \quad \alpha \in [\![1, \nu]\!] \tag{5.2.1}$$

où f_α est une fonction réelle, appartenant à $\mathcal{C}^1$, dont les gradients $\nabla_{\boldsymbol{q}} f_\alpha$ sont supposés non nuls (au moins pour $\boldsymbol{q}$ voisin de l'hypersurface $f_\alpha(\boldsymbol{q}) = 0$).

Le système est donc contraint à évoluer dans le sous-espace Φ de l'espace des configurations, défini par :

$$\Phi = \bigcap_{\alpha \in [\![1,\nu]\!]} \{\boldsymbol{q} / f_\alpha(\boldsymbol{q}) \leq 0\} \tag{5.2.2}$$

L'ensemble des configurations d'un système mécanique, même de liberté finie n'a pas a priori de structure vectoriel mais s'apparente le plus souvent à une variété différentielle. Comme pour l'introduction des déformations dans une théorie du premier gradient, on identifie localement autour d'un point $\boldsymbol{q}$ l'espace tangent en $\boldsymbol{q}$ avec la variété. Cet espace vectoriel tangent est noté dans la suite $\mathcal{E}$.

La structure vectorielle de l'espace tangent, $\mathcal{E}$, permet d'introduire un produit scalaire et une norme associée [11]. La notion de convexité est alors disponible pour les cônes tangent et normal à Φ au point $\boldsymbol{q}$. On donnera pas ici de détails sur les fondements de l'Analyse Convexe. On renvoie pour plus de détails aux ouvrages de référence suivants : (Moreau, 1967 ; Rockafellar, 1970).

Introduisons tout d'abord l'ensemble $J(\boldsymbol{q})$ des indices où les inégalités sont atteintes ou violées :

$$J(\boldsymbol{q}) = \{\alpha \in [\![1, \nu]\!] / f_\alpha(\boldsymbol{q}) \geq 0\} \tag{5.2.3}$$

Le cône tangent est défini par :

$$V(\boldsymbol{q}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathcal{E} / \quad \forall \alpha \in J(\boldsymbol{q}),\ \langle \boldsymbol{v}, \nabla_q f_\alpha(\boldsymbol{q}) \rangle \leq 0\}. \tag{5.2.4}$$

11. Nous verrons, dans la suite, qu'un choix pertinent pour cette norme est de considérer la puissance des efforts de liaisons

Le cône normal peut être défini comme le polaire de $V(\boldsymbol{q})$ de la manière suivante :

$$N(\boldsymbol{q}) = \{\boldsymbol{t} \quad / \quad \forall \boldsymbol{v} \in V(\boldsymbol{q}), \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v} \rangle \leq 0\} \tag{5.2.5}$$

Il s'agit, plus simplement, du cône engendré par les $\nabla_q f_\alpha(\boldsymbol{q}), \alpha \in J(\boldsymbol{q})$. Si $J(\boldsymbol{q}) = \emptyset$, le cône normal $N(\boldsymbol{q})$ est réduit de manière conventionnelle au zéro de $\mathcal{E}$.

Si les fonctions réelles f_α ne sont pas assez régulières pour considérer leur gradient en tout point $\boldsymbol{q}$, on fait appel à la notion de sous-différentiel [4]. Le cône normal peut alors être confondu avec son sous-différentiel.

La description mécanique d'une liaison ne se réduit pas à une contrainte géométrique donnée par les inéquations (5.2.1). La prédiction du mouvement nécessite une information supplémentaire sur la force duale $\boldsymbol{r}$ au paramétrage $\boldsymbol{q}$. Pour peu que l'on considère que l'énergie cinétique est une forme quadratique à coefficients constants, le mouvement d'un système de liberté finie est dicté par un système différentiel qui peut être mis sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t) + \boldsymbol{r} \tag{5.2.6}$$

où $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t)$ représente l'ensemble des forces extérieures et intérieures que subit le système à l'exception des efforts de liaisons représentés par $\boldsymbol{r}$.

Considérons la force $\boldsymbol{r}_\alpha$ introduite pour respecter la liaison α. Cette réaction engendrée par la liaison peut être décrite ainsi :

- Si $f_\alpha(\boldsymbol{q}) < 0$, i.e., le contact α n'a pas lieu alors

$$\boldsymbol{r}_\alpha = 0 \tag{5.2.7}$$

- Si $f_\alpha(\boldsymbol{q}) = 0$, un résultat classique de mécanique analytique impose pour une liaison parfaite [12] :

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad / \quad \boldsymbol{r}_\alpha = -\lambda_\alpha \nabla_q f_\alpha(\boldsymbol{q}) \tag{5.2.8}$$

  En cas de contact, le corps subit une réaction dirigée vers son intérieur qui se traduit par $\lambda_\alpha \geq 0$. Cette hypothèse implique l'absence d'adhésion éventuelle.

Ce résultat peut se résumer sous la forme de l'inclusion suivante :

$$-\boldsymbol{r}_\alpha \in N(\boldsymbol{q}) \tag{5.2.9}$$

5.2.1.b Mouvement régulier et mouvement non régulier

Considérant l'inclusion 5.2.9 et le système différentiel 5.2.6, le mouvement d'un système discret est donc régi par l'inclusion différentielle sur $\mathcal{E}$ suivante :

$$-\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t) \in N(\boldsymbol{q}) \tag{5.2.10}$$

12. On trouvera dans (Moreau, 1974) une démonstration de ce résultat qui se base sur un développement limité de f_α. En choisissant de se limiter au premier ordre ce qui revient à choisir la vitesse (ou un déplacement infinitésimal) dans $\mathcal{E}$, l'auteur montre que pour une liaison bilatérale parfaite (dont la puissance virtuelle est nulle) la vitesse est nécessairement contenue dans l'espace affine tangent à $f_\alpha(\boldsymbol{q})$ et $\boldsymbol{r}_\alpha$ normal à cet espace.

auquel il faut joindre les conditions géométriques :

$$\forall t, \quad \boldsymbol{q} \in \Phi \tag{5.2.11}$$

L'écriture de l'inclusion différentielle (5.2.10) a été faite en supposant implicitement que l'accélération $\ddot{\boldsymbol{q}}$ était définie comme la dérivée au sens élémentaire de la vitesse. Or on sait que la présence des conditions unilatérales implique la plupart du temps des discontinuités sur les vitesses si des contacts cessent ou se créent. Ces discontinuités sur la vitesse du système relèvent alors du domaine de la mécanique des chocs. Nous n'entrerons pas dans les détails de ce domaine de la mécanique mais donnons juste deux écritures des équations du mouvement caractérisant les mouvements réguliers et non réguliers des systèmes discrets.

Caractérisation des mouvements réguliers Des informations mécaniques supplémentaires peuvent être données sur les limites temporelles des vitesses. Supposons en effet que la limite à droite de la vitesse $\dot{\boldsymbol{q}}^+(t)$ existe, on obtient naturellement :

$$\dot{\boldsymbol{q}}^+(t) \in V(\boldsymbol{q}(t)) \tag{5.2.12}$$

Pour la limite à gauche, elle appartient symétriquement à $-V(\boldsymbol{q}(t))$. Pour les mouvements réguliers, la vitesse $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ est dérivable bilatéralement et appartient donc à $-V(\boldsymbol{q}(t)) \cap V(\boldsymbol{q}(t))$ qui est l'espace orthogonal à $N(\boldsymbol{q})$. Une inclusion plus forte peut alors être formulée :

$$-\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t) \in \partial\Psi_{V(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{u}) \tag{5.2.13}$$

où $\Psi_{V(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{u})$ est la fonction indicatrice du cône $V(\boldsymbol{q})$ prise au point $\boldsymbol{u}$. La vitesse est considérée intégrable au sens de Lebesgue et reliée à $\boldsymbol{q}$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t} \boldsymbol{u}(\tau)\, d\tau \tag{5.2.14}$$

Moreau (1988) a montré le résultat suivant :

Soit $\boldsymbol{q}(t)$ et $\boldsymbol{u}(t)$ associés par l'intégrale (5.2.14) et $\boldsymbol{u}$ est intégrable au sens de Lebesgue. Si $\boldsymbol{q}(\tau_0) \in \Phi$ et si $\forall t \geq \tau_0, \boldsymbol{u}(t) \in V(\boldsymbol{q}(t))$ alors $\boldsymbol{q}(t) \in \Phi, \quad \forall t \geq \tau_0$.

Ce résultat est particulièrement intéressant d'un point de vue pratique car il montre que les conditions géométriques sur $\boldsymbol{q}$ (5.2.11) sont devenues redondantes et que seule l'inclusion en vitesse est suffisante (5.2.13).

Remarque 5.4

Brogliato (1996) dans son ouvrage de synthèse sur la mécanique non régulière des impacts relate de nombreux exemples très simples où la vitesse est non régulière à l'instant du contact. Il donne aussi l'exemple très didactique du yo-yo, où la condition unilatérale est donné par longueur maximale du fil. La vitesse à gauche, à l'instant où la condition unilatérale est atteinte, est tangente au gradient de la condition unilatérale. On constate alors qu'il n'y a pas de chocs dans le système. Cet exemple illustre bien le type de mouvement régulier qui peuvent être traiter par l'inclusion (5.2.13).

❑

Mouvements non réguliers Pour des mouvements non réguliers, l'accélération ne peut être envisagée comme la dérivée au sens élémentaire de la vitesse susceptible d'être discontinue. Moreau (1977) [13] propose un cadre mathématique adéquat pour reformuler l'inclusion différentielle. Nous allons en donner brièvement les éléments principaux.

Les vitesses discontinues sont considérées appartenir à l'ensemble des fonctions à variation bornées continues à droite [14]. Pour chaque élément $\boldsymbol{u}$ de cet ensemble, on peut associer à sa dérivée une mesure différentielle (appelée aussi mesure de Stieltjes) notée $d\boldsymbol{u}$ qui vérifie pour un intervalle compact $[t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t_2^+) - \boldsymbol{u}(t_1^-) \tag{5.2.15}$$

Cette mesure différentielle assez naturelle peut être interpréter de la manière suivante. Si à l'instant $t = t_1 = t_2$, $\boldsymbol{u}$ est discontinue, $d\boldsymbol{u}$ est une distribution de Dirac à ce point dont l'intégrale est égale au saut de déplacement. Du point de la mécanique, on peut dire de manière heuristique que l'on envisage à chaque collision, une impulsion sur l'accélération qui correspond bien à l'impulsion constatée lors d'un choc.

Ce cadre mathématique permet d'écrire le système différentiel des équations du mouvement au sens des mesures :

$$-\boldsymbol{M}d\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t)dt = d\boldsymbol{r}, \tag{5.2.16}$$

où $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}dt$ représente l'impulsion totale générée par les conditions unilatérales.

5.2.1.c Enseignements pour une application aux milieux déformables.

Il est clair que pour une application aux milieux continus discrétisés en espace, comme il sera présenté au § 6.1, les travaux de Jean-Jacques Moreau fournissent des conseils précieux. Essayons, dans ce paragraphe, d'en tirer quelques enseignements.

Le premier de ces enseignements est que le mouvement est régulier, si il respecte le principe suivant : la vitesse doit appartenir à l'orthogonal du cône normal. Deux cas sont alors possibles, soit le mouvement naturellement conduit à respecter cette règle, soit on contraint cette règle supplémentaire en considérant soit un choc mou, soit une inclusion sur les vitesses. Il est à noter que pour les mouvements supposés réguliers, une inclusion écrite en vitesse conduit à un respect des liaisons unilatérales écrites sur le jeu de paramètres.

Pour les mouvements non réguliers, une estimation ponctuelle de l'accélération n'a pas de sens, en particulier aux instants de contact. Seul une forme faible, où si l'on préfère au sens des distributions, garde un sens mathématique correct. Il en est de même pour les réactions au contact. Seules les notions d'impulsion moyenne et d'intégrale de mesure différentielle estimant le saut de vitesses sont pertinentes.

13. voir aussi (Moreau, 1985, 1988) dans un cadre plus mécanique

14. On rappelle qu'une fonction à variations bornées admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

Les conclusions qui peuvent être tirées quant à la résolution de ces équations sont nombreuses. En particulier, les approximations de l'accélération par des schémas s'appuyant sur des développements de TAYLOR ne sont pas autorisées. De même pour la vitesse, seule une approximation à partir de la mesure différentielle peut être réalisée.

Dans la suite, en particulier lorsqu'il sera question d'intégration temporelle des équations du mouvement(§ 6.2), nous essaierons de garder ces recommandations à l'esprit. Nous verrons que les schémas utilisés ne feront pas d'approximation d'ordre élevé de la vitesse. De plus, les impulsions, ainsi que les vitesses, seront les variables de choix des algorithmes.

5.2.2 Cinématique et sthénique du contact pour les milieux déformables

Nous allons maintenant nous intéresser au cas de deux solides déformables interagissant par l'intermédiaire de liaisons qui s'appliquent aux particules de leurs frontières.

Cas général des solides déformables Dans le cas des systèmes composés de rigides, une description des liaisons — condition unilatérale, vitesse, effort — est formulée, le plus souvent, directement en fonction du jeu de paramètres décrivant le système. On évite ainsi l'introduction de nouvelles variables redondantes. Pour ce qui est des solides déformables, l'habitude veut que l'on introduise des variables locales. Cette opération simplifie grandement les écritures des liaisons, en particulier, si des comportements plus compliqués sont introduits (complaisance, adhésion, *etc*...)

Nous allons présenter, dans un premier temps, ces nouvelles variables dédiées à la description des liaisons dans un repère local à celles-ci. Nous parlerons indifféremment des variables de contact ou de variables locales. De même, le terme contact sera utilisé pour des liaisons ne modélisant pas seulement le contact unilatéral. Ces abus de langage sont introduits pour alléger le texte.

Applications aux maçonneries En ce qui concerne les applications aux maçonneries, les corps en interconnection seront les éléments de la structure. Les liaisons modéliseront donc les efforts que le joint transmet aux deux blocs. Si le joint est vif, nous aurons des conditions de contact classique, sans troisième corps. Si le joint est épais et que le mortier est présent, une interphase d'épaisseur non nulle sépare les éléments. Nous supposerons que la distance d'interaction entre les deux solides est faible devant leurs taille caractéristique, de manière à pouvoir considérer ce troisième corps comme une interface.

Si on fait l'hypothèse que le comportement des joints se résume à celui d'une interface, on privilégie alors deux directions qui sont la direction normale et la direction tangentielle. Ces directions forment le repère local de l'interface que nous essaierons de définir précisément. Nous verrons ensuite comment la cinématique du contact est modifiée pour tenir compte du joint épais.

5.2.2.a Fonction interstice

Soit Ω^1 et Ω^2 deux corps déformables représentés par leur configuration à l'instant t, on suppose la donnée de deux portions de leurs frontières respectives susceptibles d'entrer en contact, $\Gamma_c^1 \subset \Gamma^1$ et $\Gamma_c^2 \subset \Gamma^2$. Nous noterons par $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ la distance euclidienne entre $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de l'espace dans lequel sont plongées les configurations ($\mathbb{R}^{nd}$, $nd \in [\![1, 3]\!]$). Considérons une particule $\boldsymbol{x} \in \Gamma_c^1$, on note $d(\boldsymbol{x}, \Gamma_c^2)$ la distance de cette particule à Γ_c^2 :

$$d(\boldsymbol{x}, \Gamma_c^2) = \min_{\bar{\boldsymbol{y}} \in \Gamma_c^2} \{d(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}})\} \tag{5.2.17}$$

L'ensemble $\{\boldsymbol{y}\}$ des points qui réalisent ce minimum n'a a priori aucune chance d'être réduit à un singleton. Nous nous placerons pourtant dans les conditions où la donnée de Γ_c^2 permet de faire cette hypothèse. Si $\boldsymbol{y}$ est l'unique point à réaliser ce minimum, il est donné par l'équation suivante :

$$\boldsymbol{y} = \underset{\bar{\boldsymbol{y}} \in \Gamma_c^2}{\operatorname{argmin}} \{\frac{1}{2} \|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{y}}\|^2\} \tag{5.2.18}$$

soit en termes de variables lagrangiennes :

$$\boldsymbol{Y} = \underset{\bar{\boldsymbol{Y}} \in {}_0\Gamma_c^2}{\operatorname{argmin}} \{\frac{1}{2} \|\chi(\boldsymbol{X}, t) - \chi(\bar{\boldsymbol{Y}}, t)\|^2\} \tag{5.2.19}$$

La fonction à minimiser, $G(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{Y}}) = \frac{1}{2} \|\chi(\boldsymbol{X}, t) - \chi(\bar{\boldsymbol{Y}}, t)\|^2$ est préférée à la distance elle-même. On voit qu'une condition suffisante pour qu'un unique point réalise ce minimum est que G soit strictement convexe. En faisant un calcul élémentaire de variations sur G, on montre que le point $\boldsymbol{y}$ est tout simplement la projection orthogonale de $\boldsymbol{x}$ sur le plan tangent en $\boldsymbol{y}$ à Γ_c^2, définissant, par là, une normale unitaire sortante Ω_2 notée $\boldsymbol{n}$.

La fonction interstice g est définie alors de la manière suivante :

$$g(\boldsymbol{x}) : \Gamma_c^1 \longmapsto \mathbb{R} \tag{5.2.20}$$

$$\boldsymbol{x} \longmapsto (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).\boldsymbol{n} \quad \text{avec } \boldsymbol{y} = \underset{\bar{\boldsymbol{y}} \in \Gamma_c^2}{\operatorname{argmin}} \{\frac{1}{2} \|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{y}}\|^2\} \tag{5.2.21}$$

La condition d'impénétrabilité de la particule $\boldsymbol{x}$ dans le corps Ω_2 s'exprime donc ainsi :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \Gamma_c^1, \qquad g(\boldsymbol{x}) \geq 0 \tag{5.2.22}$$

L'approche du contact employée ici est une approche maître-esclave ; nous parlerons plutôt de candidat et d'antagoniste au contact. Bien que notre termilogie n'introduit pas de hiérarchie, on voit tout de même que le traitement du contact est dissymétrique. En effet, la particule $\boldsymbol{x}$ de Γ_c^1, que nous appellerons particule candidate au contact est choisie pour entrer en contact avec la particule $\boldsymbol{y}$ que nous appellerons particule antagoniste au contact. On désigne parfois même la surface Γ_c^2 comme la surface antagoniste. Dans la pratique, on voit que l'approche n'est pas symétrique puisque l'on envisage en quelques sortes le contact d'une particule candidate sur une surface antagoniste. Il est tout de même important de noter que, lorsque les particules sont en

contact, la particule candidate coïncide avec la particule antagoniste, quelque soit le choix du corps antagoniste.

Dans cette approche, le siège du contact se situe sur la surface antagoniste, Γ_c^2. En cas de contact unilatéral, la dissymétrie entre Γ_c^1 et Γ_c^2 disparaît au moins localement puisque l'on confond alors les plans tangents aux deux surfaces au contact.

Nous verrons que dans le cas du joint épais, cette approche n'est pas sans poser de problèmes.

5.2.2.b Repère local au contact

Pour considérer les grandeurs cinématiques et sthéniques au contact, on définit un repère local au contact par la donnée de :

- un vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$ construit par la projection de la particule candidate sur la surface antagoniste.
- deux vecteurs tangents $\boldsymbol{t}$ et $\boldsymbol{s}$ de telle sorte que $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})$ constitue une repère orthonormé direct.

Les grandeurs locales au contact seront représentées suivant leur composante normale et tangentielle. La vitesse relative entre les particules candidates et antagonistes sera par exemple écrite de la manière suivante :

$$\boldsymbol{v} = v_{\mathrm{N}}.\boldsymbol{n} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{T}} \tag{5.2.23}$$

De la même manière, on notera la réaction $\boldsymbol{r}$ de l'antagoniste sur le candidat généré par le contact par ses composantes normales et tangentielles :

$$\boldsymbol{r} = r_{\mathrm{N}}.\boldsymbol{n} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} \tag{5.2.24}$$

Remarque 5.5

Il est intéressant de noter que la dérivée temporelle de g coïncide avec v_{N}, la vitesse relative normale :

$$v_{\mathrm{N}} = \frac{d\,g}{dt} \tag{5.2.25}$$

Comme le fait remarquer Moreau, ceci n'est plus vrai pour l'accélération où par exemple certains termes d'accélération dus à des rotations éventuelles possède des composantes normales.

❑

5.2.2.c Cas du joint épais

Dans le cas du joint épais, on considérera que l'interstice au temps initial $g_0(\boldsymbol{x})$ donne une estimation de l'épaisseur du joint. Si l'on considère que les corps sont en contact dès l'instant initial par l'intermédiaire de ce joint, on fait l'hypothèse que l'impénétrabilité s'exprime par :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \Gamma_c^1, \qquad \tilde{g}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) - g_0(\boldsymbol{x}) \geq 0 \tag{5.2.26}$$

En ce qui concerne la définition du repère local, quelques approximations sont faites en s'appuyant sur l'hypothèse que les variations d'épaisseur du joint sont faibles. Comme nous

l'avons déjà évoqué, le siège du contact a lieu sur la surface antagoniste. On définit donc la direction de glissement par rapport au plan tangent à Γ_c^2. Si les plans tangents des surfaces en contact au point $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont parallèles, cette direction de glissement semble correcte. Si ce n'est pas le cas, on considère une direction de glissement « moyenne » donnée par les directions principlaes d'un « plan séparateur ». Nous examinons au § 7.3.3 le cas particulier où les surfaces de contact sont décrites par des assemblages de facettes planes issues de la discrétisation spatiale du problème. Nous donnerons alors plus de détails sur la contruction de ce « plan séparateur ».

5.2.3 Contact unilatéral - Condition de Signorini

La condition de Signorini est la condition unilatérale usuelle pour modéliser le contact parfait sans adhésion. La condition géométrique appliquée à la particule candidate exprime l'impénétrabilité de celle-ci vis à vis du corps antagoniste au moyen de la fonction interstice :

$$g \geq 0 \tag{5.2.27}$$

Comme nous l'avons pour les systèmes discrets, la condition géométrique (5.2.27) doit être accompagnée d'informations supplémentaires sur la réaction $\boldsymbol{r}$ engendrée par le contact. Cette réaction est normale pour un contact parfait et doit satisfaire les conditions suivantes :

$$\text{Si} \quad g > 0, \qquad r_{\text{N}} = 0, \qquad \text{(Pas de contact)}, \tag{5.2.28}$$

$$\text{Si} \quad g = 0, \qquad r_{\text{N}} \geq 0, \qquad \text{(Contact)} \tag{5.2.29}$$

Nous avons choisi de garder la convention de la mécanique analytique qui considère que la réaction de contact est une action extérieure qui produit un effort orienté vers l'intérieur du corps candidat. Si l'on considère la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ qui règne dans la corps, sur la surface potentielle de contact Γ_c^1, on peut écrire :

$$r_{\text{N}} = -\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}, \qquad \text{sur } \Gamma_c^1 \tag{5.2.30}$$

Une réaction positive produit donc une contrainte négative de compression dans le corps.

La condition de Signorini peut être écrite sous la forme plus compact d'une condition de complémentarité usuelle :

$$g \geq 0, \qquad r_{\text{N}} \geq 0, \qquad g\, r_{\text{N}} = 0. \tag{5.2.31}$$

Le formalisme de l'analyse convexe peut être introduit dans le même esprit que pour les systèmes discrets. Le système d'équations (5.2.31) est équivalent aux formulations suivantes :

$$-r_{\text{N}} \in \partial\Psi_{\mathbb{R}^+}(g) \tag{5.2.32}$$

$$g \in \partial\Psi^{\star}_{\mathbb{R}^+}(-r_{\text{N}}) = \partial\Psi_{\mathbb{R}^-}(-r_{\text{N}}) \tag{5.2.33}$$

où la fonction, $\Psi_{\mathbb{R}^+}$, est l'indicatrice de $\mathbb{R}^+$.

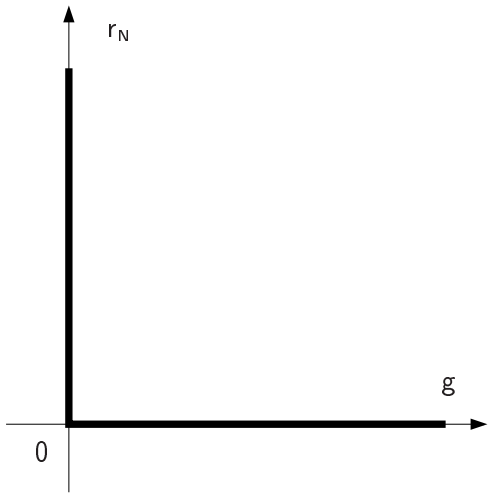


FIGURE 5.1 – *Condition de* SIGNORINI

Nous résumerons dans la suite la condition de SIGNORINI qui lie l'interstice g et la réaction normale par r_{N}, illustrée à la figure 5.1, par la notation formelle :

$$(g, r_{\mathrm{N}}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Signorini} \tag{5.2.34}$$

REMARQUE 5.6

L'écriture des inclusions (5.2.32) s'appuie sur une relation entre un déplacement relatif g et une force r_{N}. Cette écriture s'intègre parfaitement dans le cadre thermodynamique donné au § 5.1.4 en considérant une notion de loi de comportement étendues aux surfaces. On fait alors l'hypothèse que le comportement de la surface déduit d'un potentiel d'énergie libre de surface W_S dépendant de la variable g donné par :

$$W_S(g) = \Psi_{\mathrm{IR}^+}(g) \tag{5.2.35}$$

Cette énergie libre de surface rend bien compte d'un processus réversible, et par conséquent non dissipatif. On remarque que la loi de comportement s'écrit sur la variable g et non sur sa vitesse v_{N} ; elle s'apparente bien à une loi d'élasticité non-linéaire. Si l'on reprend les notations du § 5.1.4, cette loi de comportement surfacique s'exprime par :

$$-r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} \in \partial W_S(g) \tag{5.2.36}$$

❑

REMARQUE 5.7

Une condition de SIGNORINI dite en vitesse peut tout à fait être formulée :

$$v_{\mathrm{N}} \geq 0, \qquad r_{\mathrm{N}} \geq 0, \qquad v_{\mathrm{N}}\, r_{\mathrm{N}} = 0. \tag{5.2.37}$$

Plusieurs interprétations peuvent être données à cette condition. Dans le cas de mouvements réguliers (voir § 5.2.1.b), la condition de SIGNORINI usuelle (5.2.31) peut être substituée par

cette condition en vitesse. Pour des mouvements non réguliers, elle introduit une dissipation à l'interface. Cette dissipation peut être vue comme la conséquence d'une hypothèse de choc mou.

D'un point de vue pratique, elle conduit à une non restauration des pénétrations suite à une création de contact avec une vitesse normale non nulle. Elle a par contre de nombreux avantages du point de vue de la résolution numérique des problèmes de contact. Elle offre, en effet, une stabilité supplémentaire aux algorithmes. Ce point sera discuté plus en détail au § 6.2.3.

❑

5.2.4 Frottement sec - Frottement de Coulomb

Le frottement sec est introduit usuellement pour exprimer la résistance au glissement tangentiel de deux corps en contact. Les lois que nous allons introduire ici sont assez simples en introduisant tout d'abord un seuil de résistance tangentielle puis en faisant dépendre ce seuil de la réaction normale, pour obtenir la loi de Coulomb.

Comme nous l'avons déjà évoqué dans la première partie, ces lois sont simples devant la complexité des phénomènes mis en jeu lors du glissement. Une description plus fine demande de faire appel à des considérations tribologiques à l'échelle microscopique du contact. Le frottement à seuil reste un moyen fiable de rendre compte du comportement macroscopique du glissement de corps en contact unilatéral.

5.2.4.a Frottement sec à seuil k

On suppose pour décrire ce modèle l'existence d'un seuil k sur la norme de la réaction tangentielle tel que l'on ait :

$$\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\| > 0, \qquad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\| = k, \qquad \frac{\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\|} = -\frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\|}, \qquad \text{(Glissement)} \tag{5.2.38}$$

$$\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\| = 0, \qquad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\| < k, \qquad \text{(Non glissement)} \tag{5.2.39}$$

D'une manière générale, l'existence du frottement est subordonnée à l'existence du contact, i.e., $r_{\mathrm{N}} > 0$. Pour $r_{\mathrm{N}} = 0$, un choix basé sur la physique du contact impose que k soit nul. Ceci n'est pas sans poser quelques soucis pour un seuil constant.

Là encore, on peut exprimer une forme plus compacte imitant une condition de complémentarité :

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}} = -\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\|\frac{\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\|}, \qquad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\| \leq k, \qquad \|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\|(\|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\| - k) = 0 \tag{5.2.40}$$

Introduisons maintenant le convexe $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\| \leq k\} \tag{5.2.41}$$

et sa fonction indicatrice $\Psi_{\mathcal{C}}$. La condition de complémentarité peut alors être exprimée par les inclusions suivantes :

$$-\boldsymbol{v} \in \partial\Psi_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{r}) \tag{5.2.42}$$

$$\boldsymbol{r} \in \partial\Psi^{\star}_{\mathcal{C}}(-\boldsymbol{v}) \tag{5.2.43}$$

Ces formulation sont un peu plus complètes que la simple condition (5.2.40) puisqu'elles imposent des conditions supplémentaires sur la vitesse normale. Nous verrons que suivant le choix de k ces conditions peuvent conduire à des incompatibilités de modélisation avec la persistance du contact pendant le glissement. L'écriture sous la forme de l'inclusion (5.2.42) fait entrer le frottement sec dans la classe des matériaux standards généralisés. En profitant de la relation de monotonie des sous-différentiels, on peut formuler un principe de dissipation maximale :

$$\boldsymbol{r} \in \mathcal{C}, \qquad \forall \hat{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{C}, \qquad -\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} - \hat{\boldsymbol{r}}) \geq 0 \tag{5.2.44}$$

Pour éviter, les interactions avec le contact unilatéral, il est usuel d'écrire ces inclusions uniquement sur la partie tangentielle de $\boldsymbol{r}$ en considérant le disque $D(k)$ défini par

$$\mathcal{D}(k) = \{\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2, \quad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\| \leq k\}. \tag{5.2.45}$$

On écrit alors les inclusions suivantes restreintes aux parties tangentielles de la réaction :

$$-\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}} \in \partial\Psi_{\mathcal{D}(k)}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}) \tag{5.2.46}$$

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} \in \partial\Psi^{\star}_{\mathcal{D}(k)}(-\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}) \tag{5.2.47}$$

On peut alors écrire l'équivalent d'un principe de dissipation maximale :

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} \in \mathcal{C}, \qquad \forall \hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{T}} \in \mathcal{C}, -\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} - \hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{T}}) \geq 0 \tag{5.2.48}$$

Il est important de remarquer que ces dernières équations ne donnent pas l'assurance que le frottement suit la règle de normalité. Le système (5.2.48) est intéressant pour écrire les frottements non-standards comme le frottement de Coulomb que nous allons étudier dans la suite. Pour l'instant, intéressons nous à un frottement sec un peu particulier qui est le frottement de Tresca

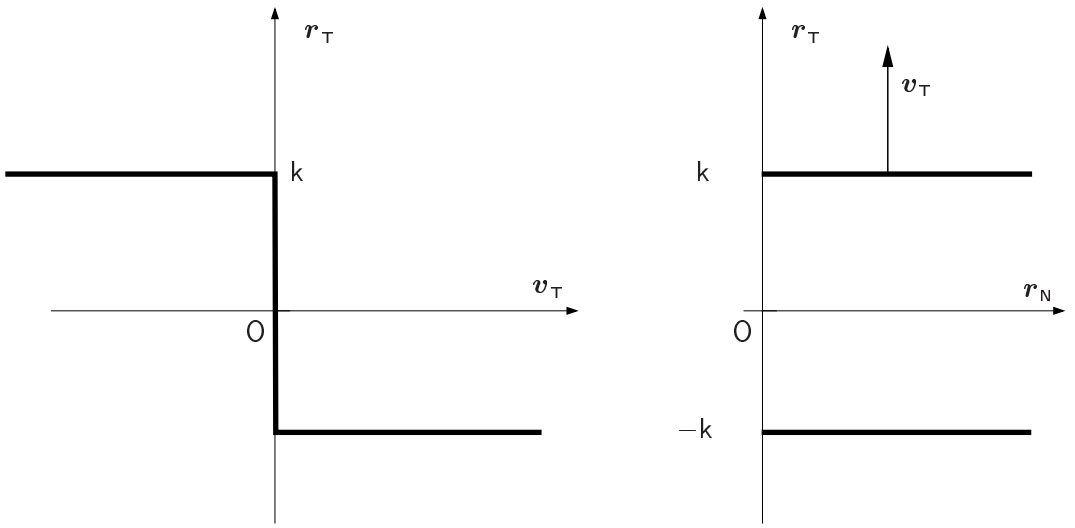
Cas particulier du frottement de Tresca Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que k est constant, on parle alors de frottement sec de Tresca. L'écriture de l'inclusion (5.2.42) sur $\boldsymbol{r}$ impose une condition compatible avec le contact unilatéral ($v_{\mathrm{N}} = 0$). Il s'écrit donc naturellement dans le cadre standard généralisé et respecte le principe de normalité 5.2(b). On illustre cette propriété à la figure 5.2.

Ce type de frottement est le plus souvent utilisée dans les developpemetns mathématiques concernant le frottement. Sa définition pour $r_{\mathrm{N}} = 0$ est par contre un point non trivial d'un point de vue physique.

5.2.4.b Frottement de Coulomb

De façon générale, les seuils de frottement k sont caractérisés par une forte dépendance à la réaction normale. Le moyen le plus simple d'introduire cette dépendance est de supposer l'existence d'un coefficient de frottement μ tel que

$$k = \mu r_{\mathrm{N}}. \tag{5.2.49}$$



(a) Graphe de Tresca (b) Cylindre de Tresca

Figure 5.2 – *Frottement de* Tresca

Le seuil de frottement dépend alors explicitement de la pression de manière linéaire. On peut alors donner la condition qui relie la vitesse de glissement $\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}$ à la réaction tangentielle $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}} = \|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\|\frac{\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\|}, \qquad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\| \leq \mu r_{\mathrm{N}}, \qquad \|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\|(\|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\| - \mu r_{\mathrm{N}}) = 0 \tag{5.2.50}$$

Les inclusions peuvent être écrite en introduisant $\mathcal{D}(\mu r_{\mathrm{N}})$ sous la forme suivante :

$$-\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}} \in \partial\Psi_{\mathcal{D}(\mu r_{\mathrm{N}})}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}) \tag{5.2.51}$$

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} \in \partial\Psi^{\star}_{\mathcal{D}(\mu r_{\mathrm{N}})}(-\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}) \tag{5.2.52}$$

Remarque 5.8

Les inclusions peuvent être interprétées comme des lois de comportement rendant compte d'un processus dissipatif. On choisit alors comme pseudo-potentiel de dissipation surfacique, Φ_S, la fonction donnée par :

$$\Phi_S(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}) = \Psi^{\star}_{\mathcal{D}(\mu r_{\mathrm{N}})}(-\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}) = \mu r_{\mathrm{N}}\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\|. \tag{5.2.53}$$

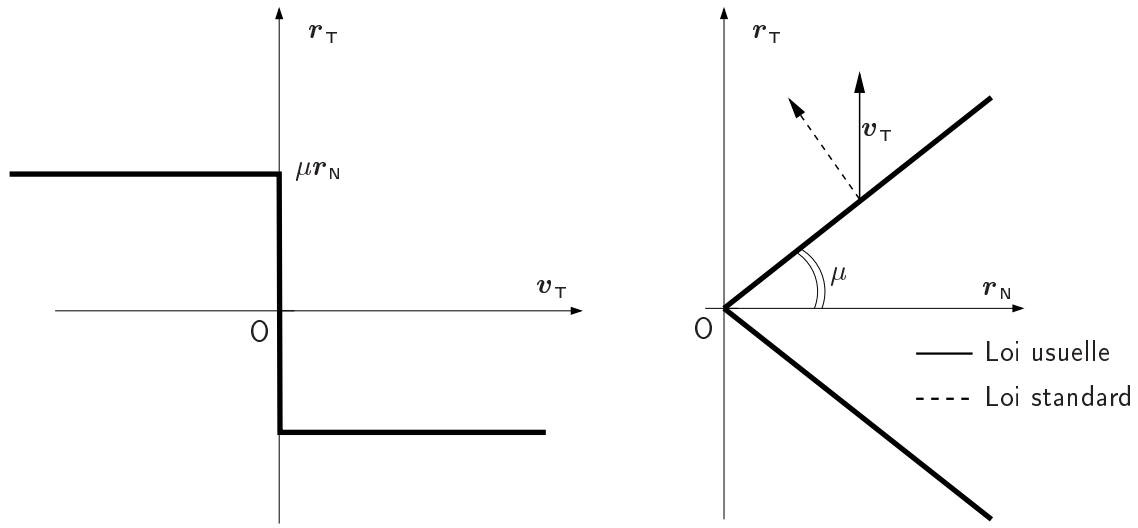
La loi de comportement irréversible s'esprime par :

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{IR}} \in \Phi_S(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}) \tag{5.2.54}$$

❑

Nous résumerons dans la suite la loi de frottement de Coulomb, illustrée à la figure 5.3(a), qui relie la vitesse tangentielle $\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}$ à la réaction tangentielle $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$ par la notation formelle suivante :

$$(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Coulomb}(\mu r_{\mathrm{N}}) \tag{5.2.55}$$



(a) Graphe de Coulomb (b) Cône de Coulomb

Figure 5.3 – *Frottement de* Coulomb

Remarque 5.9

Comme on l'a rappelé auparavant, ces inclusions ne sont pas synonymes de normalité. Une loi de Coulomb standard peut être introduit en considérant le cône suivant :

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, \quad r_N \geq 0, \quad \|\boldsymbol{r}_T\| \leq \mu r_N\} \tag{5.2.56}$$

La loi de normalité (5.2.42) est alors équivalente à

$$\begin{cases} r_N \geq 0, \quad \|\boldsymbol{r}_T\| \leq \mu r_N \\ \begin{pmatrix} v_N \\ \boldsymbol{v}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^2 \lambda r_N \\ -\lambda \boldsymbol{r}_T \end{pmatrix}, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda(\|\boldsymbol{r}_T\| - \mu r_N) = 0 \end{cases} \tag{5.2.57}$$

Comme l'a déjà fait remarqué Drucker (1954), une loi de frottement standard basée sur le cône de Coulomb implique une vitesse de décollement, ou si l'on préfère, une dilatation de l'interface. Ces propriétés sont illustrées à la figure 5.3(b)

De Saxcé & Feng (1990) proposent une nouvelle classe de matériaux pour étendre la notion de normalité aux matériaux non standards. Cette approche est celle des matériaux standards implicites (MSI) (De Saxcé & Feng, 1990 ; Feng, 1991 ; De Saxcé *et al.*, ????). Alors que la classe des matériaux standards généralisés s'appuie sur deux potentiels de dissipation duaux donnant de façon explicite l'évolution des forces thermodynamiques associées aux variables internes, les MSI s'appuient sur un unique bi-potentiel contrôlant de façon implicite l'évolution de ces variables.

L'intérêt de cette nouvelle écriture tient au fait qu'elle permet de replacer le problème de contact frottant, en introduisant des variables auxiliaires, dans un formalisme strict d'un problème de complémentarité. Les algorithmes usuels, d'optimisation sous contraintes inégalités peuvent alors être utilisés pour résoudre ce problème (Uzawa, Newton, *etc*...,)

❑

5.3 Modèles couplant contact unilatéral, frottement et adhésion

Comme nous l'avons dit au § 5.2, le contact unilatéral et le frottement de Coulomb semblent être naturels pour modéliser les interfaces constituées de joints-vifs. Pour les mortiers anciens, en faisant l'hypothèse que leur tenue mécanique est faible, ces modèles peuvent être suffisant pour rendre compte de leur comportement.

A contrario, pour les mortiers qui ont des performances mécaniques non négligeables, plusieurs caractéristiques de leur réponse mécanique ne sontpas rendues par ces lois. Parmi elles, on peut citer :

- La présence d'élasticité aussi bien normale que tangente,
- La présence de cohésion normale et tangente autorisant le joint a résister à la traction et offrant une résistance supplémentaire au frottement.

Dans cette partie, en s'appuyant sur les comportements fondamentaux de contact unilatéral et de frottement sec, nous allons essayer d'enrichir le modèle d'interface. Tout d'abord, un comportement élastique linéaire va être introduit à l'interface en compression et en traction(§ 5.3.2). Ensuite, nous présenterons un modèle de cohésion fragile (§ 5.3.3) et un modèle de cohésion plus « ductile » s'appuyant sur la prise en compte d'un endommagement surfacique(§ 5.3.4).

Le choix a été fait de présenter ces modèles comme des modèles dérivés de la condition de Signorini et du frottement de Coulomb. Ce jeu d'écriture permet de ramener par des changements variables adéquats les modèles enrichis aux modèles de base. Il s'agit, aussi, de montrer par ces écritures que les comportements de base sont toujours présents dans les modèles.

5.3.1 Saut de déplacement à l'interface

Dans les modèles qui vont suivre, une variable d'état supplémentaire est introduite notée $[\boldsymbol{u}]$. Il s'agit du saut de déplacement à l'interface entre la configuration de référence et la configuration actuelle. Il sera décomposé dans un repère coïncidant avec le repère local au contact dans la configuration de référence de la manière suivante :

$$[\boldsymbol{u}] = u_{\mathrm{N}}\,\boldsymbol{n} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}} \tag{5.3.1}$$

Si l'hypothèse des petites perturbations est faite, on confond la configuration actuelle avec la configuration de référence. Le repère local peut donc être fixé dans la configuration de référence et l'on confond alors l'interstice g et u_{N}.

5.3.2 Comportement élastique de l'interface

Le comportement élastique est introduit au moyen du potentiel d'énergie libre de surface, W_S :

$$W_S([\boldsymbol{u}]) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{u}] \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{C}_S \,\bar{\bar{\otimes}}\, [\boldsymbol{u}] \tag{5.3.2}$$

On choisira pour le tenseur $\boldsymbol{C}_S$ des rigidités élastiques une forme particulière où l'on néglige les modules de cisaillement. De plus, on considère que le comportement élastique tangent est

isotrope, ce qui conduit à :

$$W_S(u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2} c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^2 + \frac{1}{2} c_{\mathrm{T}} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|^2 \tag{5.3.3}$$

où c_{N} et c_{T} sont les raideurs normales et tangentielles de l'interface, homogènes à des modules d'élasticité par unité de longueur.

Si l'on souhaite conserver la propriété d'impénétrabilité des solides en contact, on ajoute à cette énergie libre surfacique, l'énergie libre fournit par la condition de Signorini :

$$W_S(g, u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2} c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^2 + \frac{1}{2} c_{\mathrm{T}} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|^2 + \Psi_{\mathbb{R}^+}(g) \tag{5.3.4}$$

La loi de comportement s'écrit alors :

$$-r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} \in \partial_{g,u_{\mathrm{N}}} W_S(g, u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}), \qquad -\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{R}} \in \partial_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}} W_S(g, u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}) \tag{5.3.5}$$

ce qui est équivalent à

$$(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}) \geq 0, \qquad g \geq 0, \qquad (r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}})\, g = 0 \tag{5.3.6}$$

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{R}} = c_{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}} \tag{5.3.7}$$

On illustre sur la figure la relation (5.3.6) dans le cas simple où g peut être confondu avec u_{N}.

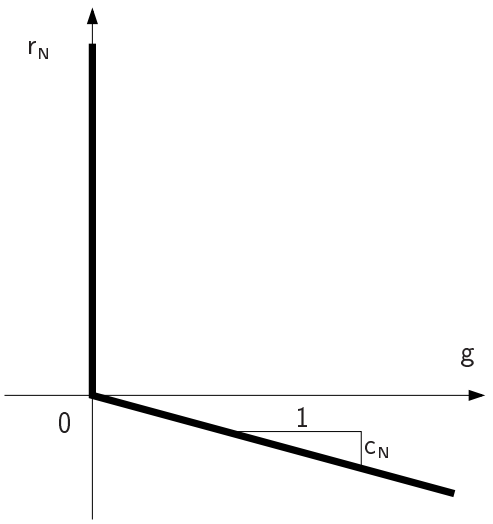


Figure 5.4 – *Comportement élastique en traction*

En introduisant le changement de variable suivant :

$$\tilde{r}_{\mathrm{N}} = r_{\mathrm{N}} + c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}} \tag{5.3.8}$$

le comportement élastique en traction peut se résumer à une condition de Signorini modifiée de la manière suivante :

$$(g, \tilde{r}_{\mathrm{N}}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Signorini} \tag{5.3.9}$$

Dans le même esprit, un changement de variables sur la fonction interstice pour tenir compte d'une élasticité en compression

5.3.3 Un modèle d'adhésion fragile

Le modèle de contact unilatéral classique implique de façon usuelle que les corps en contact ne peuvent adhérer l'un à l'autre. Cela implique que la réaction normale r_{N} est nécessairement positive. Comme nous l'avons déjà précisé, pour les joints vifs, cette hypothèse paraît tout à fait raisonnable. De même, pour les mortiers anciens, cette résistance du joint en traction peut être considérée comme négligeable.

Pour les mortiers qui possèdent de bonne qualité mécanique, il n'est plus possible de négliger la cohésion qu'ils induisent entre les éléments de l'appareil. Pour modéliser ce phénomène, nous proposons dans une première approche de modifier la condition de Signorini pour prendre en compte la résistance en traction du mortier, de la manière suivante :

$$(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + r_c) \geq 0, \qquad g \geq 0, \qquad (r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + r_c)\, g = 0 \tag{5.3.10}$$

où $r_c > 0$ est la valeur de résistance en traction maximale. Le graphe de cette relation est donné sur la figure 5.5 [15].

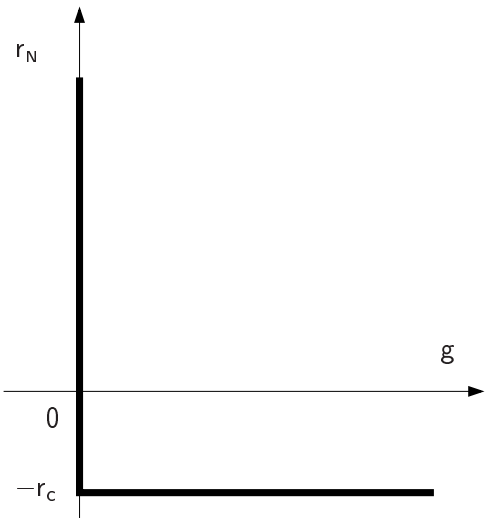


Figure 5.5 – *Prise en compte d'une résistance à la traction*

En introduisant le changement de variable, $\tilde{r}_{\mathrm{N}} = r_{\mathrm{N}} + r_c$, on se ramène à un système du type (5.3.9).

Dans ce modèle de cohésion, on constate que la séparation des corps s'effectue à un effort normal constant égal à r_c. Cette hypothèse paraît peu réaliste si l'on considère la dégradation du mortier en traction. Pour prendre en compte de façon simple cette dégradation, on introduit une évolution fragile du seuil de cohésion.

En s'inspirant du modèle d'endommagement fragile proposé par Marigo (1981), on écrit un modèle d'endommagement surfacique fragile. Considérons tout d'abord l'énergie libre surfacique

15. Le comportement élastique, évoqué plut tôt, peut être vu comme une cohésion élastique telle que $r_c = c_{\mathrm{N}}\, u_{\mathrm{N}}$

W_S :

$$W_S(g, u_{\mathrm{N}}, d_{\mathrm{S}}) = (1 - d_{\mathrm{S}})\, r_c u_{\mathrm{N}} + \Psi_{\mathbb{R}^+}(g) + \Psi_{[0,1]}(d_{\mathrm{S}}) \tag{5.3.11}$$

où d_{S} représente l'endommagement de la surface. La première loi d'état, qui s'écrit :

$$-r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} \in \partial_{u_{\mathrm{N}}} W_S \Leftrightarrow -r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} - (1 - d_{\mathrm{S}}) r_c \in \partial \Psi_{\mathbb{R}^+}(g) \tag{5.3.12}$$

est équivalente à la condition de complémentarité suivante :

$$(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + (1 - d_{\mathrm{S}}) r_c) \geq 0, \qquad g \geq 0, \qquad (r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + (1 - d_{\mathrm{S}}) r_c)\, g = 0 \tag{5.3.13}$$

La seconde loi d'état s'écrit en introduisant la force thermodynamique associée à l'endommagement [16], $\boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}}$:

$$-\boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}} \in \partial_{d_{\mathrm{S}}} W_S(g, u_{\mathrm{N}}, d_{\mathrm{S}}) \tag{5.3.14}$$

soit de manière équivalente,

$$\boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}} = r_c u_{\mathrm{N}} \quad \text{si } 0 \leq d_{\mathrm{S}} \leq 1, \tag{5.3.15}$$

$$\boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}} = 0 \quad \text{sinon.} \tag{5.3.16}$$

$$\tag{5.3.17}$$

Considérons maintenant le convexe $\mathcal{C}_{d_{\mathrm{S}}}$ suivant :

$$\mathcal{C}_{d_{\mathrm{S}}} = \{\boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}}, c(\boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}}) = \boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}} - r_c\, l_c \leq 0\} \tag{5.3.18}$$

où $c(\boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}})$ est la fonction seuil de la force d'endommagement. L'évolution de d_{S} est alors donnée par la loi de normalité suivante :

$$\dot{d_{\mathrm{S}}} \in \partial_{\boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}}} \Psi_{\mathcal{C}_{d_{\mathrm{S}}}} \tag{5.3.19}$$

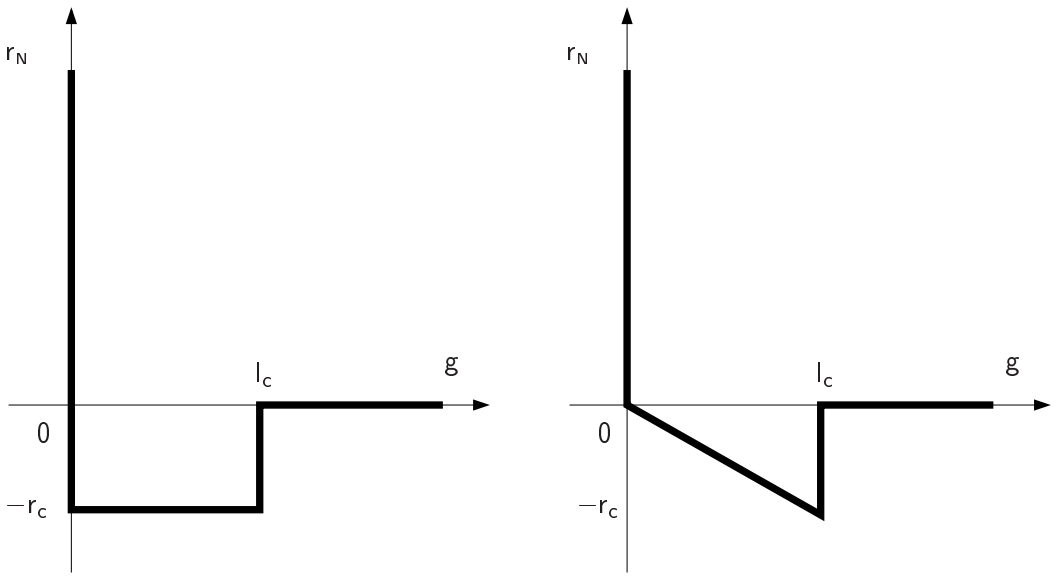
Comme l'indique Marigo (1981), si $\dfrac{\partial^2 W_s}{\partial {d_{\mathrm{S}}}^2} = 0$ et que $\dfrac{\partial [c(\boldsymbol{F}_{d_{\mathrm{S}}})]}{\partial d_{\mathrm{S}}} = 0$ alors le module d'adoucissement en déformations du matériau est nulle. d_{S} évolue donc brutalement de 0 à 1. Il s'agit alors d'endommagement total qui nous fait passer d'une loi cohésive unilatérale à une condition de Signorini classique.

De la même manière, on peut considérer un comportement élastique en traction. Une forme plus classique de l'énergie libre de la surface peut alors être donnée :

$$W_S = \frac{1}{2}(1 - d_{\mathrm{S}}) c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}} + \Psi_{\mathbb{R}^+}(g) + \Psi_{[0,1]}(d_{\mathrm{S}}) \tag{5.3.20}$$

Cela ne modifie, en rien, l'évolution de d_{S} mais l'énergie dissipée en cas de rupture est différente. En effet, l'énergie dissipée pour le modèle à cohésion constante vaut $r_c\, l_c$ alors que pour un modèle élastique on retrouve l'énergie élastique emmagasinée à rupture : $\dfrac{r_c^2}{c_{\mathrm{N}}}$. Les deux situations sont présentés à la figure 5.6

16. Le signe moins est introduit par commodité



(a) Seuil de résistance constant (b) Comportement élastique fragile

FIGURE 5.6 – *Evolution de l'endommagement*

REMARQUE 5.10

Le modèle de résistance à seuil constant illustré à la figure 5.6(a) est défini par une résistance maximale en traction r_c et une longueur de séparation l_c. La définition de cette longueur est nécessaire si l'on veut quantifier l'énergie dissipée par le mécanisme de rupture.

Le modèle présenté s'apparente au modèle de rupture fragile proposé par DUGDALE (1960) pour la propagation de fissure dans les matériaux. En suivant ces travaux et ceux de FREUND (1989), on peut faire remarquer que l'énergie dissipée par l'endommagement est analogue au taux de restitution d'énergie de rupture de GRIFFITH[17], G. La longueur l_c de séparation peut donc être estimée à partir de cette énergie en connaissant la résistance maximale en traction r_c.

Pour le modèle élastique, la donnée de la raideur normale et du seuil r_c suffit à renseigner le modèle.

❑

REMARQUE 5.11

Pour poursuivre l'analogie avec les modèles de rupture fragile, on peut montrer sous des hypothèses de propagation spatiale stationnaire de la fissure (voir remarque 5.12) que le taux de restitution d'énergie vérifie l'égalité :

$$G = -\int_0^{\boldsymbol{\delta}^c} \boldsymbol{r}([\boldsymbol{u}])\, d[\boldsymbol{u}] \tag{5.3.21}$$

17. Nous donnerons des présisions sur les hypothèses de validité de cette affirmation à la remarque 5.12.

où $\boldsymbol{\delta}^c$ est la valeur de $\boldsymbol{u}$ où la réaction s'annule. Pour notre modèle, cette expression conduit à :

$$G = r_c \, l_c \tag{5.3.22}$$

Dans le même esprit que les modèles de rupture fragile traditionnels (sans longueur de décohésion apparente), on peut envisager de faire tendre la longueur de décohésion vers 0 en conservant l'énergie G constante. De manière heuristique, on peut dire que la partie intégrée,$\boldsymbol{r}([\boldsymbol{u}])$, doit tendre vers l'infini à mesure que l_c tend vers 0. Cette vision est bien sûr naïve puisque que r ne peut plus être une fonction de $[\boldsymbol{u}]$.

A la manière des chocs, il est nécessaire de considérer $\boldsymbol{r}$ comme une distribution singulière de Dirac en $[\boldsymbol{u}] = 0$. Une fois encore, la réaction ne peut être considérée que sous forme intégrale, soit en terme d'impulsion. Nous verrons que les modèles de résolution proposés sont capables de prendre en compte ce type de modèle, qui ne nécessitent plus la donnée d'un seuil de cohésion en réaction et en longueur mais seulement la donnée d'une énergie de rupture.

❑

5.3.4 Un modèle adhésif/frottant avec endommagement progressif, le modèle de Frémond-Cangémi

5.3.4.a Contexte du modèle présenté

Le modèle présenté dans cette partie est un modèle couplant contact unilatéral, frottement et endommagement. Ce modèle, formulé par Cangémi (Cangémi, 1997 ; Raous *et al.*, 1999), est une extension, au frottement de Coulomb, de la notion d'intensité d'adhésion initiée par Frémond (1982, 1987, 1988) dans le cadre du contact unilatéral adhérent. Nous parlerons dans le suite de ce texte du modèle de Frémond-Cangémi.

Le modèle propose en effet la prise en compte d'une cohésion supplémentaire à celle du frottement sec dans la direction tangentielle et d'une cohésion synonyme de résistance à la traction dans la direction normale. Cette cohésion est pilotée par une variable d'intensité d'adhésion, β, dont l'évolution permet la prise en compte de l'adoucissement de l'adhérence. Grâce à cet adoucissement, le modèle propose une transition d'un état adhérent normale et tangent à un état de contact unilatéral dans la direction normal et à un état de frottement sec dans la direction tangentielle.

Récemment, ce modèle a fait l'objet d'une étude détaillée tant sur le plan mécanique (interprétation énergétique du modèle) que mathématique (théorèmes d'existence et d'unicité des solutions) de la part de Yann Monerie. Ses travaux proposent des extensions substantielles du modèle comme l'introduction d'un passage progressif de l'état adhérent à l'état frottant (coefficient de frottement dépendant de β) et la prise en compte d'effet non locaux par l'intermédiaire d'un premier gradient en espace de β (formulation thermodynamique et essais numériques). La présentation faite ici reprend les grandes lignes de ce travail du point de vue de la formulation

thermodynamique du modèle, des interprétations énergétiques et de l'analyse des régularités de solutions. Pour plus de détail, nous renvoyons à Monerie (2000).

Pour les aspects mathématiques et pour une étude dans un contexte plus large concernant la fissuration, la mécanique de la rupture et les zones cohésives, nous renvoyons le lecteur intéressé aux écrits suivants : (Monerie & Raous, 1999 ; Chaboche *et al.*, 2001 ; Monerie, 2000). Ces travaux ont été développés pour l'analyse du rôle de l'interface fibre/matrice dans les composites. Le comportement de ces composites est connu pour être quasi-fragile. Nous verrons au § 5.3.5 comment il peut être appliqué et interprété pour un autre matériau quasi-fragile comme le joint de mortier.

L'une des caractéristiques mécaniques majeures de ce type de modèle est la présence d'adoucissement. Comme nous avons déjà discuté au § 2.6, ce type de comportement posent de nombreux problèmes numériques liés aux instabilités qu'il entraîne. Nous avons vu que plusieurs voies peuvent être envisagées pour surmonter ce problème (régularisation visqueuse, théorie d'ordre supérieur, *etc*...). Nous tirerons les enseignements de cette étude et nous proposerons une solution aux problèmes d'objectivité liés à l'adoucissement de l'interface.

La contribution de l'auteur, en collaboration avec Yann Monerie, a été de proposer une formulation dynamique et une résolution numérique du problème de zones cohésives frottantes. Ces nouveaux développements, pour la première fois dans un cadre tridimensionnel, ont été appliqués à la fissuration des composites céramiques (Monerie, 2000), à la délamination par flambement (Monerie & Acary, 2001) et dans ce travail, aux joints de mortier. Cette collaboration a fait l'objet d'une publication plus globale sur les modèles de cohésion (Jean, Acary, & Monerie, 2001).

5.3.4.b Les variables d'état du modèle

Comme pour les modèles d'interfaces présentés auparavant, les composantes normales u_{N} et tangentielles $\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}$ du saut de déplacement sont deux variables d'état du système auxquelles on associe les parties réversibles des forces thermodynamiques, $r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}}$ et $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{R}}$. On considérera pour simplifier les écritures que l'interstice g est confondu avec u_{N} [18].

Le caractère original du modèle est dû à l'introduction d'une variable β qui représente l'intensité d'adhésion (Frémond, 1982, 1987, 1988). Cette intensité d'adhésion peut être interprétée comme la proportion de liaisons actives entre les deux corps en contact. Cette variable est comprise entre 0 et 1 ; pour $\beta = 1$, l'interface est vierge, pour $\beta = 0$ l'interface est rompue, pour les valeurs comprise entre 0 et 1 l'interface est partiellement rompue. A cette variable d'état β, on associe la force thermodynamique X_β. La variable β peut être envisagée comme une variable d'endommagement surfacique.

Comme pour les modèles d'endommagement continu évoqués dans le § 2.6, une théorie d'ordre supérieur en β peut être introduite. Pour la présentation qui va être faite ici, un premier gradient

18. Si la notion d'intensité d'adhésion parait claire en petites perturbations, son interprétations d'un point de vue physique en grandes transformations parait douteuse pour les matériaux quasi-fragiles.

en espace de β va être considéré pour introduire une information non locale. On associe à $\nabla\beta$ la force thermodynamique $\boldsymbol{X}_{\nabla\beta}$.

5.3.4.c Energie libre - Lois d'état

L'énergie libre choisie pour ce modèle est la suivante :

$$W_S(u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \beta, \nabla\beta) = \frac{1}{2}\beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^2 + \frac{1}{2}\beta^2 c_{\mathrm{T}} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|^2 - w\, h(\beta) + \frac{1}{2} k \|\nabla\beta\|^2 + \Psi_{\mathbb{R}^+}(u_{\mathrm{N}}) + \Psi_{[0,1]}(\beta) \quad (5.3.23)$$

où les paramètres du modèle sont :

- les raideurs initiales c_{N} et c_{T}, homogènes à un module d'élasticité par unité de longueur,
- w est une énergie par aire de référence. Elle représente l'énergie dissipée dans le processus de cohésion à l'exception de toute dissipation visqueuse.
- la fonction $h(\beta)$ est supposée différentiable et permet de paramétrer la forme de l'énergie dissipée en fonction de β.[19],
- l'énergie associée au gradient d'adhésion, $\nabla\beta$, est choisie quadratique. Cette forme simple fait dépendre linéairement $\boldsymbol{X}_{\nabla\beta}$ à $\nabla\beta$. La constante k est une constante homogène à une énergie.

Les lois d'état sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} & \in & \partial_{u_{\mathrm{N}}} W_S(u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \beta, \nabla\beta), \\ -\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{R}} & \in & \partial_{\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}} W_S(u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \beta, \nabla\beta), \\ -X_\beta & \in & \partial_\beta W_S(u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \beta, \nabla\beta), \\ -\boldsymbol{X}_{\nabla\beta} & \in & \partial_{\nabla\beta} W_S(u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \beta, \nabla\beta). \end{array}\right. \quad (5.3.24)$$

Du système d'équations (5.3.24), on peut déduire des formes équivalentes pour les lois d'états. Comme auparavant, on obtient pour la partie réversible de r_{N}, la condition de complémentarité suivante :

$$(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}) \geq 0, \qquad u_{\mathrm{N}} \geq 0, \qquad (r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}})\, u_{\mathrm{N}} = 0 \quad (5.3.25)$$

L'énergie libre étant différentiable par rapport à $\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}$ on obtient de façon immédiate :

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{R}} = -\beta^2 c_{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}} \quad (5.3.26)$$

En ce qui concerne la force thermodynamique X_β associée à l'adhésion, une étude suivant β conduit au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} X_\beta & \geq & w\, h'(\beta) & \text{si } \beta = 0 \\ X_\beta & = & w\, h'(\beta) - (c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^2 + c_{\mathrm{T}} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|^2)\beta & \text{si } 0 < \beta < 1 \\ X_\beta & \leq & w\, h'(\beta) - (c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^2 + c_{\mathrm{T}} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|^2) & \text{si } \beta = 1 \end{array}\right. \quad (5.3.27)$$

L'énergie étant aussi différentiable par rapport $\nabla\beta$, on obtient directement :

$$\boldsymbol{X}_{\nabla\beta} = -k\nabla\beta \quad (5.3.28)$$

19. En s'inspirant du travail de Marigo (1981), une relation doit pouvoir être mise en évidence entre $h'(\beta)$ et le module d'adoucissement en déformation qui pilote la relation de charge-décharge.

5.3.4.d Potentiel de dissipation : Lois complémentaires

Les lois complémentaires du modèle régissant les phénomènes dissipatifs sont introduits au moyen d'un potentiel de pseudo-dissipation (voir § 5.1.4.b). Cette façon d'opérer, désormais usuelle, doit tout de même être précisée lorsque l'on travaille avec des grandeurs mécaniques non locales comme $\nabla\beta$. En effet, la forme locale de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM ne peut être déduite aussi facilement et quelques précautions doivent être prises. Nous préciserons, premier lieu, une forme locale de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM, puis nous choissirons un potentiel de dissipation qui répond à ses exigences.

Inégalité de CLAUSIUS-DUHEM Rappelons l'écriture du Second Principe(5.1.71) sous sa forme globale incluant la densité d'entropie surfacique S_S :

$$\dot{\mathcal{S}} = \int_{\Omega(t)} \dot{S}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega(t)} \dot{S_S}\, ds \geq \int_{\Omega(t)} \frac{\boldsymbol{r}}{T}\, d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega(t)} \frac{\boldsymbol{q}\boldsymbol{n}}{T}\, ds. \tag{5.3.29}$$

En introduisant à l'aide du premier principe, la densité d'énergie libre volumique W et surfacique W_S et la puissance des efforts de surface, $\mathcal{P}_S = r_{\mathrm{N}} v_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}$, ($v_{\mathrm{N}} = \dot{u}_{\mathrm{N}}$, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{u}}_{\mathrm{T}}$), on obtient une forme globale (où si l'on préfère intégrale) de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM :

$$\int_{\Omega(t)} -\rho(\dot{W} + S\dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D} - \frac{\boldsymbol{q}}{T}\nabla T\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega(t)} -(\dot{W}_S + S_S\dot{T}) + r_{\mathrm{N}} v_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\, ds \geq 0, \tag{5.3.30}$$

soit, en supposant que la dissipation mécanique intrinsèque est séparément positive :

$$\int_{\Omega(t)} -\rho\dot{W} + \boldsymbol{\sigma} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega(t)} -\dot{W}_S + r_{\mathrm{N}} v_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\, ds \geq 0. \tag{5.3.31}$$

Pour obtenir une forme locale de cette inégalité, il réside une difficulté dans le calcul de $\dot{W}_S$ qui n'est pas directement différentiable. En opérant un calcul de cette dérivée par valeur supérieure et inférieure, le résultat suivant peut, tout de même être, obtenu en négligeant les termes de bodrs en $\nabla\beta$:

$$\int_{\partial\Omega(t)} \dot{W}_S\, ds = \int_{\partial\Omega(t)} -(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} v_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{R}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}} + (X_\beta - \boldsymbol{X}_{\nabla\beta})\dot{\beta})\, ds. \tag{5.3.32}$$

La forme locale de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM peut se formuler de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} D & = & \boldsymbol{\sigma}^{\mathsf{IR}} \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D} \geq 0 & \text{dans } \Omega(t) \\ D_S & = & -(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{IR}} v_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{IR}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}) + (X_\beta - \boldsymbol{X}_{\nabla\beta})\dot{\beta}) \geq 0 & \text{sur } \partial\Omega(t) \end{array} \right. \tag{5.3.33}$$

Choix d'un potentiel de dissipation surfacique, Φ_S. Laissons de coté pour l'instant la dissipation volumique D pour se pencher sur la dissipation surfacique D_S. Comme nous l'avons déjà évoqué, le respect de l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM va se faire par l'introduction d'un potentiel de dissipation surfacique Φ_S. La forme choisie pour ce potentiel est la suivante :

$$\Phi_S(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \dot{\beta}) = \mu(\beta)(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}})\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\| + \frac{b}{p+1}\|\dot{\beta}\|^{p+1} + \Phi_{\mathbb{R}^-}(\dot{\beta}) \tag{5.3.34}$$

où b est une viscosité et p un entier déterminant la puissance de la loi de dissipation sur $\dot{\beta}$.

La dissipation due aux phénomènes irréversibles est donc supposée provenir de deux sources. La première source est la dissipation par frottement et, la seconde, la dissipation par endommagement et viscosité. La loi de dissipation visqueuse a été choisie ici de type NORTON-HOFF. Le coefficient de frottement a été choisi comme une fonction régulière de β. Nous reviendrons sur ce point au § 5.3.5.

Il est important de remarquer que ce potentiel est convexe par rapport au couple $(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \dot{\beta})$ à la différence du potentiel d'énergie libre. On peut donc raisonnablement envisager son sous-différentiel par rapport au couple $(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \dot{\beta})$. De plus, on a l'égalité $\Phi_S(0,0) = 0$. Comme on l'a vu dans la partie § 5.1.4.d, la relation de monotonie engendrée par l'inclusion suivante permet de montrer que l'inégalité de CLAUSIUS-DUHEM est vérifiée :

$$(-\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}, X_\beta - \boldsymbol{X}_{\nabla\beta}) \in \partial_{\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}},\dot{\beta}} \Phi_S(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \dot{\beta}) \tag{5.3.35}$$

Les lois complémentaires s'écrivent à partir de ce potentiel de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} r_{\mathrm{N}}^{|\mathsf{R}} & = & 0 \\ -\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}} & \in & \partial_{\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}} \Phi_S(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \dot{\beta}) \\ (X_\beta - \boldsymbol{X}_{\nabla\beta}) & \in & \partial_{\dot{\beta}} \Phi_S(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \dot{\beta}) \end{array}\right. \tag{5.3.36}$$

L'appartenance de $-\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}$ au sous-différentiel de Φ_S par rapport $\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}$ conduit à écrire un loi de frottement de COULOMB modifié pour une valeur de pression normale égale à $r_{\mathrm{N}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}$, soit :

$$\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\| > 0, \qquad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}\| = \mu(\beta)(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}), \qquad \frac{\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}}{\|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}\|} = -\frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\|}, \quad \text{(Glissement)} \tag{5.3.37}$$

$$\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\| = 0, \qquad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}\| < \mu(\beta)(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}), \qquad \text{(Non glissement)} \tag{5.3.38}$$

Il est important de noter que ce résultat n'est pas modifié par la prise en compte d'un coefficient de frottement variable. La relation d'inclusion liant $(X_\beta - \boldsymbol{X}_{\nabla\beta})$ est équivalente à l'égalité suivante :

$$(X_\beta - \boldsymbol{X}_{\nabla\beta}) \in \partial_{\dot{\beta}} \Phi_S(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \dot{\beta}) \quad \Longleftrightarrow \quad b|\dot{\beta}|^p = -(X_\beta - \boldsymbol{X}_{\nabla\beta})^- . \tag{5.3.39}$$

5.3.4.e Synthèse des équations constitutives du modèle

Pour terminer la présentation de ce modèle couplant contact unilatéral, frottement et adhésion, on donne une synthèse des lois constitutives dégagées par la formulation thermodynamique :

❋ Contact unilatéral avec adhésion :

$$(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}) \geq 0, \qquad u_{\mathrm{N}} \geq 0, \qquad (r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}})\, u_{\mathrm{N}} = 0 \tag{5.3.40}$$

❋ Frottement de COULOMB avec adhésion :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{R}} = -\beta^2 c_{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \qquad r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} = r_{\mathrm{N}}, \\ \bullet \quad \|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\| > 0, \quad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}\| = \mu(\beta)(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}), \quad \dfrac{\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}}{\|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}\|} = -\dfrac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}}{\|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\|}, \\ \bullet \quad \|\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}\| = 0, \quad \|\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}\| < \mu(\beta)(r_{\mathrm{N}}^{\mathsf{R}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}), \end{array}\right. \tag{5.3.41}$$

❋ Evolution de l'intensité d'adhésion :

$$\begin{cases} b\dot{\beta} &= -\Big[\big(w\,h'(\beta) - \beta(c_{\mathrm{N}}u_{\mathrm{N}}^2 + c_{\mathrm{T}}\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|^2) - k\nabla\beta\big)^-\Big]^{(1/p)}, & \text{si } \beta \in [0,1] \\ b\dot{\beta} &\leq -\Big[\big(w\,h'(\beta) - \beta(c_{\mathrm{N}}u_{\mathrm{N}}^2 + c_{\mathrm{T}}\|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|^2) - k\nabla\beta\big)^-\Big]^{(1/p)}, & \text{si } \beta = 1 \end{cases} \tag{5.3.42}$$

En introduisant le changement de variable suivant :

$$\tilde{r}_{\mathrm{N}} = r_{\mathrm{N}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}, \quad \tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} + \beta^2 c_{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \tag{5.3.43}$$

le modèle peut se résumer de façon synthétique sous la forme :

$$\begin{gathered} (u_{\mathrm{N}}, \tilde{r}_{\mathrm{N}}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Signorini} \\ (\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{T}}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Coulomb}(\mu\tilde{r}_{\mathrm{N}}) \\ \dot{\beta} = f(\beta, u_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}) \end{gathered} \tag{5.3.44}$$

5.3.5 Pertinence du modèle de Frémond-Cangémi pour les mortiers

Dans cette partie, une interprétation mécanique du modèle sera donnée. Cette démarche a deux objectifs principaux :

- détailler et comprendre les évolutions des variables du modèle pour des chargements génériques. Il s'agit de relier les évolution réversibles te irréversibles du modèle à la physique des phénomènes que l'on veut modéliser,
- justifier l'utilisation d'un modèle développé initialement pour l'adhésion d'une manière générale puis pour les composites quasi-fragiles.

Nous allons essayer d'aborder de front ces deux objectifs généralement mêlés dans les sections qui suivent.

5.3.5.a Intensité d'adhésion comme un endommagement fragile

Le modèle de Frémond-Cangémi introduit comme nous l'avons vu la notion d'intensité d'adhésion prise ne compte par la variable scalaire β. Cette variable peut être vue comme un endommagement surfacique en considérant pour variable d'endommagement plus classique $d = 1 - \sqrt{\beta}$.

Endommagement plutôt que plasticité. Cette caractéristique du modèle diffère radicalement des modèles d'interfaces généralement rencontrés dans la littérature. Les modèles de joint de mortier évoqués, dans le § 3 sont tous basés sur un comportement plastique avec adoucissement. Nous avons déjà analysé les conséquences que cela pouvait avoir sur le comportement de l'interface (voir § 3.4).

Rappelons tout de même deux inconvénients majeurs de la plasticité seule :

- Le comportement plastique implique que le mécanisme dissipatif s'appuie essentiellement sur une déformation irréversible. Pour le comportement normal en traction d'un joint de

mortier, cette déformation est généralement négligeable et le mécanisme principal est avant tout de l'endommagement fragile.

– En ce qui concerne le comportement tangent, un modèle plastique comme le frottement de COULOMB modélise correctement le comportement résiduel. Il semble par contre que le mécanisme dissipatif qui a lieu lorsque le matériau est encore cohésif, soit révélateur d'un mécanisme couplé de plasticité et d'endommagement fragile comme c'est le cas pour les géomatériaux quasi-fragiles(voir § 1.3). Nous reviendrons sur la pertinence du modèle dans le comportement tangent dans le § 5.3.5.b

Si l'on considère de plus un modèle élasto-plastique, on constate que la mécanisme dissipatif laisse intact les caractéristiques élastiques du mortier. Sur ces remarques, il devient naturel de faire appel à la mécanique de l'endommagement.

Evolution de l'intensité d'adhésion. Nous montrons sur la figure 5.7 comment le modèle d'interface réagit à un essai de charge-décharge en traction normale. Pour des raisons de simplicité on choisit une loi simple qui permet une interprétation facile ($h(\beta)=\beta, k=0, p=1$).

Donnons une interprétation simple de ces courbes. Si l'on considère une évolution monotone croissante de u_{N} à partir des conditions initiales $\beta(0)=1$ et $u_{\mathrm{N}}(0)=0$, le système différentiel gouvernant l'évolution de la réaction peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} r_{\mathrm{N}} = -\beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}} \\ b\dot{\beta} = (w - c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^2 \beta)^- \end{cases} \tag{5.3.45}$$

La relation r_{N}-u_{N} peut être décrite de la sorte. Pour $u_{\mathrm{N}} < u_{\mathrm{N}}^c = \sqrt{w/c_{\mathrm{N}}}$, la vitesse $\dot{\beta}$ est égale à 0 ; l'intensité d'adhésion β reste donc égale à 1. On constate donc un comportement élastique linéaire de pente c_{N} (Partie OA de la courbe 5.7(a)). Pour $u_{\mathrm{N}}^c = \sqrt{w/c_{\mathrm{N}}}$, la vitesse de perte d'adhésion devient négative $\dot{\beta} < 0$, l'évolution de la réaction est donc gouvernée par le système adimensionné suivant :

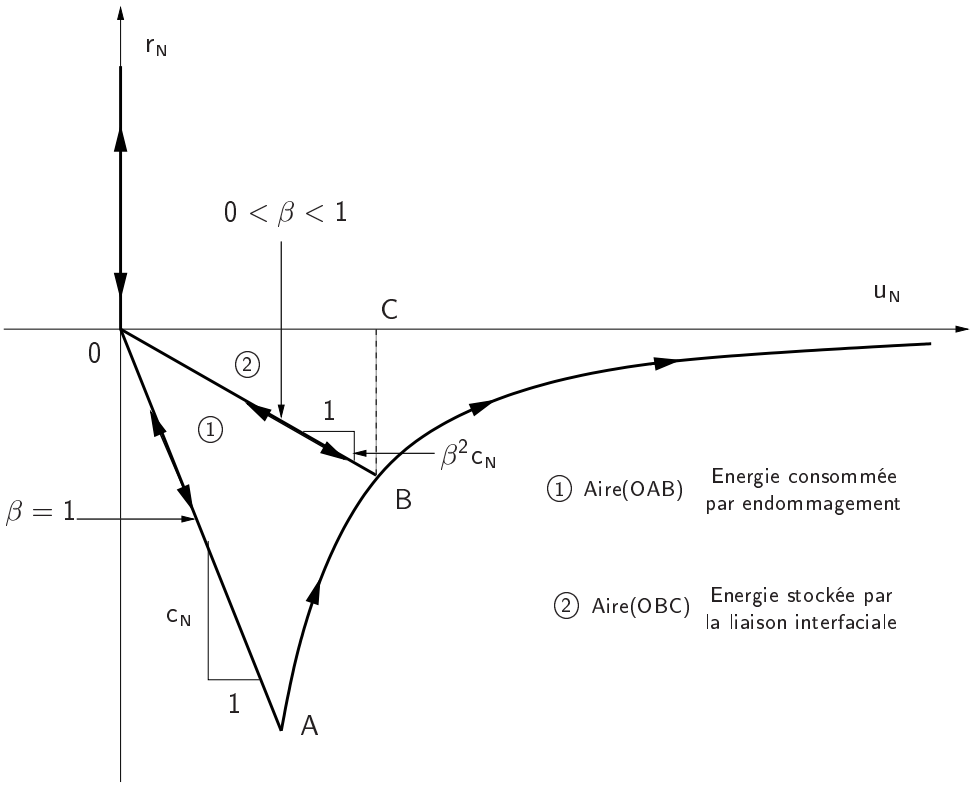
$$\begin{cases} \dfrac{r_{\mathrm{N}}}{r_{\mathrm{N}}^c} = \beta^2 \dfrac{u_{\mathrm{N}}}{u_c} \\ \dfrac{b c_{\mathrm{N}}}{(r_{\mathrm{N}}^c)^2}\dot{\beta} = 1 - \left(\dfrac{u_{\mathrm{N}}}{u_{\mathrm{N}}^c}\right)^2 \beta \end{cases} \tag{5.3.46}$$

où $r_{\mathrm{N}}^c = -\sqrt{w\, c_{\mathrm{N}}}$. Avant que le déplacement critique u_c ne soit dépassé, le comportement est indépendant du temps. Au delà, le comportement dépend de la viscosité du modèle d'évolution de β. Considérons pour un moment que cette viscosité est nulle. On obtient alors l'évolution[20] de β et de r_{N} suivante, illustrée à la figure 5.7(a) partie AB :

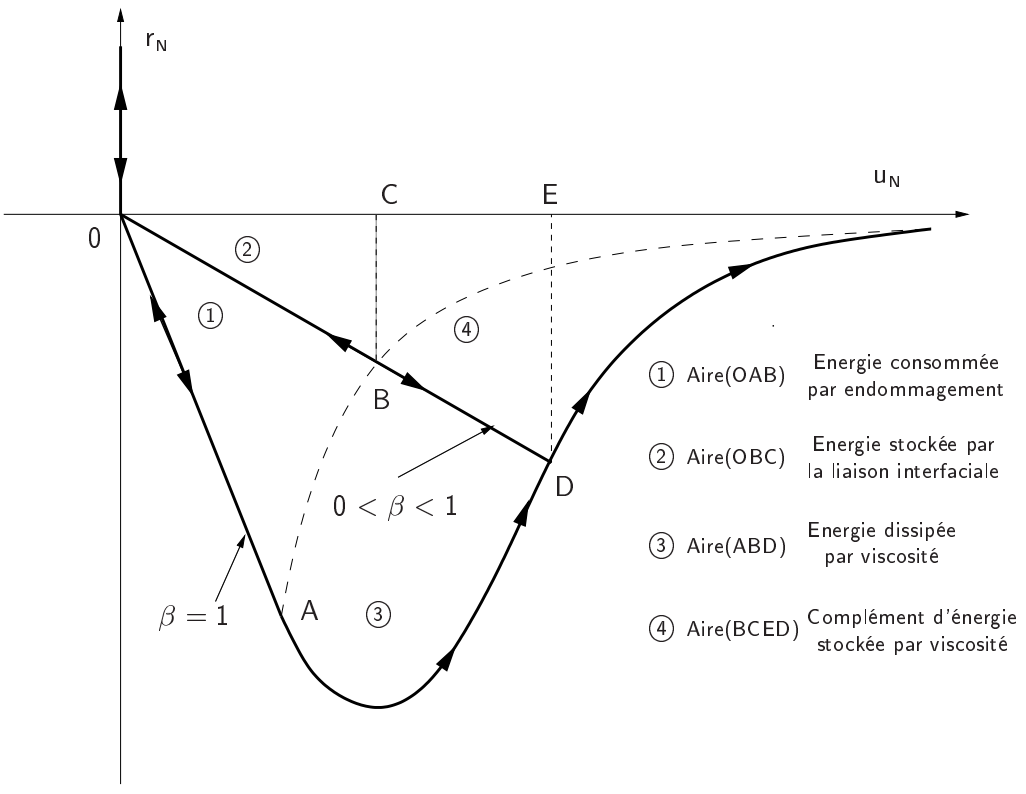
$$\beta = \frac{w}{c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^2}, \quad r_{\mathrm{N}} = -\frac{w^2}{c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^3}, \quad \text{pour } u_{\mathrm{N}} \geq u_c \tag{5.3.47}$$

Si au point B, on effectue une décharge, en considérant la valeur du déplacement u_B atteinte, la raideur effective $c_{\mathrm{N}}^* = \beta^2 c_{\mathrm{N}}$ est égale à $c_{\mathrm{N}}^* = \dfrac{w^2}{c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^4}$.

20. On considère toujours une évolution monotone



(a) Loi indépendante du temps



(b) Loi visqueuse

FIGURE 5.7 – *Essai de charge-décharge dans la direction normale*

On montre sur le graphe 5.7(b) l'évolution de r_N pour une loi visqueuse. La différence tient aux énergies stockée et dissipée au cours de l'évolution de u_N.

Commentaires Ce type d'évolution simple pour β sera souvent suffisant pour nos applications aux maçonneries. Comme il l'a déjà été évoqué au § 1.1.2.b, Atkinson *et al.* (1989) ont montré sur leurs essais expérimentaux que l'adoucissement aussi bien tangentiel que normal peut très bien être approché par une hyperbole.

5.3.5.b Intérêt du couplage entre frottement et adhésion

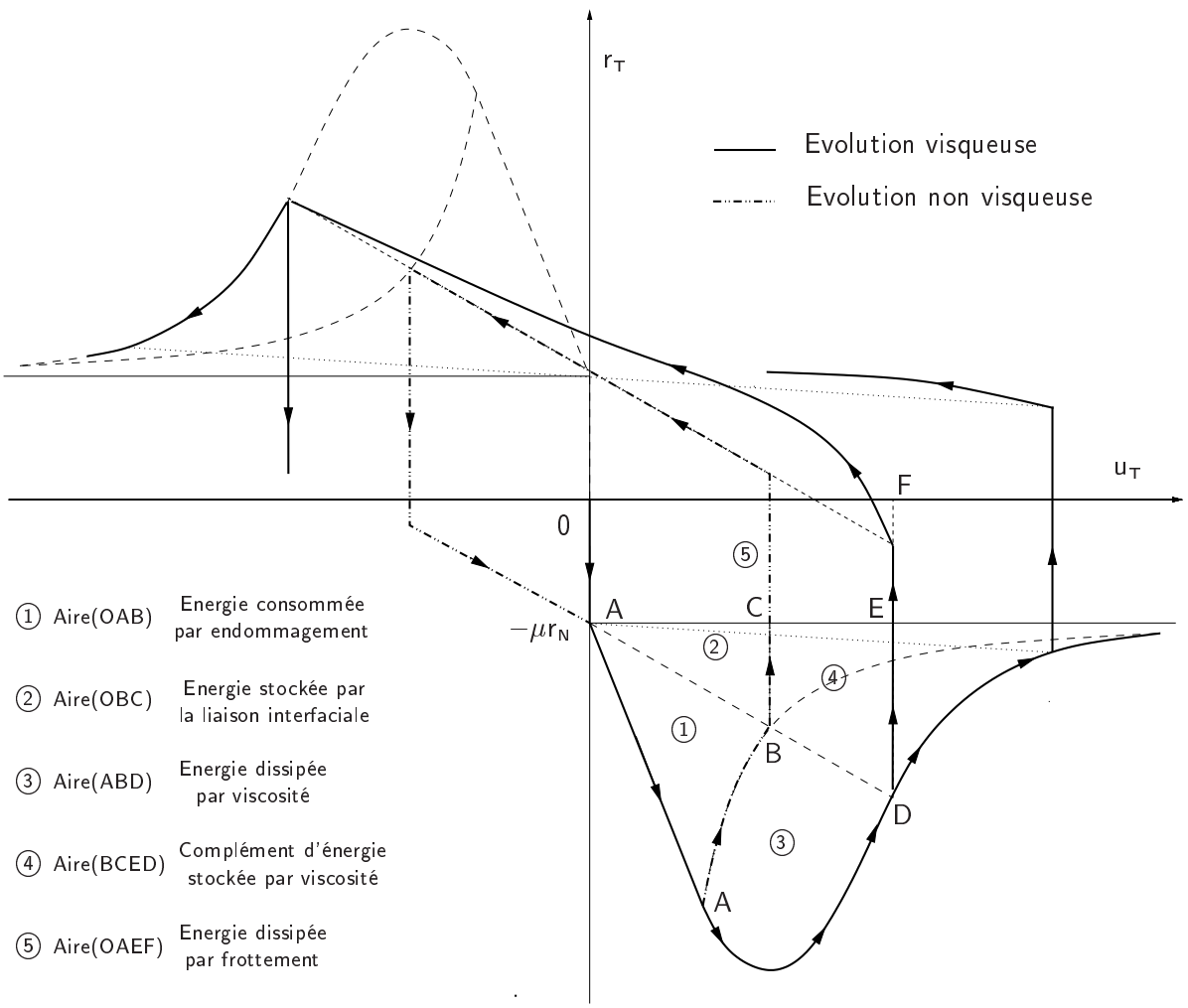


Figure 5.8 – *Essai de charge-décharge dans la direction tangentielle*

Comme il l'a été dit dans le § 1.3, les mécanismes dissipatifs dans les géomatériaux sont issus du couplage de plasticité non associée et de l'endommagement fragile. Ce phénomène est particulièrement marqué en compression ou en cisaillement sous des pressions de confinement élevées.

Couplage endommagement et plasticité Le modèle de Frémond-Cangémi offre la possibilité de coupler de manière forte l'adhésion et le frottement. En effet, comme on l'a vu à travers la formulation thermodynamique du problème, la réaction tangentielle $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$ est la somme de deux contributions :

1. une partie réversible $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{\mathsf{R}} = \beta^2 c_{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}$ qui dérive du potentiel élastique. Cette réaction permet de prendre en compte la résistance supplémentaire due à la cohésion du mortier sain. L'évolution de β en fonction du déplacement $\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}$ permet de prendre en compte l'endommagement fragile du matériau. Le matériau s'adoucit ainsi et la partie cohésive du comportement s'annule.
2. une partie irréversible $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{|\mathsf{R}}$, dont l'évolution est guidée par le frottement sec de Coulomb. On retrouve dans ce terme la plasticité de type Mohr-Coulomb dont le seuil dépend de la pression normale. Lorsque la liaison cohésive est complètement endommagée, on retrouve un comportement résiduel de frottement sec.

On donne sur la figure 5.8 l'évolution de la réaction tangentielle $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}$ pour des cycles de charge-décharge à pression normale constante. Le coefficient de frottement $\mu(\beta)$ est constant, égal à μ. On peut constater que le modèle non visqueux est en bonne corrélation avec les résultats expérimentaux de Atkinson *et al.* (1989). On note bien la présence d'un pic de cohésion dans le cycle initial puis le comportement résiduel de frottement caractérisé par son hystérésis. Pour les essais expérimentaux de Armand *et al.* (1997), le caractère plus régulier des hystérésis peut être modélisé par l'apport d'une viscosité qui peut être déterminée en tenant compte d'essais à vitesse variable.

Coefficient de frottement variable Comme on peut le remarquer sur la figure 5.8, le modèle conduit à une dissipation d'énergie par frottement avant même que l'endommagement n'ait débuté. Sous cette hypothèse, le modèle dissipe dèjà alors que le matériau est toujours considéré comme sain, i.e., élastique linéaire du point de vue de sa cohésion. Cet caractéristique du modèle paraît est embarrassante du point de vue de la physique des phénomènes dissipatifs dans le mortier.

Pour remédier à ce problème, on propose d'utiliser un coefficient de frottement variable qui déclenche la dissipation par frottement que lorsque l'interface s'endommage (Monerie, 2000). Le terme de « frottement variable » est peut être malheureux car il suggère généralement des modèles où le coefficient varie avec la vitesse de glissement comme pour les lois de Stribeck. Dans ce développement, il s'agit de rendre dépendant le coefficient de frottement μ de β qui mesure l'endommagement.

Pour les applications aux joints de mortier nous demanderons au coefficient de frottement variable de vérifier les conditions suivantes :

1. pour une interface vierge, $\beta = 1$, on souhaite ne pas avoir de frottement, soit $\mu(\beta = 1) = 0$,
2. Pour une interface endommagée, $\beta = 0$, on souhaite retrouver le comportement résiduel de frottement sec pour une valeur du coefficient de frottement constant μ_r, soit $\mu(\beta = 0) = \mu_r$.

Pour les joints de mortier, en l'absence d'informations supplémentaires nous choisirons la loi la plus simple qui respecte ces conditions :

$$\mu(\beta) = (1 - \beta)\mu_r \tag{5.3.48}$$

Il est intéressant de noter que l'on retrouve alors pour l'interface vierge ($\beta = 1$) un comportement élastique linéaire de raideur c_{T}.

5.3.5.c Considérations énergétiques et paramètres des lois constitutives

Le critère d'endommagement n'est pas un simple critère de rupture locale qui serait basé sur une valeur de réaction critique $\boldsymbol{r}^c$. Il s'appuie en effet sur un critère basé sur l'énergie consommée durant le processus de décohésion. En cela, le modèle est analogue à la mécanique de la rupture fragile.

Toutefois, une nuance est à noter. En mécanique de la rupture, la fissuration se produit lorsque le taux de restitution de l'énergie atteint sa valeur critique, G^c (Critère de Griffith). Pour le modèle présenté ici, l'endommagement débute lorsque la force thermodynamique X_β s'annule (on omet ici le premier gradient de β). Pour $\beta = 1$ et une loi non visqueuse, ou si l'on préfère une évolution quasi-statique, l'énergie stockée dans la liaison interfaciale est égale à $w/2$. Le reste de l'énergie est ensuite dissipée au cours de l'évolution jusqu'à la décohésion complète pour atteindre une énergie dissipée totale égale à w.

Sur ces remarques, on peut arriver à la conjoncture que le modèle est, à la fois, basé sur un critère énergétique et sur un critère en réaction critique.

Cette caractéristique est particulièrement intéressante pour notre propos qui est de simuler numériquement le processus de rupture dans les joints de maçonnerie. En effet, des choix équivalents du point de vue mécanique peuvent être faits pour parémètrer le modèle. D'un point de vue expérimantal, certains paramètres sont plus fiables que d'autres. Le modèle permet de les choisir. On peut par exemple penser à un jeu qui serait composé de l'énergie totale d'adhésion w associé aux valeurs critiques de réactions r_{N}^c et $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^c$ ou encore aux déplacements critiques u_{N}^c et $\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}^c$.

Remarque 5.12

On a peu discuté au cours de cette présentation de la forme attribuée à l'adoucissement dans le modèle, ou de manière plus précise, au choix de $h(\beta)$. Ce paramètre du modèle parait *a priori* déterminant sur la réponse du modèle. Tout dépend en réalité, du choix de l'échelle à laquelle on se place pour analyser cette réponse. En effet, à l'échelle de macroscopique, pour une propagation stable des fissures, la réponse du système ne dépend pratiquement que l'énergie dissipée par la fissuration et pas de la forme de l'endommagement choisi. Donnons quelques éléments de justification d'une telle affirmation.

Considérons une forme de réponse d'un modèle de zones cohésives, décrite par une relation $\boldsymbol{r}$-$\boldsymbol{u}$. Pour des valeurs de $\boldsymbol{u}$ allant de zéro à une valeur critique $\boldsymbol{\delta}^c$ où la réaction est nulle pour

$\|\boldsymbol{u}\| > \|\boldsymbol{\delta}^c\|$, on peu montrer (voir par exemple FREUND (1989)) que le taux de restitution d'énergie G pouvait être donné, à vitesse de propagation de fissure constante par :

$$G = -\int_0^{\boldsymbol{\delta}^c} \boldsymbol{r}(\boldsymbol{u})\, d\boldsymbol{u} \tag{5.3.49}$$

Cette égalité est particulièrement intéressante à deux points de vue :

- tout d'abord, elle confirme l'équivalence entre le critère énergétique global de GRIFFITH et un modèle de cohésion en ce qui concerne la propagation stable des fissures,
- ensuite, on note que l'énergie ne dépend que de l'aire sous la courbe $\boldsymbol{r}$-$\boldsymbol{u}$ et donc que la propagation stable des fissures est décrite de manière équivalente quelque soit la forme de cette courbe.

D'un point de vue pratique, la réponse macroscopique est semblable pour des énergies d'adhésion équivalentes.

Le résultat (5.3.49) reste une bonne approximation dans le cas où la vitesse de propagation de fissure est très grande. Il reste par contre un cas délicat que la mécanique de rupture classique ne peut pas traiter, qui est celui de l'initiation des fissures. Dans ce cadre, la forme du modèle d'endommagement joue un rôle important, qui peut être senti au niveau de la décohésion locale. Cette sensibilité de la réponse locale à la forme du modèle constitue en réalité un atout indéniable des modèles de cohésion. Ils sont d'une manière générale capable de traiter l'initiation des fissures.

❑

Commentaires Pour les applications aux maçonneries, on souhaite rendre compte d'un comportement global de la structure cohérent, en s'appuyant sur des considérations micromécaniques. La forme du modèle de cohésion importe donc peu si les mécanismes dissipatifs sont bien représentés (couplage endommagement-plasticité) et si l'énergie dissipée par endommagement est quantifiable. On notera toutefois que les réponses obtenues pour un choix simple de $h(\beta)$ semblent en adéquation avec les expériences.

5.3.5.d Comportements non représentés par le modèle

Trois comportements caractéristiques des joints de mortier ne sont pas pris en compte dans le modèle :

- le premier de ces comportements est le caractère plastique de la réponse en traction directe du joint. Comme nous l'avons souligné, le comportement normal du modèle est un comportement d'endommagement fragile seul. Dans la réalité, on note la présence de faibles déformations irréversibles synonymes de plasticité. Nous les considérons comme négligeables.
- le modèle suppose une résistance en compression normale illimitée. Nous avons vu que certains modèles d'interface proposent un critère de résistance maximale en compression. Le modèle, présenté au § 3.3, désigné sous leur acronyme anglais de « Cap model », en est un exemple caractéristique. Ce type de modèle est souvent utilisé pour modéliser de

façon macroscopique la dégradation du matériau sous écrasement. Cette dégradation dans les matériaux macroscopiquement homogènes traduit la naissance et le développement de fissures parallèles à l'axe de compression. Nous négligerons ces aspects dans les jionts de mortier modèlisé par une interface d'épaisseur nulle. En reportant éventuellement ces phénomènes dans les éléments, nous tiendrons de la rupture en compression par la fissuration des éléments.

– Enfin, Le troisième de ces comportements est la dilatance du mortier lorsqu'il est sollicité en cisaillement. Ceci constitue une faiblesse du modèle si l'on souhaite des analyses micromécaniques fines sur des appareils de faibles dimensions. Pour cela, il serait nécessaire de considérer un frottement standard ou non associé avec un potentiel régissant l'écoulement supplémentaire. Nous proposons de discuter de ce problème dans la suite du paragraphe

Le cas particulier de la dilatance Quelques remarques supplémentaires concernant la dilatance des mortiers peuvent être faites. Elles s'appuient sur les résultats des essais de cisaillement cyclique sur les mortiers anciens réalisés par Armand *et al.* (1997) et des mortiers modernes réalisés par Atkinson *et al.* (1989).

Pour les mortiers anciens, une forte contractance du joint est remarqué dès le premier cycle. Le fait d'omettre, dans un premier temps la dilatance (ici la contractance du joint), engendre une surestimation des chargements extrêmes que peut supporter la structure. Le modèle ne va donc pas dans le sens de la sécurité.

Pour les mortiers modernes, une dilatance est présente dans les premiers cycles et s'estompe rapidement au fur et à mesure des cycles. Cette dilatance offre un meilleure tenue de la structure mais ne joue pas une rôle déterminant comme cela peut l'être, par exemple, pour les problèmes d'arrachement de pieux.

Il n'en reste pas moins dans les deux cas que la dilatance (ou la contractance) peut jouer un rôle important dans des calculs des chargements extrêmes que peut supporter la structure. Afin de prendre en compte ce phénomène, on propose d'opérer un changement de variable sur la fonction interstice en la faisant dépendre du déplacement tangentiel cumulé. Pour l'heure, cette modification n'a pas été implémentée. Toutefois, le cadre général des changements de variables a été envisagé dans Jean *et al.* (2001) et ne semble pas poser de problèmes techniques insurmontables.

Pour informations, des formulations élégantes et des essais de modèles de zones cohésives avec dilatance sont présentés dans Leroy *et al.* (1999) sur des problèmes de fissuration de composites. Les approches étant similaires l'introduction de dilatance ne devrait pas poser de problème théorique supplémentaire.

5.3.6 Problèmes de sauts solutions liés à l'adoucissement

Nous allons porter notre attention sur les problèmes liés à l'adoucissement dans les modèles de zones cohésives. Sans rappeler ce qui a déjà été dit au § 2.6 sur les comportements adoucissants

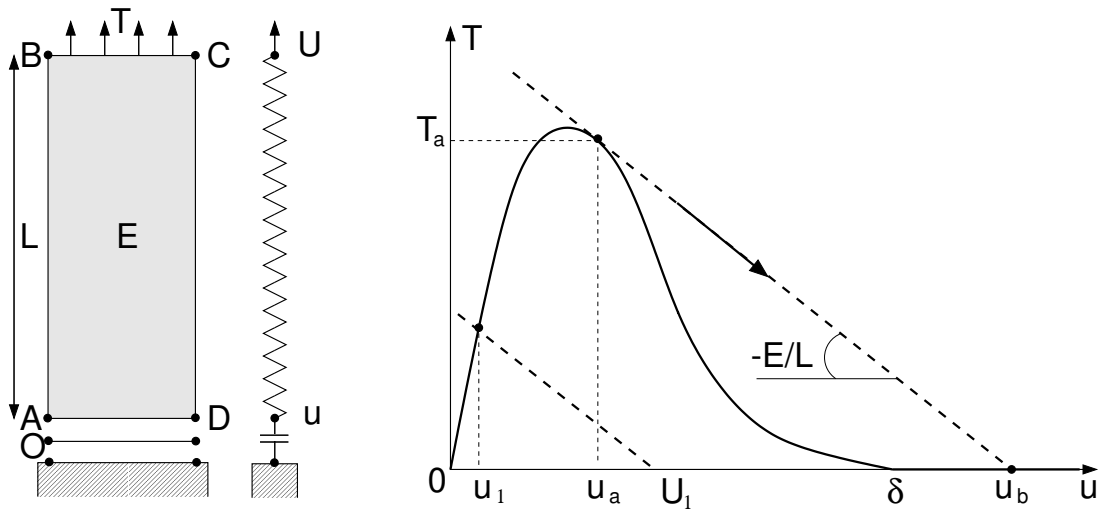


FIGURE 5.9 – *Exemple uniaxial illustrant le phénomène de saut de solution, d'après* MONERIE *(2000)*

volumiques, nous essaierons tout de même de faire le parallèle avec les problèmes déjà rencontrés et les méthodes utilisées pour y remédier.

Pour arriver à notre but, nous allons considérer un système mécanique extrêmement simple introduit par MONERIE (2000) (§ 5.3.6.a). Cette présentation sera brève et l'on renvoie le lecteur intéressé à CHABOCHE *et al.* (2001) ; MONERIE & ACARY (2001) pour plus de détails. Nous donnerons, de plus, les solutions usuellement envisagées(§ 5.3.6.b).

Enfin, nous donnerons quelques conclusions plus personnelles sur la manière d'envisager le problème et sur les solutions à apporter(§ 5.3.6.c et § 5.3.6.d).

5.3.6.a Un système mécanique simple.

Considérons le système, illustré à la figure 5.9 d'un barreau de longueur L et de module d'élasticité E en série avec un zone adhésive. On note U le déplacement imposé global, u le déplacement à l'interface et T la résultante des efforts sur le barreau à l'interface BC.

On suppose désormais que la fonction adoucissante qui représente le comportement adhésif de l'interface est décrite par la fonction régulière $r(u)$. On suppose sans enlever de généralité que $r(u) = 0,$ pour $u \geq \delta > 0$. L'équilibre (statique) du système, i.e., la valeur de l'inconnue u, est obtenue sous un déplacement imposé U comme l'intersection des graphes suivants :

$$\begin{cases} U = u + \dfrac{L}{E} T \\ T = r(u) \end{cases} \tag{5.3.50}$$

Si l'on fait croître U de façon monotone, deux situations peuvent se présenter au delà du sommet de la courbe :

1. soit le rapport $k = \dfrac{E}{L}$ est suffisamment grand et il existe toujours un point de fonctionne-

ment répondant à (5.3.50), auquel cas, l'évolution est stable,

2. soit le rapport est trop faible et le point de fonctionnement passe brutalement de u_a à u_b. Il y a alors saut de solution.

La possibilité d'obtenir deux (voire plus) points de fonctionnement est liée au rapport entre la pente k qui est une donnée structurelle et la valeur de la plus grande pente de la courbe $r(u)$. une condition d'unicité de la solution peut être donnée sous la forme suivante :

$$\frac{|\sup_u(r'(u))|}{E/L} < 1 \tag{5.3.51}$$

La valeur de la plus grande pente est atteinte au point d'inflexion de la courbe pour $r''(u) = 0$. Ceci est vrai pour les courbes régulières. Pour le modèle limite non visqueux de Frémond-Cangémi, cette condition est atteinte au pic en réaction ; c'est à dire au tout début de l'endommagement [21].

Du point de vue de l'évolution de la fissure, nous avons déjà remarqué que la propagation stable était très peu dépendante de la forme de la courbe $r(u)$ mais reliée uniquement à l'énergie dissipée. On comprend intuitivement sur cet exemple que ce n'est pas le cas pour l'initiation de la fissuration. Plus les modèles sont raides du point de vue de leur adoucissement plus ils sont instables.

Au niveau numérique, ces problèmes entraînent tout comme dans le cas volumique un manque d'objectivité des réponses face aux paramètres de l'algorithme (maillage, incrément de chargement, schéma d'intégration, ...).

5.3.6.b Solutions pour remédier à ces problèmes

Les solutions proposées pour surmonter ces problèmes sont semblables à celles introduites pour les solides volumiques. Il s'agit d'introduire une nouvelle forme de dissipation ou de stockage d'énergie dans le modèle, soit directement, soit par le biais d'une longueur ou d'un temps caractéristiques de diffusion. On aboutit alors à des modèles non-locaux en espace ou en temps. Précisons les brièvement pour les modèles de zones cohésives :

- *Régularisation visqueuse* Chaboche *et al.* (2001) donnent un bel exemple de l'effet de la régularisation visqueuse sur les problèmes de saut de solutions dans les modèles de zone cohésives. La régularisation est alors non-locale en temps.
- *Théories d'ordre supérieur* L'introduction du premier gradient de β produit le même effet que pour l'endommagement volumique des matériaux (voir § 2.6.2.b,(Frémond & Nedjar, 1996)).
- *Régularisation dynamique* L'emploi de la dynamique permet elle aussi de régulariser le problème. Nous décrirons cet aspect dans la suite.

21. Ce résultat 5.3.51 est étendu au problème variationnelle quasi-statique sous la forme d'un théorème dont la démonstration peut être trouvée dans (Monerie, 2000) et (Monerie & Acary, 2001).

5.3.6.c Instabilités et adoucissement

Sans rappeler en détail les travaux exposés dans le § 2.6, un critère de stabilité matérielle souvent utilisé est le critère de Hill (2.6.1). Il est issu d'une analyse due à Drucker (1959) des énergie mises en jeu dans les principes des puissance virtuelles.

La stabilité est alors garantie si l'on ne peut retirer aucune énergie supplémentaire d'un cycle de chargement (en contraintes pour l'inégalité de Drucker (1959) ou en déformations pour Hill (1948)). Du point de vue du système, l'énergie apportée pour sa transformation est entièrement consommée par le processus de déformation. Drucker (1959) donne quelques exemples où cette condition est violée ; ils sont illustrés sur la figure 2.14.

On remarque sur l'exemple didactique précédent que ces conditions ne sont pas remplies. En effet, dans un cadre quasi-statique, le travail apporté par l'extérieur à travers le déplacement imposé $T.U$ ne peut pas être consommé. Un moyen de remédier à ce problème est d'apporter une nouvelle source de dissipation ou de stockage de l'énergie.

Lorsque le système rencontre un saut de solution, on constate que le système devient, en quelques sortes, indéterminé. En effet, l'évolution de l'élongation du ressort n'est plus déterminée et chute à zéro en un instant donné. Si nous considérons une évolution incrémentale en déplacement pour résoudre le problème, on constate que quelque soit la valeur de l'incrément de chargement le saut de solution est présent et constant. On constate donc que l'équilibre énergétique est rompu et qu'il manque une information supplémentaire pour le restaurer. Comme nous venons de le dire, cette information peut être donnée soit par une nouvelle source de dissipation, soit par une nouvelle forme de stockage de l'énergie.

D'une manière générale, on introduit indirectement un temps de réponse, qui rend l'évolution de la structure déterminée, soit une longueur caractérictique d'un interaction non-locale en espace. Ces solutions sont bien sûr intimement liées aux considérations énergétiques que nous venons de discuter.

On peut aussi considérer que la rupture se produit en un instant ponctuel comme c'est le cas pour la mécanique de la rupture fragile. Dans ce cas alors, il faut spécifier la donnée d'une énergie restituée pendant ce processus ; elle doit être en effet bornée pour être mécaniquement acceptable. Cela nous ramène à l'analogie qui a été faite au § 5.3.3 entre la rupture fragile et la mécanique des chocs. Ces deux phenomènes sont des exemples frappants de mécanique non régulière.

5.3.6.d Conclusions et solutions choisies

La solution choisie s'appuie sur une formulation dynamique du problème de zones cohésives avec adoucissement (progressif ou brutal). Le choix d'un régularisation visqueuse exclusive n'a pas été fait, bien que les modèles puissent comporter une viscosité éventuelle. Ce choix peut être justifié de la manière suivante. La présence d'une viscosité dans les mortiers est difficile à mettre en évidence. De plus, son emploi est difficile à mettre en œuvre devant le manque de données expérimentales. Le choix d'un gradient d'intensité d'adhésion n'a pas non plus été implémenté

avant tout pour des problèmes de mise en œuvre dans les milieux discrets (faible nombre de points de contact par faces d'éléments, relation difficile entre les éléments, *etc.*...).

Le choix d'une formulation dynamique (éventuellement visqueuse) se justifie de la manière suivante. Les problèmes liés aux sauts de solutions et à l'adoucissement, souvent intimement mélés aux phénomènes de séparations de la matière. Ils doivent s'inscrire dans un cadre dynamique. Les remarques de DRUCKER, les constations faites sur le problème simple présenté au § 5.3.6.a, concourent à justifier ce parti pris. Les travaux de DÉSOYER & KERYVIN (1999) prônent aussi en ce sens. Si il s'agit de phénomènes non locaux, une moyen simple de transporter l'information reste les ondes élastiques et l'inertie.

Pour ce problème, tout comme pour celui des chocs, la dynamique offre un cadre naturel pour envisager les problèmes de mécanique non régulière. Il semble, en effet, que la non régularité, invoquée par des passages à la limite en temps, ne soit pas compatible avec un autre type de passage à la limite qui est l'évolution quasi-statique d'un système mécanique. Nous reviendrons sur cette problématique lorsqu'il sera question d'équilibre des systèmes multi-corps (§ 7.1).

5.4 Conclusion

Les principales conclusions et les enseignements majeurs sur le modèle et le cadre dans lequel il doit être formulé, ont été évoqués aux § 5.2.1.c et § 5.3.6.d. Nous proposaons ici d'en faire la synthèse.

Un modèle basique, composé de la condition de SIGNORINI et du frottement de COULOMB, semble être adapté aux traitements des joints vifs et des mortiers anciens. Leur formulation a été faite dans le cadre de l'Analyse Convexe qui permet de les manipuler aisément sur le plan mathématique. Elle permet, de plus, de les considérer au même titre que des lois de comportement plus classiques des milieux « volumiques », profitant alors des developpements de Thermodynamique des Milieux Continus, dans lequel elles s'inscrivent.

Le caractère unilatéral du modèle est synonyme de non régularité à plusieurs niveaux. Cette non régularité se retrouve, à la fois dans les lois qui formulent le comportement des liaisons et dans les solutions des problèmes. Les mouvements réguliers ne sont qu'un cas particulier, lorsque la vitesse est astreinte à évoluer dans le cône tangent au contact. Pour les mouvements généraux, non réguliers, la nature mathématique des grandeurs cinématiques et sthéniques est envisagée de façon différente. Une définition ponctuelle de l'accélération et des efforts n'est plus envisageable. Seule une formulation en termes de distributions reste pertinente. Le choix des vitesses dans l'ensemble des fonctions à variations bornées est essentiel. Les accélérations sont alors substituées par des mesure différentielles et les réactions sont considérées comme des impulsions.

Ce modèle a été enrichi pour tenir compte de la cohésion, éventuellement élastique, des joints de mortier. La dégradation de cette cohésion est modélisée par un endommagement fragile. Ceci constitue le caractère original du modèle de joint qui faisait défaut jusqu'alors. L'endommagement surfacique, couplé intimement à la plasticité, s'inscrit naturellement dans les modélisations usuelles des géomatériaux quasi-fragiles. Deux modèles d'endommagement ont été proposés : Le

premier est brutal et s'apparente à de la rupture fragile, le second s'appuie sur le modèle de Frémond-Cangémi, qui offre une évolution progressive de l'endommagement.

A l'instar des modèles traditionnels dédiés aux matériaux quasi-fragiles, la prise en compte de l'adoucissement révèle quelques difficultés. Les phénomènes de sauts de solutions, liés aux indéterminations de variables fondamentales dans le problème quasi-statique, nous conduisent à user de la dynamique pour pouvoir aboutir à un problème correctement posé.

La dynamique est donc essentielle à appréhender correctement les deux points suivants :

- Le caractère non régulier qu'impliquent les lois unilatérales.
- les problèmes liés à la localisation de la déformation inhérente au comportement adoucissant.

Pour terminer cette conclusion sur une note plus intuitive, donnons une réflexion qui justifie l'emploi d'une formulation dynamique. Les modèles, que nous venons de décrire, s'emploient à rendre compte de phénomènes de séparation de la matière. Il semble que quand deux corps se séparent, il soit naturel d'user de la dynamique afin de maîtriser la liberté supplémentaire qui leurs est offerte.

CHAPITRE 6

La méthode de la dynamique non régulière du contact

—

Non Smooth Contact Dynamics method (NSCD)

———————— oOo ————————

Après avoir formulé le modèle, il s'agit à présent de le résoudre. La résolution est numérique ; elle s'inscrit dans une méthode, la méthode NSCD qui a été pensée pour répondre aux problèmes de Mécanique Non Régulière en dynamique. La contribution de l'auteur, à cette méthode, a été de l'adapter aux traitements de collections de corps déformables, ainsi que de l'enrichir du modèle de cohésion. Si les méthodes de discrétisation spatiales sont assez usuelles, l'accent a été mis sur le caractère discret du système. Il est, en effet, possible d'en tirer partie, afin d'améliorer l'efficacité des algorithmes. La discrétisation temporelle proposée suit au plus près les recommandations qui ont été faites dans le chapitre précédent, quant à la non régularité des grandeurs cinématiques et sthéniques. Enfin, les algorithmes de résolution sont présentés, en précisant comment la cohésion a été introduite.

———————— oOo ————————

Plan du Chapitre 6

6.1 Discrétisation spatiale, spécicifités de la méthode NSCD 209
6.1.1 Généralités sur les techniques employées 209
6.1.2 Spécificités associées aux systèmes multi-corps 210
6.1.3 Relations entre variables locales et globales 212
6.1.4 Synthèse de la démarche adoptée 216
6.2 Discrétisation temporelle et conditions unilatérales 218
6.2.1 Position du problème et contexte général non linéaire 218
6.2.2 Intégration numérique des systèmes non linéaires raides 219
6.2.3 Intégration numérique en présence de conditions unilatérales 224
6.2.4 Intégration temporelle, les choix de la méthode NSCD 227
6.3 Résolutions des équations discrétisées - dynamique et liaisons unilatérales 234
6.3.1 Prise en compte des non linéarités matérielles et géométriques . . . 234
6.3.2 Résolution du problème de contact frottant 235
6.3.3 Algorithme général de résolution - Méthode NSCD 241
6.3.4 Particularité des modèles de cohésion et de flexibilité 242
6.4 Commentaires et conclusions sur la méthode présentée 243

6.1 Discrétisation spatiale, spécicifités de la méthode NSCD

6.1.1 Généralités sur les techniques employées

Les méthodes de discrétisation spatiale du problème sont très classiques. En ce qui concerne les corps rigides, la discrétisation du problème est naturellement obtenue en tirant profit de la cinématique, qui offre un jeu de paramètres $\boldsymbol{q}$ de dimension finie.

Pour les corps déformables, les techniques usuelles aux éléments finis sont employées. En repartant du Théorème des Puissances Virtuelles, pour un champ de vitesses virtuelles $\hat{\boldsymbol{v}}$ (§ 5.1.3), une discrétisation spatiale revient à estimer le champ de vitesses continu $\hat{\boldsymbol{v}}$, à partir d'un nombre fini de valeurs aux points de l'espace $\hat{\boldsymbol{v}}_i, i \in [\![1, n]\!]$.

Les particularités des méthodes éléments finis, tout au moins conformes, tiennent dans la donnée d'un maillage conforme, réalisant le découpage en domaine polyédrique, et d'un élément fini, i.e., un couple $(\pm, \mathcal{P})$ associé à chacun de ces polyèdres ; $\pm$ est l'ensemble des degrés de liberté composé de n formes linéaires agissant sur l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{P}$ un espace vectoriel de dimension n de fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^3$, appelées fonction de formes. Ces deux espaces sont réunis par la propriété d'unisolvance qui rend unique la décomposition d'une grandeur continue sur un domaine géométrique.

Notons $\{\boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{X}), i \in [\![1, n]\!]\}$, l'ensemble des fonctions de formes $\mathcal{P}$, l'interpolation du champ continu $\hat{\boldsymbol{v}}$ est réalisée de la manière suivante :

$$\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{X})\hat{\boldsymbol{v}}_i(t), \tag{6.1.1}$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}, t) = \boldsymbol{N}_i(\boldsymbol{X})\boldsymbol{v}_i(t). \tag{6.1.2}$$

Ces approximations sont introduites dans la formulation du problème en vitesse, ici, le théorème des puissances virtuelles, de façon à obtenir un système d'équations différentielles discret d'inconnues $\boldsymbol{v}_i(t)$. On ne donnera pas dans ce chapitre le détail des opérateurs mis en jeu dans ce système discret, on renvoie pour cela aux ouvrages de référence suivants (Zienkiewicz & Taylor, 1989, 1991 ; Bathe, 1996 ; Crisfield, 1991,1997).

En notant de manière générique $\{\boldsymbol{q}\}$, l'ensemble des inconnues du problème discrétisé à la fois pour les corps rigides et déformables, on suppose que le système différentiel peut se mettre sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{P}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t) \tag{6.1.3}$$

où on définit :

- L'opérateur d'inertie $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})$ est supposé ne dépendre que de $\boldsymbol{q}$. Pour les corps rigides, il est généralement possible de trouver un jeu de paramètres où cet opérateur, exprimé dans un repère attaché au solide, est constant. Dans les applications qui vont suivre, on supposera que seules de petites déformations sont susceptibles de se produire, même en présence de grands déplacements. L'opérateur d'inertie sera alors soit constant, soit lentement variable avec $\boldsymbol{q}$. On suppose de plus qu'il est semi-défini positif.

- Le terme $\boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t)$ représente à la fois les forces internes et les termes d'accélération quadratique. Pour un solide rigide, seuls les termes dans $\boldsymbol{Q}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t)$. Pour les corps déformables, le cadre cinématique lagrangien total ne fait apparaîte dans ce terme que les forces intérieures.
- Le terme $\boldsymbol{P}(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t)$ représente l'ensemble des efforts extérieurs au système ainsi que les efforts associés aux liaisons. Nous avons choisi de considérer par convention que les efforts émanant des liaisons entre les différents corps du système sont notés avec la même convention que les efforts extérieurs au système. On ne différencie alors pas les efforts mis en jeu entre les corps du système et les efforts mis en jeu par une liaison avec l'extérieur du système considéré.

Dans la suite, nous parlerons à propos du système (6.1.3) indifféremment d'équation de la dynamique discrétisée en espace ou semi-discrétisée.

6.1.2 Spécificités associées aux systèmes multi-corps

Une des principes de l'approche que nous proposons de maçonneries tient dans le caractère discret de la modélisation. Les maçonneries sont considérées comme des systèmes multi-corps, i.e., des systèmes formés par une collection de corps rigides ou déformables interconnectés par des liaisons.

D'un point de vue théorique, ils ne se différencient guère des systèmes traditionnels. A contrario, d'un point de vue pratique, ou si l'on préfère numérique, ils exhibent de nombreuses spécificités dues à leur structure discrète. Bien que l'on puisse les modéliser en ignorant ces spécificités, notre choix a plutôt été d'en tirer partie afin d'améliorer l'efficacité des algorithmes [1]. Nous donnons dans ce paragraphe quelques éléments caractéristiques de cette démarche dans le traitement des différents opérateurs des équations de la dynamique discrétisée.

Opérateurs d'inertie, opérateurs de forces intérieures Considérons une collection de N corps rigides ou déformables, notés par les exposant $k \in [\![1, N]\!]$ représentés par leurs configurations à l'instant t, ω_t^k, et les jeux de paramètre issus de la discrétisation spatiale $\boldsymbol{q}^k$.

Nous avons fait le choix de considérer que les liaisons (efforts et variables cinématiques) qui relient deux corps du système, sont traités comme des actions extérieures à ces corps. Si l'on exprime par $\boldsymbol{P}^k(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t)$, l'ensemble de ces efforts exercés sur le corps k, l'équation de la dynamique discrétisée peut se mettre sous la forme du système différentiel suivant :

$$\boldsymbol{M}^k(\boldsymbol{q}^k)\ddot{\boldsymbol{q}}^k + \boldsymbol{Q}^k(\dot{\boldsymbol{q}}^k, \boldsymbol{q}^k, t) = \boldsymbol{P}^k(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t), \quad k \in [\![1, N]\!] \tag{6.1.4}$$

Cette écriture qui peut paraître anodine a pourtant des conséquences importantes d'un point pratique. En effet, la construction des opérateurs d'inertie et de forces intérieures peut être

1. Notre travail est avant tout un travail de mécanicien, soucieux de la mise en œuvre numérique et informatique. Les solutions proposées pour améliorer cette efficacité seront pour la plupart basées sur des considérations mécaniques ou algorithmiques. Les considérations d'optimisation informatique pure ne seront pas abordées.

grandement facilitée si l'on tient compte de la structure divisée des systèmes envisagés. Ces opérateurs, pour peu qu'ils soient linéaires[2], peuvent s'exprimer par des relations matricielles de taille réduite.

Dans les applications traitées dans la suite, nous verrons que l'on considère de larges collections de corps où le jeu de variables est relativement réduit (moins de 50, en général). Ceci nous conduit à manipuler des systèmes différentiels de faible taille, particulièrement efficaces d'un point de vue numérique. Si, de plus, les discrétisations sont identiques pour un certain nombre de corps et le restent au cours de la transformation, la fabrication et le stockage des opérateurs peuvent alors être factorisés. Pour les simulations d'appareil régulier en petites perturbations, tirer avantage de la structure divisée et répétitive du milieu permet d'envisager de large collections pour des coûts numériques raisonnables.

Efforts extérieurs Les efforts appliqués, extérieurs à chaque corps k, peuvent s'exprimer comme la somme de deux termes :

$$\boldsymbol{P}^k(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{F}^k(\dot{\boldsymbol{q}}^k, \boldsymbol{q}^k, t) + \boldsymbol{R}^k(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t) \tag{6.1.5}$$

où $\boldsymbol{F}^k(\dot{\boldsymbol{q}}^k, \boldsymbol{q}^k, t)$ est la partie des efforts extérieurs au système appliquée au corps k et $\boldsymbol{R}^k(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}, t)$ est la partie des efforts résultants des actions entre les corps du système et le corps k. Si l'on considère pour le moment que ces derniers sont connus pour chaque corps k comme la solution $\boldsymbol{R}^k$ d'un système extérieur, on est ramené à la résolution d'un système réduit à chaque corps :

$$\boldsymbol{M}^k(\boldsymbol{q}^k)\ddot{\boldsymbol{q}}^k + \boldsymbol{Q}^k(\dot{\boldsymbol{q}}^k, \boldsymbol{q}^k, t) - \boldsymbol{F}^k(\dot{\boldsymbol{q}}^k, \boldsymbol{q}^k, t) = \boldsymbol{R}^k, \quad k \in [\![1, N]\!] \tag{6.1.6}$$

Là encore, le terme $\boldsymbol{F}^k(\dot{\boldsymbol{q}}^k, \boldsymbol{q}^k, t)$ peut être segmenté pour chque corps et traité de manière indépendante.

Efforts de liaisons Les efforts de liaisons $\boldsymbol{R}^k$ entre deux corps sont liés par le principe de l'action et de la réaction. Ils peuvent eux donc être dédoublés à un niveau global pour permettre une résolution par blocs des systèmes différentiels.

Démarche adoptée dans la methode (NSCD) Pour tirer le plein avantage de la structure divisée des systèmes étudiés, nous choisissons de conserver un système d'équations différentielles globales qui matriciellement s'exprime sous la forme d'un système diagonal par blocs associé à un système de contraintes locales assurant le respect des liaisons.

Le système de contraintes auquel sont soumis les efforts des liaisons, dépend bien entendu des valeurs prises par les variables $\boldsymbol{q}$ et vice versa. Les deux systèmes sont donc fortement couplés.

2. Nous verrons, dans la suite, que si d'une manière générale ils ne sont pas linéaire, on peut s'y ramener en utilisant des méthodes incrémentales basées sur la linéarisation des équation de la dynamique.

Pourtant, nous choissirons de les résoudre chacun à leur tour jusqu'à convergence. Dans un cas, la résolution du système global en vitesses se fera avec des valeurs provisoires pour les efforts de liaisons. Dans l'autre cas, la résolution du système local en réactions se fera pour des valeurs provisoires des vitesses.

Afin de préciser cette démarche, nous donnons dans le prochain paragraphe les relations qui lient les variables globales aux varibles locales. Ceci nous permettra de dresser au § 6.1.4 un schéma synoptique résumant la démarche.

Remarque 6.1
Une démarche courante dans les systèmes multicorps consiste à intégrer les liaisons directemet aux équations du mouvement. Les grandeurs $\boldsymbol{R}^k$, qui représentent la somme des multiplicateurs de Lagrange associés aux liaisons imposées aux variables $\boldsymbol{q}^k$, et les vitesse $\dot{\boldsymbol{q}}^k$ sont alors recherchées simultanément.

Si les liaisons sont bilatérales, elles s'expriment par un jeu d'équations portant sur $\boldsymbol{q}^k$. Une démarche usuelle consiste à les intégrer au système (6.1.3), soit directement, soit au moyen des multiplicateurs de Lagrange. Le système matriciel linéarisé n'est alors plus diagonal par blocs. Pour les liaisons unilatérales, on peu faire de même, en conservant le multiplicateur régi par une condition de complémentarité.

Le système matriciel linéarisé n'a alors plus sa structure diagonale par blocs. Si l'on considère un nombre important de corps avec un nombre réduit de degré de liberté, on perd en efficacité numérique.

❑

6.1.3 Relations entre variables locales et globales

Comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe précédent, la résolution des contraintes associées aux liaisons se fait dans les repères locaux. Nous qualifierons, dans la suite, de façon générique par le terme « contact » chacune de ces liaisons quelle soit bilatérale, unilatérale, cohésive, *etc.*. . . Chacune de ces liaisons se formule simplement dans le repère local au contact $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})$ défini au § 5.2.2, évitant ainsi les complications techniques relatives à la cinématique. L'objet de ce paragraphe est de préciser les relations de passage entre les variables locales au contact et les variables globales de description du système.

Pour les variables cinématiques, seules les vitesses seront transportées du niveau global au niveau local. La structure vectorielle dont elles jouissent permet en effet des jeux d'ecritures simples. Pour les grandeurs locales homogènes à des déplacements, une intégration temporelle permet de les retrouver.

Nous supposerons, pour le moment, que les interfaces ont été préalablement discrétisées et que cette discrétisation fournit un ensemble de χ couples candidats et antagonistes au contact. Les grandeurs cinématiques et sthéniques associées à chaque couple seront désignées par un exposant grec, $\alpha, \in [\![1, \chi]\!]$. Nous reviendrons au § 7.3.3 sur le problème de la discrétisation des interfaces, pour les solides déformables.

6.1.3.a Relations pour les vitesses

Pour les vitesses, il faut parvenir, pour chaque contact α, à relier la vitesse globale $\dot{\boldsymbol{q}}$ à la vitesse relative locale $\boldsymbol{v}^\alpha$.

Formellement, les relations cinématiques usuelles sur les positions (ou les déplacements) $\boldsymbol{q}$ peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{x}^\alpha_{\mathsf{C}} = \boldsymbol{\Upsilon}^\alpha_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{q}), \qquad \boldsymbol{x}^\alpha_{\mathsf{A}} = \boldsymbol{\Upsilon}^\alpha_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{q}), \tag{6.1.7}$$

où les indices c et A notent respectivement les grandeurs attachées aux candidats et aux antagonistes du contact α. Nous donnerons dans la suite des exemples pour les fonctions $\boldsymbol{\Upsilon}^\alpha$.

La vitesse relative, $\boldsymbol{v}^\alpha$, se déduit alors naturellement par :

$$\boldsymbol{v}^\alpha = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{x}^\alpha_{\mathsf{C}} - \boldsymbol{x}^\alpha_{\mathsf{A}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\Upsilon}^\alpha_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{q}) - \boldsymbol{\Upsilon}^\alpha_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{q})\right)\dot{\boldsymbol{q}}. \tag{6.1.8}$$

Nous noterons cette relation plus simplement en introduisant l'opérateur $\boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q})$:

$$\boldsymbol{v}^\alpha = \boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} \tag{6.1.9}$$

L'opérateur $\boldsymbol{G}^\alpha$ est une application linéaire dépendant de $\boldsymbol{q}$ et du temps. Nous préciserons dans la suite quelques propriétés de cette application.

6.1.3.b Relations pour les efforts de liaisons

En considérant la puissance, $\langle\,.\,,.\,\rangle$, mise en jeu dans la liaison, on peut, par dualité, exprimer la relation qui relie les grandeurs sthéniques locales et globales, pour un contact α :

$$\langle \boldsymbol{v}^\alpha, \boldsymbol{r}^\alpha\rangle = \langle \boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{r}^\alpha\rangle = \langle \dot{\boldsymbol{q}}, {}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}^\alpha\rangle = \langle \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{R}\rangle \tag{6.1.10}$$

soit, en posant ${}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{H}^\alpha(\boldsymbol{q})$,

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{H}^\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}^\alpha \tag{6.1.11}$$

6.1.3.c Illustrations des opérateurs $\boldsymbol{G}^\alpha$ et $\boldsymbol{H}^\alpha$ sur un exemple simple

Considérons le contact entre un corps déformable candidat et un obstacle rigide antagoniste(voir 6.1). Afin de préciser la relation formelle 6.1.7, donnons quelques détails techniques de leur construction. Ils peuvent se décomposer en opérateurs élémentaires de la manière suivante :

- Le premier de ces opérateurs, que nous noterons $\boldsymbol{I}^\alpha(\boldsymbol{q})$, selectionne parmi l'ensemble le jeu de variables globales $\boldsymbol{q}$ les variables, que nous qualifierons d'adjacentes au contact notés $\boldsymbol{q}^\alpha_{\mathsf{adj}}$, qui servent directement au calcul des grandeurs cinématiques au point de contact (voir 6.1).

  Nous distinguerons les grandeurs adjacentes à la particule candidate, notée $\boldsymbol{q}^\alpha_{\mathsf{adjC}}$ (sur notre exemple les grandeurs correspondant aux deux noeuds à l'interface) des grandeurs adjacentes à la particule antagoniste notée, $\boldsymbol{q}^\alpha_{\mathsf{adjA}}$ (pour notre exemple d'un antagoniste

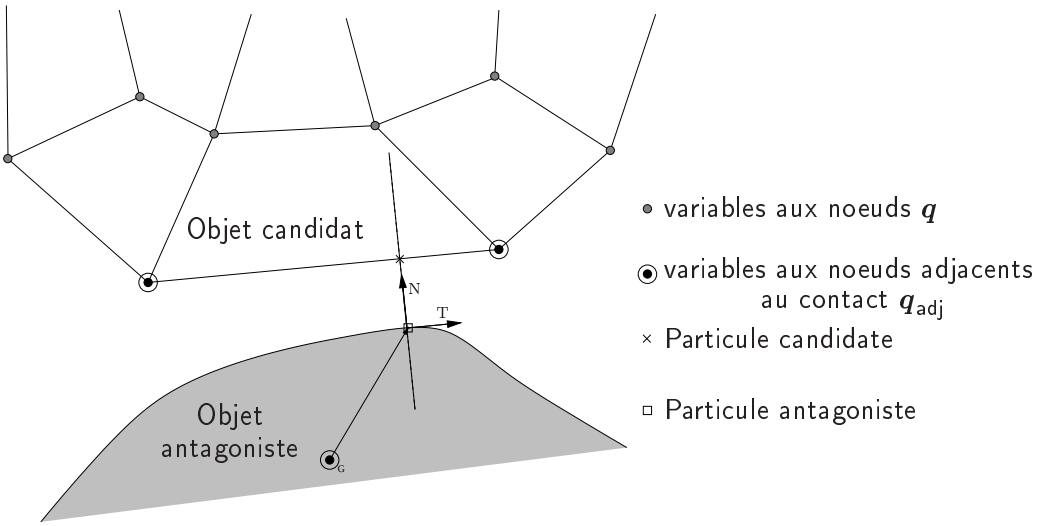


FIGURE 6.1 – *Réduction aux variables de contact*

rigide, ce seront simplement les paramètres de sa description).
Cette sélection, qui se résume dans la pratique à l'emploi d'un pointeur, peut s'écrire :

$$\boldsymbol{q}^{\alpha}_{\mathsf{adjC}} = \boldsymbol{I}^{\alpha}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{q}), \quad \boldsymbol{q}^{\alpha}_{\mathsf{adjA}} = \boldsymbol{I}^{\alpha}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{q}). \tag{6.1.12}$$

– Le second opérateur réalise le calcul au point de contact des grandeurs cinématiques à partir des valeurs aux noeuds adjacents. Nous noterons cet opérateur $\boldsymbol{N}^{\alpha}(\boldsymbol{q}^{\alpha}_{\mathsf{adj}})$ par analogie avec l'interpolation éléments finis. En règle générale pour les corps déformables, cette interpolation est issue de la restriction aux interfaces de l'interpolation éléments finis volumiques. Pour les solides rigides, cette opération n'est pas à proprement parler une interpolation mais reflète les relations cinématiques qui relient tout point du solide rigide en mouvement. Nous l'écrirons, de manière formelle :

$$\boldsymbol{q}^{\alpha}_{\mathsf{C}} = \boldsymbol{N}^{\alpha}_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{q}^{\alpha}_{\mathsf{adjC}}), \quad \boldsymbol{q}^{\alpha}_{\mathsf{A}} = \boldsymbol{N}^{\alpha}_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{q}^{\alpha}_{\mathsf{adjA}}). \tag{6.1.13}$$

– Enfin, le dernier opérateur $\boldsymbol{R}^{\alpha}$ correspond au changement de repère entre le repère global et le repère local au contact, soit :

$$\boldsymbol{x}^{\alpha}_{\mathsf{C}} = \boldsymbol{R}^{\alpha}\boldsymbol{q}_{\mathsf{C}}, \quad \boldsymbol{x}^{\alpha}_{\mathsf{C}} = \boldsymbol{R}^{\alpha}\boldsymbol{q}_{\mathsf{A}}. \tag{6.1.14}$$

Les opérateurs $\boldsymbol{\Upsilon}^{\alpha}_{\mathsf{C}}$ et $\boldsymbol{\Upsilon}^{\alpha}_{\mathsf{A}}$ peuvent se résumer à :

$$\boldsymbol{\Upsilon}^{\alpha}_{\mathsf{C}} = \boldsymbol{R}^{\alpha} \circ \boldsymbol{N}^{\alpha}_{\mathsf{C}} \circ \boldsymbol{I}^{\alpha}_{\mathsf{C}}, \qquad \boldsymbol{\Upsilon}^{\alpha}_{\mathsf{A}} = \boldsymbol{R}^{\alpha} \circ \boldsymbol{N}^{\alpha}_{\mathsf{A}} \circ \boldsymbol{I}^{\alpha}_{\mathsf{A}} \tag{6.1.15}$$

REMARQUE 6.2

Il est usuel pour les systèmes discrets d'exprimer les liaisons unilatérales parfaites comme des inégalités qui portent directement sur le jeu de paramètre du système($f_{\alpha}(\boldsymbol{q}) \leq 0$, voir § 5.2.1). Si la résolution de ces contraintes se fait à un niveau global, la cinématique du contact est prise

en compte grâce au jacobien de ces conditions. L'opérateur $\boldsymbol{H}^\alpha$ peut être relié à ce jacobien en s'appuyant sur la relation (5.2.8) :

$$\exists \lambda_\alpha \in \mathbb{R}, \quad / \quad \boldsymbol{H}^\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{n}^\alpha = -\lambda_\alpha \nabla_q f_\alpha(\boldsymbol{q}) \tag{6.1.16}$$

Moreau (1999) souligne que ce résultat est la version unilatérale du théorème des multiplicateurs de Lagrange, connue en Analyse Convexe sous le lemme de Farkas.

❑

6.1.3.d Propriétés des opérateurs $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H}$.

Propriétés des opérateurs pour un contact α En règle général, les applications linéaires $\boldsymbol{G}^\alpha$ et $\boldsymbol{H}^\alpha$ sont respectivement surjective et injective. Il peut arriver, dans des positions singulières, que des défauts de paramétrisation de la cinématique ou des relations cinématiques surabondantes conduident à perdre ces propriétés. Nous supposerons que pour un unique contact α, le problème est contourné.

Dans les applications qui vont suivre en quasi-statique ou en dynamique « lente », nous supposerons que $\boldsymbol{G}^\alpha$ et $\boldsymbol{H}^\alpha$ varient lentement par rapport à la variable $\boldsymbol{q}$ et par rapport au temps. Ceci nous conduira pour de nombreuses applications à négliger leurs dérivées temporelles, ainsi que leurs gradients.

Ceci constitue une bonne approximation pour les problèmes en petites perturbations et au cours d'un incrément du problème linéarisé par des méthodes incrémentales. Elle peut par contre être gravement mise en défaut si les repères locaux évoluent rapidement, par exemple, en présence de grandes courbures des surfaces en contact ou de rotations finies dans les mouvements des corps.

Propriétés des opérateurs globaux $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H}$. Considérons maintenant les opérateurs assemblés pour l'ensemble des contacts $\{\alpha, \alpha \in [\![1, \chi]\!]\}$, définis de la manière suivante :

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \quad : \quad \boldsymbol{r} = [\boldsymbol{r}^\alpha,\, \alpha \in [\![1, \chi]\!]] \longmapsto \boldsymbol{R} = \sum_{\alpha=1}^{\chi} \boldsymbol{H}^\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}^\alpha, \tag{6.1.17}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}) \quad : \quad \boldsymbol{q} \longmapsto \boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u}^\alpha,\, \alpha \in [\![1, \chi]\!]] = [\boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q},\, \alpha \in [\![1, \chi]\!]] \tag{6.1.18}$$

Si les opérateurs élémentaires, $\boldsymbol{H}^\alpha(\boldsymbol{q})$ et $\boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q})$, possèdent, le plus souvent, la propriété d'être respectivement injectif et surjectif, ce n'est nécessairement le cas pour les opérateurs assemblés $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ et $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$.

Par exemple, si l'on considère un corps rigide, il est facile d'appliquer un jeu de réactions de contact $\boldsymbol{r}$ non nulle qui produit une résultante globale nulle sur le corps. On comprend que l'ensemble des réactions de contact auto-équilibrées qui produisent un torseur global nul constitue le noyau de l'application $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$. Si le système est hyperstatique, l'application $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ n'est plus injective. Par dualité, $\boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q})$ n'est plus surjective.

Dans le cas des solides déformables tridimensionels, la situation est souvent moins critique puisque le système offre un nombre de degré de liberté beaucoup plus important. Cependant, ils nécessitent souvent une discrétisation des interfaces en contact beaucoup plus fine. De plus, pour un système de liberté finie, comme on peut l'obtenir après discrétisation, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ peut aussi perdre sa propriété d'injectivité. Si l'on considère l'exemple illustré à la figure 6.1, plusieurs points de contact sur un segment de l'interface, dont les degrés de liberté sont asservis par l'élément fini, peuvent conduire à engendrer le même type d'inconvénient.

La perte des propriétés d'injectivité et de surjectivité met en évidence des liaisons cinématiques entre les contacts, qui traduisent le fait que les degrés de liberté d'un corps discrétisé ne sont pas indépendants. Nous verrons dans la suite que ces liaisons peuvent avoir des conséquences ennuyeuses sur les propriétés de convergence des algorithmes.

Comme nous l'avons vu dans le § 3.1, en particulier lors de la remarque 3.1, on peut rendre artificiellement $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ injectif en considérant sa restriction à l'espace complémentaire de son noyau. Pour ce qui nous concerne, nous essaierons, au moins dans le cas des solides déformables, de choisir une discrétisation judicieuse des interfaces (voir § 7.3.3).

Remarque 6.3
Les opérateurs globaux, $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H}$ ne sont jamais assemblés explicitement. Une fois encore, profitant de la structure discrète des systèmes envisagés, on préférera calculer les applications locales, $\boldsymbol{G}^\alpha$ et $\boldsymbol{H}^\alpha$, à chaque contact α. Nous verrons qu'elles sont particulièrement intéressantes dans la construction des matrices d'influence locales tenant compte du comportement d'ensemble de la structure (opération de condensation en quelques sortes, voir § 6.3.2.a). Dans ce cas précis, les spécificités des systèmes discrets seront exploitées au maximum.

❑

6.1.4 Synthèse de la démarche adoptée

Essayons de faire la synthèse des choix opérés dans l'approche des structures discrètes.

Schéma global de résolution Tout d'abord, la méthode se caractérise par deux niveaux distincts :

- ❋ un niveau global, qui est celui de l'équation de la dynamique semi-discrétisée. Les variables manipulées à ce niveau sont les vitesses généralisées $\dot{\boldsymbol{q}}$ et les efforts duaux $\boldsymbol{R}$.
- ❋ un niveau local, qui est celui des conditions unilatérales. Les variables manipulées sont alors les vitesses relatives au contact $\boldsymbol{v}$ et les efforts de liaisons duaux $\boldsymbol{r}$.

Les relations entre ces niveaux s'effectuent grâce aux applications $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{H}$. Ces niveaux, ainsi que les relations entre eux, sont illustrés sur la figure 6.2.

Prise en compte du caractère discret des systèmes étudiés L'ensemble des algorithmes sont écrits en tenant compte de cette séparation. Comme nous l'avons déjà précisé, le calcul des vitesses et des réactions s'appuie sur des passages entre ces deux niveaux, symbolisé par la

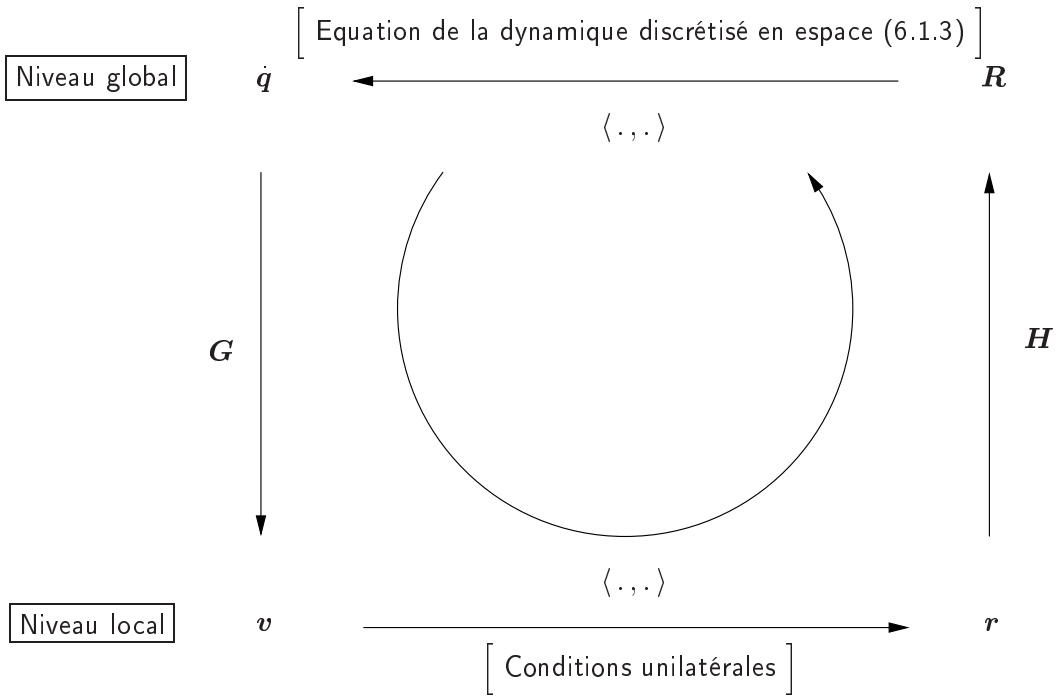


FIGURE 6.2 – *Schéma synoptique de l'approche NSCD,* M. JEAN©

boucle sur la figure 6.2 . Il est important de remarquer que, pour une équation de la dynamique discrétisée linéaire, une seule itération suffit.

Pour le niveau global, ainsi que pour les relations qui le relient au niveau local, on essaiera de tirer parti au maximum de la structure discrète des systèmes étudiés.

La vitesse comme « variable de choix » Pour terminer cette synthèse, disons un mot sur le choix des variables premières. La vitesse apparaît comme une variable de choix de ces algorithmes. Sa structure vectorielle rend, en effet, ses manipulations simples. Elle est de plus une grandeur pertinente dans la formulation et la résolution des conditions unilatérales (voir § 6.2.4). Les positions ou les déplacements seront considérés comme des variables secondaires estimés à partir des vitesses. Pour les efforts, les réactions au contact sont naturellement mises en évidence. Nous verrons pourtant au (§ 6.2.4) que l'impulsion de réaction doit être préférée pour des raisons liées à l'intégration temporelle de la dynamique en présence de conditions unilatérales. Nous proposons d'en faire le propos de la partie suivante.

6.2 Discrétisation temporelle et conditions unilatérales

6.2.1 Position du problème et contexte général non linéaire

La précision (ordre de la méthode) et la stabilité[3] par rapport à leur efficacité numérique sont les propriétés les plus discutées des schémas d'intégration numériques. Si ces propriétés sont facilement accessibles dans un cadre linéaire, elles posent de nombreux problèmes en présence de non linéarités. Plus spécifiquement, dans les systèmes différentiels que nous allons considérer, trois sources de non linéarités fondamentales peuvent être présentes :

1. *Non linéarités de type géométrique.* Ces non linéarités interviennent dans les problèmes en grandes transformations géométriques. Les corps subissent alors de grands déplacements et de grandes rotations sans forcément subir de grandes déformations. Le comportement des matériaux est alors, le plus souvent, élastique.
2. *Non linéarités de type matériel.* Dans ce cas, au contraire, les corps subissent de grandes déformations qui obligent la prise en compte de lois de comportement non-linéaires.
3. *Non linéarités associées aux liaisons.* Enfin, la dernière des non linéarités est associée aux liaisons appliquées aux corps. Les conditions unilatérales, comme nous les avons envisagées dans le § 5.2.1, sont sources de non régularités dans les solutions. Les liaisons bilatérales, quant à elles, bien que régulières rendent les problèmes raides et mal conditionnés.

Ces diverses non linéarités, bien que traitées à chaque incrément dans des algorithmes indépendants des schémas d'intégration temporelle (Newton-Raphson, Riks, Méthode asymptotique numérique, Algorithme de résolution du contact frottant, *etc.*...) modifient de façon cruciale les propriétés des schémas d'intégration. Les schémas que l'on peut trouver dans la littérature s'attaquent pour la plupart à des systèmes en grandes transformations géométriques. Les équations sont alors fortement non linéaires mais régulières, les mouvements résultants le sont aussi. La précision, la stabilité et l'amortissement pour ces problèmes sont désormais bien maîtrisés.

Au fur et à mesure du développement de ces schémas, leur application ne s'est pas restreinte aux problèmes en grandes transformations géométriques. Les autres types de non linéarités ont eux aussi été abordés, le plus souvent sans précaution supplémentaire. En particulier, ces schémas ont servis à résoudre des problèmes non linéaires, où les grandeurs cinématiques et sthéniques peuvent comporter des discontinuités spatiales et/ou temporelles — plasticité parfaite, adoucissement, contact unilatéral, *etc.*...

Traditionnellement, la construction des méthodes d'intégration temporelle se fait sur l'écriture de développement de Taylor des grandeurs à intégrer[4]. Ces développement exigent la régularité des ces grandeurs. Qu'en est-il de leur pertinence pour des évolutions non régulières ?

3. Nous ne rappelerons pas le cadre général de l'analyse numérique des équations différentielles. On renvoie, pour cela, aux ouvrages de référence suivants : (Dautray & Lions, 1988 ; Schatzmann, 1991 ; Crouzeix & Mignot, 1992).

4. Nous verrons que pour les méthodes de Galerkin en temps, les méthodes sont construites sur des approches variationnelles. L'écriture de la forme faible permet d'ailleurs de considérer des discontinuités des variables (voir remarque 6.4).

Sans entrer au coeur de cette discussion, la présentation, qui va suivre(§ 6.2.2), donnera les caractéristiques principales des schémas dédiés initialement aux grandes transformations géométriques. On s'attachera ensuite à discuter de leur pertinence pour les problèmes de contact-frottant(§ 6.2.3). Enfin, nous exposerons les choix qui ont été faits dans la méthode de la dynamique non régulière du contact (§ 6.2.4).

6.2.2 Intégration numérique des systèmes non linéaires raides, Principaux schémas, difficultés et enjeux

6.2.2.a Méthodes explicites ou méthodes implicites ?

Dans un cadre linéaire, l'ordre de la méthode par rapport à son coût de calcul numérique est le facteur déterminant dans son choix. En effet, la stabilité du schéma est soit obtenue de manière inconditionnelle, comme c'est le cas pour les schémas implicites, soit conditionelle qu'il est souvent facile de mettre en évidence *a priori*. Dans un cadre non-linéaire, le choix d'un schéma d'intégration temporelle est souvent plus ardu puisque des problèmes de stabilité importants se posent dans beaucoup de cas[5]. La stabilité du schéma est alors un facteur déterminant.

« Dynamique lente » et « dynamique rapide » L'emploi des schémas explicites offre une bonne précision et donc un ordre élevé pour un coût de calcul bien moindre, comparé aux schémas implicites. Malheureusement, leur stabilité, le plus souvent conditionnelle dans un cas linéaire, est très dure à obtenir pour de fortes non linéarités. Les conditions, qui sont obtenues en règle générale *a posteriori*, imposent des contraintes draconiennes sur le choix du pas de temps. Elles se retrouvent ainsi mieux adaptées dans les applications où une discrétisation temporelle fine est imposée par l'évolution du système. Ce type d'application est souvent qualifiée de « dynamique rapide ». On peut penser par exemple aux problèmes de crash ou d'emboutissage.

A contrario, les applications, dites de « dynamique lente », sont traitées de façon plus naturelle par les méthodes implicites. Le coût numérique de chaque incrément est alors plus grand mais les bonnes propriétés de stabilité, souvent inconditionnelles dans le cas linéaire, permettent l'emploi de pas de temps plus grands et donc l'utilisation d'un nombre plus faible d'incréments. Cependant, rappelons, toute de même que leur stabilité n'est pas assurée. Nous discuterons de ce point dans le paragraphe suivant(§ 6.2.2.b).

Applications aux édifices composés de blocs Nous ferons le choix des schémas implicites en considérant que nous entrons dans le cadre de la dynamique lente. En effet, dans le cas des sollicitations sismiques, les temps caractéristiques des évolutions dynamiques sont assez faibleset

5. Le lecteur intéressé pourra trouver de nombreux résultats de stabilité des schémas dans un cadre non linéaire dans Crouzeix & Mignot (1992). L'hypothèse minimum requise de ces résultats est, le plus souvent, que le second membre du problème de Cauchy soit uniformément Lipschiztien par rapport à la variable intégrée — Hypothèse qui n'a aucun sens sans continuité.

pourraient mettre ne défaut ce choix. Cependant, comme nous le verrons dans la suite, le respect des conditions unilatérales est beaucoup mieux assuré par des schémas implicites (voir § 6.2.3).

6.2.2.b Présentation des schémas implicites les plus usuels

Dans ce paragraphe, nous donnerons quelques éléments des principaux schémas d'intégration temporelle dédiés à la dynamique des systèmes mécaniques. Nous ne donnerons pas, de façon explicite, la formulation algorithmique de ces schémas en renvoyant, soit aux ouvrages de références (Hughes, 1987 ; Géradin & Rixen, 1993), soit aux différents articles de leurs concepteurs cités dans la suite.

Critère de stabilité energétique discret Comme on l'a déjà souligné, le facteur de choix des différents schémas est leur stabilité numérique. Dans un cadre non linéaire, il est difficile de donner des conditions explicites de stabilité des schémas. L'une des rares voies qui peut être suivie s'appuie sur des considérations énergétiques. Une condition suffisante de stabilité est la conservation ou le déclin de l'énergie totale du système pendant un pas de temps qui peut s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n + \mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_n \leq \mathcal{W}_{ext}. \tag{6.2.1}$$

Les grandeurs discrètes $\mathcal{U}_i$ et $\mathcal{K}_i$ représentent respectivement l'énergie potentielle et l'énergie cinétique du système à l'instant t_i.

La présentation qui va suivre s'inspire largement des travaux récents de synthèse réalisés par Kuhl & Crisfield (1999) sur les schémas implicites en dynamique non linéaire. Pour situer les nombreux travaux qui ont lieu cette dernière décennie, on se propose de donner à la figure 6.3 un schéma synthétique.

Discussion sur la stabilité des schémas Formellement, on peut distinguer trois groupes de méthodes qui permettent d'obtenir des schémas d'intégration stable dans un cadre non linéaire. Elles sont illustrées dans la moitié supérieure de la figure 6.3. nous allons essayer de les commenter rapidement :

1. *Les schémas à dissipation numérique d'énergie.* Ces schémas possèdent de manière intrinsèque une dissipation numérique, appelée parfois viscosité numérique. Parmi les schémas les plus connus, nous pouvons citer le schéma de Newmark (1959)[6], les schémas HHT (Hilber *et al.*, 1977). Les α-méthodes généralisées, introduites par Chung & Hulbert (1993) sont en fait une généralisation des précédents schémas qui ont l'avantage d'introduire une viscosité numérique paramétrée par le coefficient α, sans perdre l'ordre de la méthode.

   Si ces schémas fonctionnent sur de nombreux problèmes non linéaires en apportant certes une viscosité assez forte, il arrive tout de même qu'ils soient mis en défaut. En effet, comme

6. Il s'avère que le schéma deNewmark (1959) dissipe de l'énergie uniquement pour certaines valeur des paramètres d'intégration. Pour d'autres, il est conservatif mais instable (voir Géradin & Rixen (1993)).

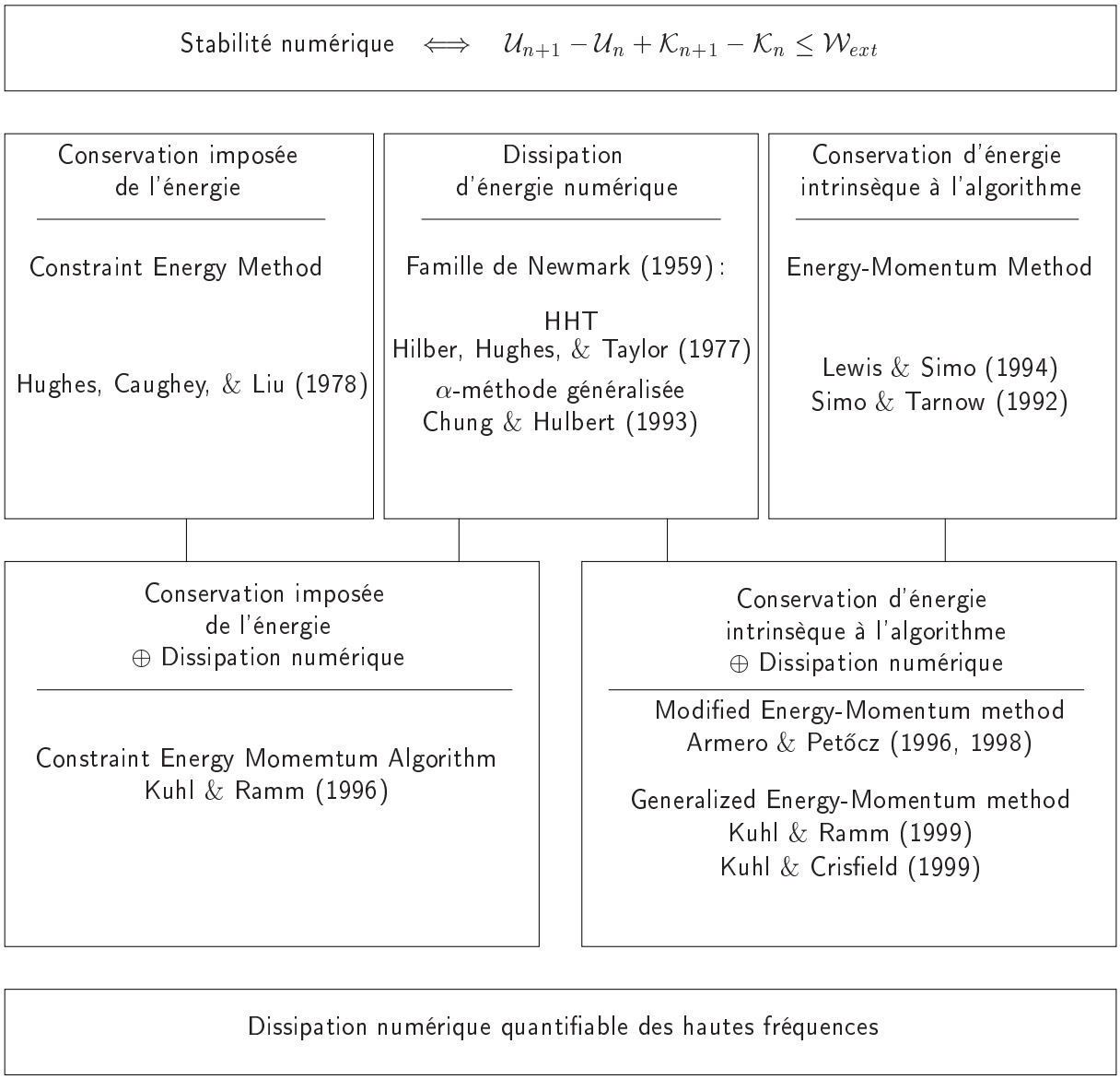


FIGURE 6.3 – *Revue des schémas d'intégration qui satisfont le critère énergétique de stabilité, inspirée de* KUHL & CRISFIELD *(1999)*

l'a montré CRISFIELD, la dissipation de l'énergie dans un cadre non-linéaire n'est pas linéaire avec le pas de temps. Pour certaines gammes de pas de temps, la viscosité s'estompe laissant place à des instabilités. Il résulte qu'il est parfois nécessaire d'introduire une dissipation numérique exagérée pour obtenir une réponse stable. De plus, il est pratiquement impossible de quantifier, *a priori*, la viscosité par rapport au pas de temps.

2. *Les schémas à conservation d'énergie contrainte.* Ces schémas introduits par HUGHES *et al.* (1978) respectent la conservation d'énergie (cas de l'égalité dans 6.2.1) en imposant une contrainte de conservation de l'énergie au moyen de multiplicateurs de LAGRANGE. Ces

algorithmes conservent parfaitement l'énergie mais, conduisent à des problèmes de non convergence des algorithmes de NEWTON-RAPHSON. Ce défaut de convergence coïncide généralement avec l'augmentation de l'énergie totale du système générée par l'algorithme non contraint. Du fait de cet inconvénient, ils sont de peu d'utilité directe.

3. *Les schémas à conservation d'énergie intrinsèque.* Enfin, le troisième groupe de méthodes, qualifié le plus souvent par son acronyme anglais « Energy-Momentum Method », possède l'avantage majeur de conserver l'énergie exactement dans un cadre non linéaire. Ces schémas, initiés par SIMO, TARNOW & LEWIS(SIMO & TARNOW, 1992 ; LEWIS & SIMO, 1994), s'appuient sur une approximition du point milieu et sur de simples modifications des termes non linéaires des équations discrétisées, de façon à pouvoir respecter l'égalité (6.2.1). Par exemple, dans le cadre des non linéarités géométriques, le tenseur de PIOLA-KIRSCHHOFF II , $\boldsymbol{S}$ est remplacé par sa version « algorithmique » estimée comme la moyenne de ce tenseur en début et fin de pas de temps. Pour les rotations finies, une modification du même type est réalisée en choisissant d'estimer la vitesse angulaire de rotations finies au milieu de l'incrément comme la moyenne des valeur en début en fin de pas. BAUCHAU *et al.* (1995) ont utilisé un principe identique pour les systèmes multi-corps en présence de contraintes bilatérales parfaites. La conservation de l'énergie est assurée par l'écriture d'une discrétisation adéquate de ces contraintes, qui assurent que la puissance des efforts de liaisons est nulle sur un pas de temps.
   Ces schémas comportent tout de même quelques inconvénients comme l'introduction d'opérateurs dissymétriques et leur ordre peu élevé. Nous verrons dans la suite comment ces problèmes ont été contournés.

Pour terminer cette présentation des schémas stables dans un cadre non linéaire, il convient de citer les travaux de BAUCHAU & THERON (1996a,b) sur les schémas de GALERKIN discontinus en temps. Ils font l'objet de la remarque suivante.

REMARQUE 6.4
Le principe des schémas de GALERKIN discontinus en temps, est dû aux travaux de HUGHES & HULBERT (1988). Il est relativement simple ; il s'agit, pour les systèmes élastiques en grandes transformations géométriques, de réécrire le système différentiel hyperbolique du second ordre en un système hyperbolique du premier ordre en termes de déplacement, vitesses et contraintes. Il est à noter que, suivant la cinématique adoptée, cette transformation n'est toujours possible(BAUCHAU, 2000). A partir de cette forme au premier ordre, on écrit une formulation faible qui se prête naturellement à une approximation de type GALERKIN. L'emploi de fonctions de forme discontinues permet d'assurer et de quantifier le déclin de l'énergie totale du système sur un pas de temps.

BAUCHAU & THERON (1996a,b) utilise ce principe de manière indirecte, en écrivant des schémas de GALERKIN discontinus en temps sur des systèmes unidimensionnels simples. Ils obtiennent ainsi, après simplification, des schémas semblables à des schémas aux différences finies, mais où la conservation (et/ou le déclin) de l'énergie totale est assurée. Ces schémas sont alors

appliqués à des systèmes qui ne sont pas forcément écrits sous la forme d'un système du premier ordre. Ces schémas semblent particulièrement intéressants au sens où ils sont capables de prendre en compte des discontinuités des grandeurs cinématiques et sthéniques à chaque instant de la discrétisation. Leur utilisation dans les problèmes, où les contraintes unilatérales sont présentes, pourrait donc être fructueuse[7].

❑

6.2.2.c Dissipation numérique quantifiable

Les schémas présentés dans le paragraphe précédent assurent la stabilité de l'intégration numérique au moyen de deux propriétés distinctes et, *a priori*, antagonistes : soit, la conservation stricte de l'énergie totale du système, soit, l'introduction de viscosité numérique engendrant une dissipation de l'énergie.

En ce qui concerne la viscosité numérique, on a vu qu'elle était difficile à quantifier et par conséquent, qu'elle n'apportait pas toujours l'effet stabilisateur désiré. On s'est alors tourné vers les schémas qui conservent exactement l'énergie. Malheureusement, l'intégration exacte, d'un point de vue énergétique, du spectre complet des fréquences de la structure discrétisée, n'est pas forcément un avantage. En particulier, l'intégration des fréquences artificielles introduites par la discrétisation spatiale pollue les résultats qui deviennent difficiles à interpréter[8].

En effet, pour une structure discrétisée en éléments finis, de nombreux modes de vibrations de la structure, le plus souvent pour des fréquences élevées, sont purement artificiels. L'emploi d'un pas de temps assez grand peut permettre de les filtrer en échantillonnant la réponse de manière grossière. Si, par contre, l'évolution rapide du système ou les fortes non linéarités présentes imposent un pas de temps faible, la réponse se retrouve bruitée par ces artefacts numériques. L'interprétation des résultats peut alors devenir difficile. Il semble alors que la présence de viscosité numérique soit nécessaire, non plus pour assurer la stabilité du système, mais pour filtrer les hautes fréquences indésirables.

Kuhl & Ramm (1996) ont, de plus, observé que les schémas à conservation d'énergie intrinsèque peuvent être divergents pour des pas de temps modérés du fait de l'approximation faite par l'introduction de règles de moyenne — méthode du point milieu. Cette remarque oblige alors à utiliser des pas de temps faibles pour obtenir à nouveau la convergence. Les résultats sont alors fortement bruités par les artefacts numériques.

Ces dernières années, de nombreux travaux ont été effectués pour répondre à ces exigences de stabilité et de filtrage des hautes fréquences parasites. La stabilité des algorithmes est assurée uniquement, par l'utilisation des schémas qui conservent strictement l'énergie. Le filtrage des hautes fréquences est assuré quant à lui par l'introduction dans ces schémas de viscosité clairement quantifiable. Ces schémas sont reportés dans la moitié inférieure de la figure 6.3.

7. L'auteur tient à remercier Michel Géradin de l'avoir mis au fait de ces schèmas

8. Nous verrons dans la suite que d'autres fréquences artificielles peuvent être introduites dans le système discret par les liaisons.

Nous n'entrerons pas dans les détails des développements de ces schémas. Nous dirons seulement que la viscosité numérique est apportée dans les schémas à conservation d'énergie par des méthodes identiques à celles de Chung & Hulbert (1993). Seuls Armero & Petőcz (1999) introduisent une dissipation supplémentaire originale directement dans l'évaluation du tenseur des contraintes.

6.2.3 Intégration numérique en présence de conditions unilatérales

La présence de contraintes unilatérales dans les systèmes dynamiques possède la particularité d'introduire des discontinuités dans les évolutions des variables cinématiques et sthéniques (voir § 5.2.1.b). Si l'on fait exception des méthodes où les liaisons sont régularisées[9], ces discontinuités potentielles obligent à envisager différemment l'intégration temporelle des équations de la dynamique.

Suivant les remarques de Moreau (1999), on peut distinguer deux grands types de méthodes d'intégration temporelle en présence de conditions unilatérales : les méthodes, dites « Event-driven » et les méthodes dites de « Time-stepping ». Nous nous proposons d'en présenter les grandes lignes (§ 6.2.3.a et § 6.2.3.b), afin de justifier les choix qui seront faits dans la suite (§ 6.2.4).

6.2.3.a Les méthodes « Event-driven »

Principe L'hypothèse fondamentale, qui sous-tend ce classe de méthodes suppose que l'intervalle d'étude du mouvement peut se discrétiser en une union finie d'intervalles de longueur finie sur lesquels les statuts des contacts ne changent pas. En clair, pour l'exemple du contact unilatéral avec frottement, aucun contact ne se crée ni ne se perd et aucun changement n'est opéré dans les expressions analytiques du frottement. La discrétisation temporelle est donc subordonnée aux événements qui se produisent au contact.

Sur ces intervalles, le mouvement est donc intégré en considérant que les liaisons unilatérales sont, soit actives, auquel cas on considère une liaison bilatérale avec frottement, soit passives et la liaison n'a plus lieu d'être. Les schémas d'intégration classiques pour les systèmes en présence de liaisons bilatérales avec frottement défini peuvent être utilisés. On renvoie sur ce type de méthodes de traitement aux travaux de Haug *et al.* (1986a,b,c) et Haug (1989).

Pratiquement, la définition de ces intervalles se fait *a posteriori*. En choisissant une discrétisation classique, on vérifie en fin de pas de temps que les hypothèses faites sur les statuts de contact ne sont pas en contradiction avec les résultats obtenus — par exemple, l'existence d'une réaction normale négative sur une liaison unilatérale simulée par une liaison bilatérale temporaire. Si ce n'est pas le cas, on redémarre la simulation en changeant les statuts des contacts contredits.

Avantages et inconvénients En reprenant un exemple du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle dû à Delassus (1917), Moreau a souligné très tôt que ce type de vérification *a posteriori* peut conduire

9. On renvoie pour ce type de méthodes aux commentaires et aux objections qui ont été formulées au § 3.2.

à de graves paradoxes. En effet, les contacts qui sont contredits au bout d'un pas de temps donné ne sont pas forcément ceux qui aurait dû l'être en premier. Pour surmonter cette difficulté, Haug (1989) choisit de tester toutes les combinatoires possibles sur les statuts. On comprend aisément que le coût numérique de telles méthodes devient vite prohibitif avec le nombre de points de contact. Il convient alors de considérer les liaisons unilatérales à part entière et non pas comme une version particulière de liaisons bilatérales temporaires.

Moreau (1963, 1966), en donnant un cadre théorique au problème en présence de conditions unilatérales, a montré que le problème de liaisons unilatérales parfaites pouvait s'écrire sous la forme d'un problème de programmation quadratique ou si l'on préfère d'un problème de complémentarité linéaire. La détermination des changements de statut peut alors être ramenée à un problème d'optimisation sous contraintes pour lequel il existe un bon nombre d'algorithmes efficaces. Si l'on considère le problème de frottement plan, la formulation peut être facilement généralisée (Lötstedt, 1982, 1984). Pour le frottement en trois dimensions, on renvoie à Abadie (1998) pour une revue des différents méthodes d'approximation.

Le second inconvénient qu'il paraît intéressant de signaler remet en question l'hypothèse fondamentale qui a été faite pour ces méthodes. En effet, il arrive fréquemment que pour un contact, les intervalles, où le statut ne change pas, deviennent de longueur infiniment faible soit d'un point de vue théorique, soit d'un point de vue numérique. Pour illustrer le point de vue théorique, considérons l'exemple d'une bille rebondissant sur un plan. Si l'on considère qu'une dissipation énergétique a lieu à chaque contact, on tend vers un phénomène d'accumulation des instants de contact. La longueur des intervalles tend alors vers zéro. D'un point de vue numérique, si le nombre de contacts est très grand, les changement de statut risquent d'être très nombreux et rapprochés, conduisant à choisir une discrétisation d'une finesse numériquement déraisonnable.

En employant des approximations judicieuses pour passer outre ce problème d'accumulation de contact, ces méthodes sont particulièrement efficaces pour un nombre faible de contacts (inférieur a 100), du fait des algorithmes d'intégration d'ordre élevé employés (couramment d'ordre 4 ou 5). Il est à noter que des méthodes aussi bien implicites qu'explicites sont utilisées. Les méthodes explicites deviennent à nouveau intéressantes puisque les pas de temps sont généralement limités par les événements au contact. Pour les applications que nous allons traiter où le nombre de points de contact est grand (parfois supérieur à 10000), notre choix va être orienté vers un autre type de méthodes dites de « Time-stepping ».

6.2.3.b Les méthodes « Time-stepping »

Principe Les méthodes, dites de « Time-stepping », ne font pas, *a priori*, d'hypothèses relatives à la discrétisation temporelle par rapport aux événements qui se produisent. On suppose alors que ces méthodes sont capables d'intégrer correctement les équations du mouvement en traitant les événements au cours du pas de temps donné par une discrétisation standard de

l'intervalle d'étude.

Remarque 6.5

L'hypothèse, qui suppose que les méthodes de « Time-stepping » soient capables d'intégrer correctement les équations du mouvement non régulier, est rarement explicitement énoncée. De même, il est rarement fait appel à des notions de mécanique non régulière telles que les sauts de vitesse ou les impulsions. On oublie le plus souvent de rappeler que les contraintes unilatérales sont susceptibles de générer des discontinuités et des instabilités.

Malgré ces objections de fond, cette façon d'opérer est la plus couramment répandue dans les problèmes de contact pour les corps déformables. La vérification des hypothèses d'intégration correcte des équations du mouvement se fait *a posteriori*. « ca marche ou ca ne marche pas ».

❑

Application des schémas standards Les schémas usuels présentés dans le § 6.2.2, qui s'appuient sur des développements de Taylor des grandeurs cinématiques, ont été appliqués en supposant de manière insidieuse que toutes les grandeurs sont continues et différentiables. Les non linéarités liées au contact ont donc été traitées de la même manière que les non linéarités régulières mises en jeu en grandes transformations géométriques. Cette hypothèse illicite est peut être due au fait que la déformabilité des corps apporte un caractère plus « doux » aux problèmes de contact. Il n'en reste pas moins que des discontinuités sont toujours susceptibles d'être présentes.

Les méthodes explicites (Euler explicite, différences centrées, Runge-Kutta d'ordre 4, *etc...*) aussi bien qu'implicites (Newmark, HHT, α-methode géneralisée) ont été appliquées plus ou moins aveuglément au problème dynamique avec contact frottant (Hallquist *et al.*, 1985 ; Bathe & Chaudhary, 1985 ; Hughes *et al.*, 1976 ; Belytschko & Neal, 1991 ; Carpenter *et al.*, 1992).

Ces auteurs arrivent tout de même à obtenir des résultats acceptables pour plusieurs raisons. D'une part, les algorithmes de résolution s'appuient sur des méthodes de pénalité ou de lagrangiens augmentés. Les lois de contact sont régularisées et évitent ainsi de nombreux problèmes de discontinuités. De plus, un amortissement numérique fort est la plupart du temps utilisé pour éviter les oscillations artificielles dues aux discontinuités et aux régularisations.

Application des schémas à conservation d'énergie Avec le développement des schémas à conservation d'énergie intrinsèque (Simo & Tarnow, 1992), de nouveaux algorithmes ont été développés pour surmonter les difficultés des algorihtmes standards. Armero & Petőcz (1996, 1998) ainsi que Laursen & Chawla (1997) proposent d'adapter les méthodes « Energy-Momemtum » au problème de contact sans frottement, en modifiant la discrétisation des lois de contact pour obtenir la conservation de l'énergie mécanique du système.

La modification de la discrétisation temporelle des lois de contact s'appuie sur une estimation de l'interstice par une méthode de point milieu. La réaction de contact est estimée au milieu de l'intervalle. Par cette procédure, ces auteurs notent que la conservation de l'énergie est respectée

et, en outre, la condition de SIGNORINI est respectée en fin de pas de temps. De plus, l'ordre de l'algorithme n'est pas modifié.

La conservation de l'énergie totale du système ne résout cependant pas les problèmes de non régularité lors de la création du contact. Bien au contraire, elle met en évidence des artefacts numériques comme des oscillations de la vitesse normale au contact, passant à chaque incrément d'un valeur positive à une valeur négative [10]. Pour remédier à ce problème, ces auteurs proposent de substituer, une fois le contact créé, la condition de SIGNORINI usuelle par une condition de SIGNORINI en vitesse (Condition (5.2.37)). La condition de SIGNORINI en vitesse est nommée condition de contact persistant (« persistency condition »).

Comme nous l'avons souligné à la remarque 5.7, il est clair que cette modification introduit une dissipation au contact. L'éradication des oscillations artificielles peut d'ailleurs être interprétée comme une dissipation visqueuse, générée par la condition de SIGNORINI. Pour conserver l'énergie totale du système, l'énergie dissipée pendant le contact persistant est stockée (informatiquement) et rendue à la perte du contact(*sic*).

De la même manière, ces auteurs ont proposé des schémas d'intégration pour le problème de contact frottant où l'énergie dissipée au cours d'un pas de temps correspond au travail dissipé par frottement (CHAWLA & LAURSEN (1998)). ARMERO & PETŐCZ (1999) proposent de plus d'introduire une dissipation numérique pour filtrer les phénomènes vibratoires dus à la discrétisation spatiale en décalant au moyen d'un $\theta-$méthode l'estimation de l'interstice.

REMARQUE 6.6

La méthode NSCD, utilisée dans ce travail présente la particularité de s'appuyer sur des considérations de mécanique non régulière. Ces considérations sont absentes des les méthodes présentées dans ce paragraphe.

Pourtant, on pourra constater que les schémas auxquels aboutissent ces développements ont des similitudes frappantes avec ceux de la méthode NSCD. En particulier, l'ordre, le choix des approximations et la discrétisation temporelle des liaisons sont analogues. Le cadre des leurs développements et la justification des choix diffèrent pourtant radicalement.

❑

6.2.4 Intégration temporelle, les choix de la méthode NSCD

6.2.4.a Esprit de la méthode

Dès lors que les liaisons unilatérales sont susceptibles de générer des discontinuités sur les vitesses, une formulation correcte du problème de la dynamique des systèmes discrets peut se mettre sous la forme d'une inclusion différentielle de mesure (voir § 5.2.1) :

$$-\boldsymbol{M}d\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q}, t)dt \in N(\boldsymbol{q}). \tag{6.2.2}$$

10. On suppose que la vitesse relative normale est non nulle à la création du contact.

La vitesse $\boldsymbol{u}$ est considérée intégrable au sens de LEBESGUE et reliée à $\boldsymbol{q}$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t} \boldsymbol{u}(\tau)\, d\tau \tag{6.2.3}$$

La mesure différentielle peut être estimée comme toute distribution par son action sur un intervalle de temps :

$$\int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t_2^+) - \boldsymbol{u}(t_1^-) \tag{6.2.4}$$

Suite à ces rappels, on peut dores et déjà donner les principes fondamentaux qui seront suivis dans l'intégration temporelle de type « Time-stepping », des problèmes de dynamique en présence de conditions unilatérales. Ils reprennent les conclusions des § 5.2.1.c et § 6.1.4 :

- *Choix d'une intégration implicite* MOREAU (1985) a montré que seules les méthodes implicites était capable de fournir des algorithmes pour intégrer la dynamique des systèmes régie par une inclusion différentielle du type (5.2.10). La méthode d'intégration choisie, θ-méthode, ($\theta \geq \frac{1}{2}$) respectera cette remarque.
- *Respect des discontinuités en vitesses* Le respect des discontinuités en vitesse impose une formulation au sens des mesures. D'un point de vue pratique, aucun schéma aux différences finies ne sera écrit pour intégrer les vitesses, seule la relation d'intégration de la mesure (6.2.4) nous servira à construire les algorithmes.
- *Choix de variables premières* La vitesse et l'impulsion seront les variables de choix de la méthode. Ils semblent, en effet, qu'elles soient les variables pertinentes pour aborder le problème de discontinuités temporelles par une méthode de « Time-stepping ».

Ces principes sont inspirés des remarques issues des travaux de MOREAU (1985, 1988, 1998, 1999). Ils forment l'esprit de la méthode NSCD. L'application de la méthode aux systèmes continus déformables est, en grande partie, due à JEAN (1988, 1995, 1999).

L'auteur, dans ce qui suit, propose une réinterprétation de cette méthode en tentant de marquer les différences fondamentales avec les méthodes usuelles. La présentation ne prétend pas à la rigueur mathématique des travaux originels mais tente seulement de donner quelques indices justifiant la démarche adoptée.

6.2.4.b Intégration de la dynamique

L'intégration des équations de la dynamique discrétisée s'effectue en deux étapes. Tout d'abord, le système différentiel classique (6.1.3) est réécrit en termes de mesure différentielle puis sous une forme faible. Ensuite, on propose d'intégrer au moyen d'une θ-méthode les termes continus (déplacement, forces intérieures, forces extérieures appliquées).

Écriture en termes de mesures différentielles Comme nous l'avons souligné auparavant, l'équation de la dynamique discrétisée en espace (6.1.3) est réécrite au sens des mesures :

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}, t)dt = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}, t)dt \tag{6.2.5}$$

Les actions extérieures $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)$ sont écrites de la manière suivante :

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)dt = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)dt + d\boldsymbol{R} \tag{6.2.6}$$

où $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)$ est un terme continu et borné correspondant aux efforts appliqués et $d\boldsymbol{R}$ est l'impulsion associée aux efforts de contact. On suppose qu'elle peut être réécrite en termes de percussion sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{R}_\nu d\nu \tag{6.2.7}$$

où $d\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_\nu$ est la percussion due au contact et $d\nu$ une mesure non négative.

L'équation du mouvement peut alors être écrite sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{u} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)dt - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)dt = \boldsymbol{R}_\nu d\nu \tag{6.2.8}$$

Dans le cas de contraintes unilatérales parfaites, le terme $\boldsymbol{R}_\nu$ est contraint par l'inclusion suivante :

$$-\boldsymbol{R}_\nu \in N(\boldsymbol{q}). \tag{6.2.9}$$

Si l'on suppose des chocs mous, ou un mouvement régulier, cette inclusion peut être remplacée par l'inclusion plus forte (voir § 5.2.1) :

$$-\boldsymbol{R}_\nu \in \partial\Psi_{V(\boldsymbol{q})}(\boldsymbol{u}), \tag{6.2.10}$$

qui permet une expression autonome des contraintes en termes de vitesses.

Comme il est usuel de le faire pour estimer une équation en termes de distribution, où si l'on préfère de mesures différentielles, nous écrivons l'équation (6.2.8) sous sa forme faible sur un intervalle $]t_i, t_{i+1}]$:

$$\int_{]t_i,t_{i+1}]} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q},t)d\boldsymbol{u} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)\,dt = \int_{]t_i,t_{i+1}]} \boldsymbol{R}_\nu\, d\nu, \tag{6.2.11}$$

à laquelle on peut associer l'équation qui relie les déplacements aux vitesses :

$$\boldsymbol{q}(t_{i+1}) = \boldsymbol{q}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau \tag{6.2.12}$$

Avant de réaliser l'intégration des termes continus, on effectue une première linéarisation en supposant que l'opérateur d'inertie varie lentement avec $\boldsymbol{q}$. On choisit pour cela de l'estimer pour un déplacement $\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{q}(t^*), t^* \in [t_i, t_{i+1}]$. On obtient ainsi l'approximation suivante pour le terme d'inertie :

$$\int_{]t_i,t_{i+1}]} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*) \int_{]t_i,t_{i+1}]} d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*)(\boldsymbol{u}(t_{i+1}^+) - \boldsymbol{u}(t_i^+)) \tag{6.2.13}$$

Dans la suite, la notation $\boldsymbol{u}_i$ sera à comprendre comme la limite à droite de la vitesse $\boldsymbol{u}$ prise en t_i, soit :

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}(t_i^+) \tag{6.2.14}$$

Dans la suite, pour alléger les écritures, nous utiliserons la convention usuelle, $(\square)_i = \square(t_i)$ étendue par convention aux fonctions de plusieurs variables, par exemple $(\square)_i = \square(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{q}_i, t_i)$.

Intégration par une θ-méthode des termes continus On réalise maintenant une intégration des termes supposés continus par une θ-méthode. En notant le pas de temps par $h = t_{i+1} - t_i$, on obtient :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t) = h\left[(1-\theta)\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{q}_i,t_i) + \theta\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u}_{i+1},\boldsymbol{q}_{i+1},t_{i+1})\right] \tag{6.2.15}$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t) = h\left[(1-\theta)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{q}_i,t_i) + \theta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_{i+1},\boldsymbol{q}_{i+1},t_{i+1})\right] \tag{6.2.16}$$

$$\boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{u}(t)\,dt = h\left[(1-\theta)\boldsymbol{u}_i + \theta\boldsymbol{u}_{i+1}\right] \tag{6.2.17}$$

Concernant le terme associé aux variables au contact, le choix est fait de conserver l'impulsion moyenne sur le pas de temps comme variable principale, soit :

$$\boldsymbol{R}(t_{i+1}) = \frac{1}{h}\int_{]t_i,t_{i+1}]} \boldsymbol{R}_\nu d\nu \tag{6.2.18}$$

Le schéma d'intégration numérique peut donc être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*)(\boldsymbol{u}_{i+1}-\boldsymbol{u}_i) = &-h\left[(1-\theta)\boldsymbol{Q}_i + \theta\boldsymbol{Q}_{i+1}\right] \\ &+ h\left[(1-\theta)\boldsymbol{F}_i + \theta\boldsymbol{F}_{i+1}\right] + h\boldsymbol{R}_{i+1}\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

$$\boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i = h\left[(1-\theta)\boldsymbol{u}_i + \theta\boldsymbol{u}_{i+1}\right] \tag{6.2.20}$$

Propriétés du schéma d'intégration Pour $\theta = 1/2$, le schéma est d'ordre 2. Sinon, l'ordre chute à 1. Pour $\theta = 1$, on retrouve le schéma d'Euler implicite qui nous le verrons, permet sous certaines conditions, de simuler des évolutions quasi-statiques.

Ce schéma est conditionnellement stable dans un cadre linéaire pour $\theta \geq 1/2$. Dans le cadre non linéaire, il possède de remarquables propriétés de conservation d'énergie pour $\theta = 1/2$. On retrouve, en effet, le schéma de Armero & Petőcz (1996), si l'on choisit d'estimer le tenseur des forces intérieures comme une moyenne entre les valeurs en début et en fin de pas de temps. Ce ne sera pas fait dans les application traitées. Dans le cadre des petites perturbations, le schéma est d'ordre 2 et conservatif pour $\theta = 1/2$.

6.2.4.c Formes discrètes des relations de passage entre variables globales et locales

Comme nous l'avons dans le paragraphe 6.1, les relations entre variables globales et locales peuvent s'exprimer ainsi :

$$\boldsymbol{v}^\alpha = \boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}, \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{H}^\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}^\alpha \tag{6.2.21}$$

où $\boldsymbol{d}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha$ représentent respectivement le déplacement et la vitesse au contact α, et $\boldsymbol{r}^\alpha$ la réaction locale au contact.

Comme nous l'avons déjà précisé auparavant, on suppose que les opérateurs de passage varient lentement avec $\boldsymbol{q}$. A l'image de l'opérateur d'inertie, nous choisissons de les estimer pour un

déplacement $\boldsymbol{q}^\circ = \boldsymbol{q}(t^\circ), t^\circ \in [t_i, t_{i+1}]$. Cette hypothèse étant faite, on choisit de manière naturelle les formes discrètes de ces relations comme suit (en omettant l'exposant α) [11] :

$$\boldsymbol{v}^{i+1} = \boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q}^\circ)\dot{\boldsymbol{q}}_{i+1}, \qquad \boldsymbol{R}_{i+1} = \boldsymbol{H}^\alpha(\boldsymbol{q}^\circ)\boldsymbol{r}^{i+1} \tag{6.2.22}$$

Il est à noter que des approximations plus précises peuvent être faites pour ces opérateurs. En règle général, $\boldsymbol{G}^\alpha$ et $\boldsymbol{H}^\alpha$ sont non linéaires par rapport à $\boldsymbol{q}$. Si les variations sont fortes, il faut en tenir compte dans l'algorithme de traitement des non linéarités (voir (Alart & Curnier, 1991)).

6.2.4.d Formes discrètes des lois de contact frottant

Il reste maintenant à réaliser la discrétisation des lois d'interfaces, pour permettre l'évaluation de l'impulsion moyenne sur le pas de temps. Nous nous attacherons à le faire explicitement pour la condition de Signorini et le frottement de Coulomb.

Condition de Signorini La discrétisation temporelle de la condition de Signorini est un problème ardu. En effet, cette condition est écrite en déplacement, ou de manière plus précise sur la fonction interstice de la manière suivante :

$$g \geq 0, \qquad r_{\mathrm{N}} \geq 0, \qquad g\, r_{\mathrm{N}} = 0. \tag{6.2.23}$$

Une manière naïve d'écrire cette relation en termes discrets est de considérer qu'elle doit être remplie pour g^{i+1}, soit :

$$g^{i+1} \geq 0, \qquad r_{\mathrm{N}}^{i+1} \geq 0, \qquad g^{i+1}\, r_{\mathrm{N}}^{i+1} = 0. \tag{6.2.24}$$

Nous avons vu au § 5.2.3 que la dérivée temporelle de l'interstice était la vitesse relative normale. L'emploi d'une θ-méthode conduit donc à la relation suivante :

$$g^{i+1} = g^i + h(1-\theta)v_{\mathrm{N}}^i + h\theta v_{\mathrm{N}}^{i+1} \tag{6.2.25}$$

La reformulation de la condition de Signorini en termes de vitesse normale discrète conduit donc à :

$$v_{\mathrm{N}}^{i+1} - \tilde{g}^i \geq 0 \quad r_{\mathrm{N}}^{i+1} \geq 0 \quad r_{\mathrm{N}}^{i+1}(v_{\mathrm{N}}^{i+1} - \tilde{g}^i) = 0 \tag{6.2.26}$$

où la valeur $\tilde{g}_i$, homogène à une vitesse, est donnée par :

$$\tilde{g}^i = -\frac{1}{h\theta}g^i + (1 - \frac{1}{\theta})v_{\mathrm{N}}^i. \tag{6.2.27}$$

Une discrétisation cohérente de la condition de Signorini devrait répondre à la condition suivante :

$$\text{Si } g^i = 0 \text{ et } g^{i+1} = 0, \text{ alors } v_{\mathrm{N}}^{i+1} = 0. \tag{6.2.28}$$

11. Pour les grandeurs locales au contact, les indices relatifs à la discrétisation temporelle seront placés en exposant pour faciliter l'écriture.

Cette condition signifie simplement qu'en cas de contact persistant au cours du pas de temps, la vitesse relative normale doit être nulle au cours de ce pas, et par conséquent en fin de pas de temps.

Si nous examinons la relation de SIGNORINI discrète (6.2.26) et la relation d'intégration temporelle de l'interstice, on se rend compte que $g^i = 0$ et $g^{i+1} = 0$ implique que v_{N} soit égale à $(1-\frac{1}{\theta})v_{\mathrm{N}}^i$. En clair, si la vitesse normale n'est pas nulle à l'instant de la création du contact, elle ne peut s'annuler pour $\theta \neq 1$, au cours d'un contact persistant. Cette remarque a des conséquences assez ennuyeuses d'un point de vue numérique. Elle en effet source d'oscillations artificielles des vitesses relatives au contact.

Comme on a pu le remarquer, pour $\theta = 1$ (EULER implicite), on constate que la relation de cohérence est satisfaite. Cette propriété est très intéressante pour l'étude des systèmes en évolution quasi-statique. Pour surmonter la difficulté, JEAN (1999) propose de modifier l'écriture discrète de la condition de SIGNORINI en s'appuyant sur les estimations suivantes pour l'interstice :

$$\bar{g}^i = g^i + h(1-\theta)v_{\mathrm{N}}^i \tag{6.2.29}$$

$$\bar{g}^{i+1} = g^{i+1} + h(1-\theta)v_{\mathrm{N}}^{i+1}. \tag{6.2.30}$$

Cette modification revient à opérér une estimation de l'interstice aux temps $t_i + (1-\theta)h$. On constate, de plus, que ces estimations sont reliées par une relation de type EULER implicite, soit :

$$\bar{g}^{i+1} = \bar{g}^i + hv_{\mathrm{N}}^{i+1}. \tag{6.2.31}$$

L'écriture de la condition de SIGNORINI sur ces estimations conduit alors à respecter la condition de cohérence de la discrétisation. La forme discrète de la condition s'écrit alors :

$$\bar{g}^{i+1} \geq 0, \qquad r_{\mathrm{N}}^{i+1} \geq 0, \qquad \bar{g}^{i+1}\, r_{\mathrm{N}}^{i+1} = 0, \tag{6.2.32}$$

que l'on pourra résumer par :

$$(\bar{g}^{i+1}, r_{\mathrm{N}}^{i+1}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Signorini} \tag{6.2.33}$$

Si le contact est persistant, il devient alors possible de remplacer la condition de SIGNORINI classique par un condition écrite en terme de vitesses :

$$v_{\mathrm{N}}^{i+1} \geq 0, \qquad r_{\mathrm{N}}^{i+1} \geq 0, \qquad v_{\mathrm{N}}^{i+1}\, r_{\mathrm{N}}^{i+1} = 0. \tag{6.2.34}$$

Commentaires Cette technique de discrétisation temporelle fait chuter l'ordre de la méthode à 1 par rapport au schéma centré. Cette remarque est analogue aux commentaires qui ont été faits dans le § 6.2.3.b. Le schéma centré assure une conservation exacte de l'énergie tandis qu'une estimation décentrée produit une viscosité numérique et fait chuter de la méthode.

La condition de cohérence introduite par JEAN (1999) est en fait équivalente à la condition de contact persistant introduit par ARMERO & PETŐCZ (1996) et LAURSEN & CHAWLA (1997). Elle conduit d'ailleurs au même type de discrétisation.

Armero & Petőcz (1998) et Laursen & Chawla (1997) discutent de ces problèmes dans le cadre des schémas à conservation d'énergie. Ils remarquent aussi qu'une estimation centrée de l'interstice produit une conservation exacte de l'énergie mais entraîne des phénomènes oscillatoires sur les vitesses normales. De la même manière, ils ont recours à une estimation décentrée de l'interstice ainsi qu'une condition sur la vitesse normale en cas de contact persistent.

Remarque 6.7
Le choix d'une formulation de la condition de Signorini en vitesses exclusivement peut être envisagé. Comme nous l'avons vu au § 5.2.1, il faut que la vitesse appartienne toujours au cône tangent au contact si l'on souhaite que la contrainte initiale en déplacement soit satisfaite tout au long de l'évolution. Ceci n'est possible que pour les mouvements réguliers ou les mouvements non réguliers avec une hypothèse de choc mou.

Pour les mouvements non réguliers ordinaires, une formulation exclusive en vitesse conduit à une pénétration à l'instant de création du contact qui n'est plus restaurée. Pour éviter les pénétrations trop grandes, il faut donc choisir des pas de temps faibles.

De plus, comme nous l'avons déjà souligné à maintes reprises, une formulation en vitesses implique qu'un travail soit dissipé lors du contact. L'estimation décalée produit aussi une dissipation. Le choix exclusif d'une condition de Signorini en vitesse paraît plus clair de ce point de vue. Elle affiche qu'une dissipation a lieu et évite les modifications, dont la justification mécanique est souvent obscure.

❑

Frottement de Coulomb La formulation de frottement se fait de façon naturelle en termes de vitesses. Nous choisirons donc une forme discrète complètement implicite qui peut s'écrire :

$$(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}^{i+1}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{i+1}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Coulomb}(\mu r_{\mathrm{N}}^{i+1}) \tag{6.2.35}$$

6.2.4.e Bilan des équations discrétisées

La synthèse des équations du modèle totalement discrétisé peut se faire ainsi :

❋ Equations du mouvement.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*)(\boldsymbol{u}_{i+1} - \boldsymbol{u}_i) &= -h\left[(1-\theta)(\boldsymbol{Q}_i + \boldsymbol{F}_i) + \theta(\boldsymbol{Q}_{i+1} + \boldsymbol{F}_{i+1})\right] + h\boldsymbol{R}_{i+1} \\ \boldsymbol{q}_{i+1} - \boldsymbol{q}_i &= h\left[(1-\theta)\boldsymbol{u}_i + \theta\boldsymbol{u}_{i+1}\right] \end{aligned}$$

❋ Relations de passage.

$$\boldsymbol{v}^{i+1} = \boldsymbol{G}^{\alpha}(\boldsymbol{q}^{\circ})\dot{\boldsymbol{q}}_{i+1}, \qquad \boldsymbol{R}_{i+1} = \boldsymbol{H}^{\alpha}(\boldsymbol{q}^{\circ})\boldsymbol{r}^{i+1}$$

❋ Graphes des lois de contact.

$$(\bar{g}^{i+1}, r_{\mathrm{N}}^{i+1}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Signorini}, \qquad (\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}^{i+1}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^{i+1}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Coulomb}(\mu r_{\mathrm{N}}^{i+1}),$$

6.3 Résolutions des équations discrétisées - dynamique et liaisons unilatérales

6.3.1 Prise en compte des non linéarités matérielles et géométriques

La prise en compte de non linéarités matérielles et géométriques contenues dans le terme $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)$ est réalisée de façon usuelle par un algorithme de Newton-Raphson. Pour cela, reformulons l'équation de la dynamique discrétisée sous la forme d'un résidu d'équilibre :

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+1}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*)(\boldsymbol{u}_{i+1}-\boldsymbol{u}_i)+h\left[(1-\theta)\boldsymbol{Q}_i+\theta\boldsymbol{Q}_{i+1}\right]-h\left[(1-\theta)\boldsymbol{F}_i+\theta\boldsymbol{F}_{i+1}\right]-h\boldsymbol{R}_{i+1} \quad (6.3.1)$$

La vitesse au temps t_{i+1} est donc la solution du système non linéaire suivant :

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+1}) = 0. \quad (6.3.2)$$

Cette solution approchée est la limite d'une suite $(\boldsymbol{u}_{i+1}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par la formule de récurrence fournie par la linéarisation suivante :

$$\mathcal{R}_L(\boldsymbol{u}_{i+1}^{k+1}) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k)+\left.\frac{\partial\mathcal{R}(\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}_{i+1}^k}(\boldsymbol{u}_{i+1}^{k+1}-\boldsymbol{u}_{i+1}^k) \quad (6.3.3)$$

Pour estimer le gradient de $\mathcal{R}$ par rapport à $\boldsymbol{q}$, nous ferons deux approximation supplémentaires. La première concerne la dépendance des efforts extérieurs $\boldsymbol{F}$ par rapport à $\boldsymbol{u}$. Nous supposerons que cette dépendance est faible et que la variation de $\boldsymbol{F}$ par rapport à $\boldsymbol{u}$ est lente, soit :

$$\left.\frac{\partial\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}_{i+1}^k} \approx 0. \quad (6.3.4)$$

Cette hypothèse exclut l'emploi de forces suiveuses qui doivent être prises en compte dans les opérateurs linéarisés. La seconde hypothèse s'appuie une nouvelle fois sur la variation lente de l'opérateur d'inertie et donc sur son indépendance par rapport à la vitesse, soit :

$$\left.\frac{\partial(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*)(\boldsymbol{u}_{i+1}-\boldsymbol{u}_i))}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}_{i+1}^k} \approx \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*) \quad (6.3.5)$$

Enfin, le calcul du gradient des efforts intérieurs associés aux hypothèses précédentes conduit à :

$$\left.\frac{\partial\mathcal{R}_L(\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}_{i+1}^k} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*)+h\theta\left[\left.\frac{\partial\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}_{i+1}^k}+\left.\frac{\partial\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)}{\partial\boldsymbol{q}}\frac{\partial\boldsymbol{q}}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}_{i+1}^k}\right] \quad (6.3.6)$$

$$= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}^*)+h\theta\left[\boldsymbol{C}_t(\boldsymbol{u}_{i+1}^k,\boldsymbol{q}_{i+1}^k,t_{i+1})+h\theta\boldsymbol{K}_t(\boldsymbol{u}_{i+1}^k,\boldsymbol{q}_{i+1}^k,t_{i+1})\right], \quad (6.3.7)$$

où les opérateurs tangents traditionnels ont été introduits :

$$\boldsymbol{K}_t^k(\boldsymbol{u}_{i+1}^k,\boldsymbol{q}_{i+1}^k,t_{i+1}) = \left.\frac{\partial\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)}{\partial\boldsymbol{q}}\right|_{\boldsymbol{u}_{i+1}^k}, \quad \text{Rigidité tangente} \quad (6.3.8)$$

$$\boldsymbol{C}_t^k(\boldsymbol{u}_{i+1}^k,\boldsymbol{q}_{i+1}^k,t_{i+1}) = \left.\frac{\partial\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q},t)}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{u}_{i+1}^k}, \quad \text{Viscosité tangente} \quad (6.3.9)$$

On choisira, dans la suite, une valeur de $\boldsymbol{q}^*$ la plus proche possible de la valeur en cours de calcul. Pour respecter le caractère implicite du schéma nous choisissons $\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{q}_{i+1}^k$.

Les équations ainsi linéarisées aboutissent à l'algorithme suivant :

$$(\boldsymbol{M}^k + h\theta\boldsymbol{C}_t^k + h^2\theta^2\boldsymbol{K}_t^k)(\boldsymbol{u}_{i+1}^{k+1} - \boldsymbol{u}_{i+1}^k) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k) \tag{6.3.10}$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k) = -\boldsymbol{M}^k(\boldsymbol{u}_{i+1}^k - \boldsymbol{u}_i) - h\left[(1-\theta)\boldsymbol{Q}_i + \theta\boldsymbol{Q}_{i+1}^k\right] \tag{6.3.11}$$

$$+h\left[(1-\theta)\boldsymbol{F}_i + \theta\boldsymbol{F}_{i+1}^k\right] + h\boldsymbol{R}_{i+1}^k \tag{6.3.12}$$

$$\boldsymbol{q}_{i+1}^{k+1} = \boldsymbol{q}_i + h(1-\theta)\boldsymbol{u}_i + h\theta\boldsymbol{u}_{i+1}^{k+1} \tag{6.3.13}$$

La matrice des itérations $\hat{\boldsymbol{M}}^k = (\boldsymbol{M}^k + h\theta\boldsymbol{C}_t^k + h^2\theta^2\boldsymbol{K}_t^k)$ est toujours inversible. En effet, si les matrices tangentes sont positives mais pas toujours définies, la matrice $\hat{\boldsymbol{M}}^k$ est quant à elle toujours définie-positive. Nous noterons l'inverse de la matrice des itération par $\boldsymbol{W}^k$ soit :

$$\boldsymbol{W}^k = (\hat{\boldsymbol{M}}^k)^{-1} = (\boldsymbol{M}^k + h\theta\boldsymbol{C}_t^k + h^2\theta^2\boldsymbol{K}_t^k)^{-1} \tag{6.3.14}$$

Introduisons maintenant quelques notations qui nous seront utiles dans la suite. Considérons pour un moment que le système ne soit soumis à aucune condition unilatérale ($\boldsymbol{R}_{i+1}^k = 0$). On définit la vitesse libre et le résidu libre de la manière suivante :

$$\boldsymbol{u}_{free}^{k+1} = \boldsymbol{u}_{i+1}^k + (\boldsymbol{W}^k)\mathcal{R}_{free}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k) \tag{6.3.15}$$

$$\mathcal{R}_{free}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k) = -\boldsymbol{M}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k - \boldsymbol{u}_i) - h\left[(1-\theta)\boldsymbol{Q}_i - \theta\boldsymbol{Q}_{i+1}^k\right] \tag{6.3.16}$$

$$+h\left[(1-\theta)\boldsymbol{F}_i + \theta\boldsymbol{F}_{i+1}^k\right]. \tag{6.3.17}$$

Du fait de la linéarité des équations, l'algorithme utilisé, qui résume les équations de la dynamique discrétisée, peut se mettre sous la forme compacte suivante :

$$\boldsymbol{u}_{i+1}^{k+1} = \boldsymbol{u}_{free}^{k+1} + \boldsymbol{W}^k\left[h\boldsymbol{R}_{i+1}^k\right] \tag{6.3.18}$$

$$\boldsymbol{q}_{i+1}^{k+1} = \boldsymbol{q}_i + h(1-\theta)\boldsymbol{u}_i + h\theta\boldsymbol{u}_{i+1}^{k+1} \tag{6.3.19}$$

Pour simplifier les écritures, nous omettrons dans la suite l'indice $i+1$ lorsque qu'un exposant sur k sera indiqué.

6.3.2 Résolution du problème de contact frottant

La résolution du problème de contact frottant présente les particularités suivantes :

– Tout d'abord, le choix d'une résolution locale du problème de contact. Pour cela, l'équation de la dynamique discrétisée et linéarisée, (6.3.18), sera réécrite au moyen de variables locales au contact. Cette opération, qui s'apparente à une condensation, sera présentée au § 6.3.2.a.

- La résolution locale des équations de contact se fera au moyen de résolutions successives du problème pour chaque contact, en balayant la liste des contacts jusqu'à convergence. Cette méthode sera appelée une méthode de GAUSS-SEIDEL non linéaire par blocs du fait de sa structure similaire avec l'algorithme bien connu du même nom. Elle sera présentée au § 6.3.2.b.
- Pour chaque point de contact, le problème est résolu par deux algorithmes différents. En deux dimensions, la solution du problème est trouvée par une intersection de graphes affines. En trois dimensions, une formulation mixte est introduite, équivalente à une méthode de lagrangien augmenté et résolue par une méthode de NEWTON généralisée. Ces méthodes seront présentées dans les § 6.3.2.c et § 6.3.2.d.
- Enfin, les spécificités du problème avec adhésion sont considérées au § 6.3.4.

6.3.2.a Condensation aux variables locales de la matrice des itérations

La condensation aux variables locales s'appuie sur deux méthodes différentes. Une première méthode consiste à construire explicitement la condensée aux variables adjacentes aux contacts de la matrice des itérations. La seconde ne nécessite pas sa construction.

Condensation standard Pour les illustrer, reprenons l'expression de l'équation de la dynamique discrétisée et linéarisée sous sa forme globale (6.3.18) :

$$\boldsymbol{u}^{k+1} = \boldsymbol{u}_{free}^{k+1} + \boldsymbol{W}^k h \boldsymbol{R}^k. \tag{6.3.20}$$

On s'intéresse ici à la condensation du terme associé au contact que nous pouvons réécrire sous la forme particulière suivante :

$$\hat{\boldsymbol{M}}^k \boldsymbol{u}^{k+1} = h\boldsymbol{R}^k. \tag{6.3.21}$$

Au moyen d'un reclassement éventuel des équations, l'équation (6.3.21) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{M}}^k_{\mathsf{adj}} & \hat{\boldsymbol{M}}^k_{\mathsf{adj},l} \\ \hat{\boldsymbol{M}}^k_{l,\mathsf{adj}} & \hat{\boldsymbol{M}}^k_{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}^{k+1}_{\mathsf{adj}} \\ \boldsymbol{u}^{k+1}_{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\boldsymbol{R}^k_{\mathsf{adj}} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.3.22}$$

Les notations utilisées, ici, sont celles qui ont été introduites dans le § 6.1.3. On obtient alors une expression globale de la matrice condensée aux adjacents en inversant une des relations, soit :

$$\underbrace{\left[\hat{\boldsymbol{M}}^k_{\mathsf{adj}} - \hat{\boldsymbol{M}}^k_{\mathsf{adj},l}(\hat{\boldsymbol{M}}^k_{l})^{-1}\hat{\boldsymbol{M}}^k_{l,\mathsf{adj}}\right]}_{\widetilde{\boldsymbol{M}}^k=(\widetilde{\boldsymbol{W}}^k)^{-1}} \boldsymbol{u}^{k+1}_{\mathsf{adj}} = h\boldsymbol{R}^k_{\mathsf{adj}} \tag{6.3.23}$$

La première méthode s'appuie sur cette condensation explicite classique de la matrice $\hat{\boldsymbol{M}}^k$. Elle est coûteuse d'un de point numérique pour deux raisons. D'une part, elle nécessite l'inversion complète de la matrice $(\hat{\boldsymbol{M}}^k_l)$ et d'autre part elle conduit à une matrice pleine.

Condensation particulière aux systèmes discrets. Lorsque le nombre de degré de liberté est faible pour chaque corps devant le nombre de points de contact, on préfère ne pas construire explicitement cette matrice. En fait, on utilise directement la factorisée de la matrice des itérations pour chaque corps ainsi que les relations de passage rappelées ici :

$$\boldsymbol{v}^\alpha = \boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u},, \qquad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{H}^\alpha(\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}^\alpha \tag{6.3.24}$$

Le calcul de la matrice d'influence pour un contact α s'effectue terme à terme en calculant la vitesse locale qui résulte de l'application de réactions locales unitaires. La version globale de la réaction unitaire locale est calculée grâce à (6.3.24). On calcule ensuite la vitesse globale générée par cette réaction en effectuant une opération de « montée-descente » sur la matrice factorisée. Puis enfin, on calcule le terme de vitesse locale grâce à la relation (6.3.24).

Si ces opérations ne sont pas moins coûteuses en termes de nombre d'opérations, elles évitent par contre le stockage de la matrice condensée. De plus, on profite de la structure discrète du système pour ne pas fabriquer un opérateur global inutile.

Notations synthétiques Sans entrer dans des détails de calcul, lourds et inutiles pour la compréhension, on note de façon formelle l'ensemble de ces opérations à l'aide des opérateurs $\boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q}^k)$ et $\boldsymbol{H}^\alpha(\boldsymbol{q}^k)$ de la façon suivante :

$$(\boldsymbol{v}^\alpha)^{k+1} = (\boldsymbol{v}^\alpha_{free})^{k+1} + \sum_{\beta=1}^{\chi} \boldsymbol{w}^{\alpha\beta} h(\boldsymbol{r}^\beta)^{k+1}, \tag{6.3.25}$$

où les grandeurs suivantes sont définies :

$$\boldsymbol{w}^{\alpha\beta} = \boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q}^k)\boldsymbol{W}^k\boldsymbol{H}^\beta(\boldsymbol{q}^k) \tag{6.3.26}$$

$$(\boldsymbol{v}^\alpha_{free})^{k+1} = \boldsymbol{G}^\alpha(\boldsymbol{q}^k)\boldsymbol{u}^{k+1}_{free}. \tag{6.3.27}$$

Si la notation de ce passage aux variables locales est simplement formelle, son contenu mécanique est clair. En fait, la vitesse locale, en un point de contact, est estimée à partir de sa vitesse libre à laquelle on ajoute les contributions des réactions de tous les point de contact par l'intermédiaire de leur matrice d'influence respective.

Dans la suite les indices correspondant aux itérations de Newton-Raphson seront omis par simplicité.

6.3.2.b Algorithme de Gauss-Seidel par blocs

Le principe de l'algorithme est de calculer la solution élémentaire du problème de contact avec frottement pour un contact α, en supposant des valeurs provisoires pour les autres contacts $\beta \neq \alpha$. La solution du problème complet est obtenue en itérant sur la liste des contacts ces résolutions élémentaires jusqu'à convergence.

En séparant la valeur recherché des réactions au contact α des valeurs provisoires pour les autres contacts $\beta \neq \alpha$, la vitesse libre prend la forme suivante :

$$\boldsymbol{v}^{\alpha} = \boldsymbol{v}^{\alpha}_{free} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{\chi} \boldsymbol{w}^{\alpha\beta} h \boldsymbol{r}^{\beta} + \boldsymbol{w}^{\alpha\alpha} h \boldsymbol{r}^{\alpha} \tag{6.3.28}$$

En notant la vitesse locale libre au contact α, $\boldsymbol{v}^{\alpha}_{locfree}$ la grandeur suivante :

$$\boldsymbol{v}^{\alpha}_{locfree} = \boldsymbol{v}^{\alpha}_{free} + \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta\neq\alpha}}^{\chi} \boldsymbol{w}^{\alpha\beta} h \boldsymbol{r}^{\beta}, \tag{6.3.29}$$

on se rend compte que la vitesse locale peut s'exprimer comme un fonction linéaire de la réaction locale, si des valeurs provisoires sont choisi pour les autres contacts :

$$\boldsymbol{v}^{\alpha} = \boldsymbol{v}^{\alpha}_{locfree} + \boldsymbol{w}^{\alpha\alpha} h \boldsymbol{r}^{\alpha} \tag{6.3.30}$$

Les résolutions du problème de contact frottant pour un unique contact s'appuieront donc sur cette relation linéaire. Il s'agit en effet de réaliser l'intersection de cette droite avec les graphes de relation présentés au 5.2.3 et § 5.2.4. Nous nous contenterons de donner dans les prochains paragraphes les méthodes de résolution en deux et trois dimensions pour le problème de contact unilatéral avec frottement. Pour les formes modifiées des graphes et en particulier l'adhésion, nous y consacrons un paragraphe indépendant § 6.3.4.

6.3.2.c Résolution 2D du problème élémentaire de contact frottant

Comme nous l'avons déjà souligné, la résolution du problème de contact frottant pour un problème 2D est simple. Elle s'appuie sur l'intersection des graphes affines pour un contact α suivant :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{locfree} + \boldsymbol{w} h \boldsymbol{r} \tag{6.3.31}$$

$$(\boldsymbol{v}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{N}}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Signorini} \tag{6.3.32}$$

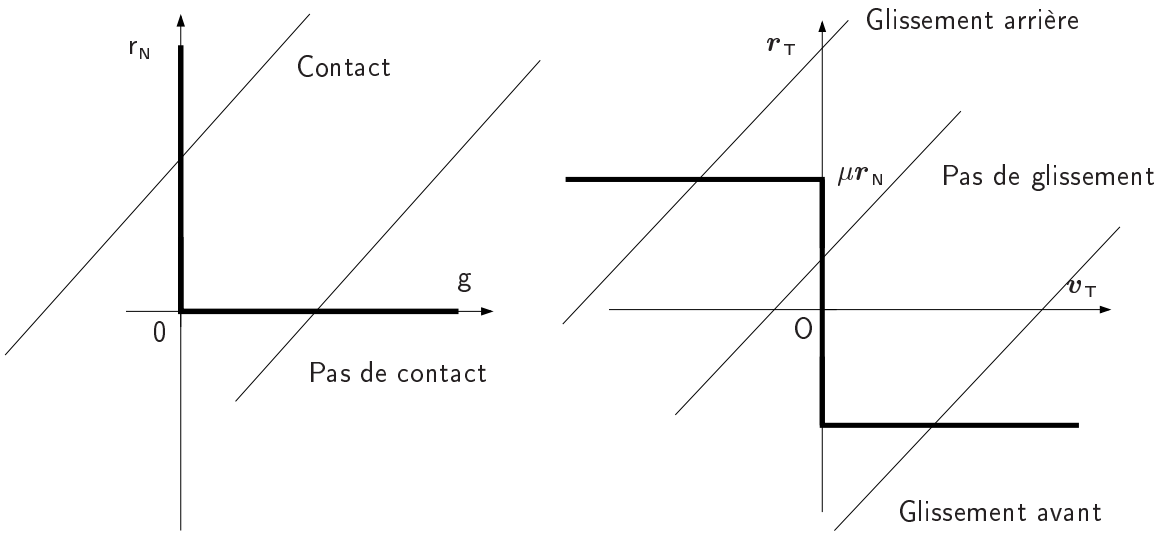
$$(\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}) \in \mathsf{GR} - \mathsf{Coulomb}(\mu \boldsymbol{r}_{\mathrm{N}}) \tag{6.3.33}$$

On donne, dans la suite, les différents cas possibles pour ces intersections. On introduit pour cela les notations suivantes :

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_{\mathrm{NN}} & w_{\mathrm{NT}} \\ w_{\mathrm{TN}} & w_{\mathrm{TT}} \end{bmatrix} \tag{6.3.34}$$

$$\boldsymbol{v}^{0} = \boldsymbol{v}_{locfree}, \quad \boldsymbol{r}^{0} = \boldsymbol{w}^{-1}\boldsymbol{v}^{0} \tag{6.3.35}$$

$$a_{\mathrm{NN}} = \frac{(\boldsymbol{v}_{locfree})_{\mathrm{N}}}{w_{\mathrm{NN}}}, \quad a_{\mathrm{NT}} = \frac{w_{\mathrm{NT}}}{w_{\mathrm{NN}}} \tag{6.3.36}$$



(a) Condition de Signorini (b) Graphe de Coulomb

FIGURE 6.4 – *Résolution du problème de contact frottant en 2D*

L'algorithme d'intersection des graphes affines peut se résumer à quatre cas :

Si $\boldsymbol{v}_{\mathrm{N}}^0 > 0$ alors

$$hr_{\mathrm{N}} = 0, \quad h\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} = 0, \tag{6.3.37}$$

c'est à dire qu'il n'y pas contact.

Si $\boldsymbol{v}_{\mathrm{N}}^0 \leq 0$ et $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^0 + \mu r_{\mathrm{N}}^0 > 0$ alors

$$hr_{\mathrm{N}} = \frac{a_{\mathrm{NN}}}{1 + \mu a_{\mathrm{NT}}}, \quad h\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} = -\mu h r_{\mathrm{N}}, \tag{6.3.38}$$

c'est à dire qu'il y a glissement-avant.

Si $\boldsymbol{v}_{\mathrm{N}}^0 \leq 0$ et $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^0 - \mu r_{\mathrm{N}}^0 < 0$ alors

$$hr_{\mathrm{N}} = \frac{a_{\mathrm{NN}}}{1 - \mu a_{\mathrm{NT}}}, \quad h\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} = \mu h r_{\mathrm{N}}, \tag{6.3.39}$$

c'est à dire qu'il y a glissement-arrière.

Si $\boldsymbol{v}_{\mathrm{N}}^0 \leq 0$ et $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^0 + \mu r_{\mathrm{N}}^0 \leq 0$ et $\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^0 - \mu r_{\mathrm{N}}^0 \geq 0$ alors

$$hr_{\mathrm{N}} = r_{\mathrm{N}}^0, \quad h\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}^0, \tag{6.3.40}$$

c'est à dire qu'il y contact mais sans glissement.

On illustre sur la figure 6.4 les différents cas possibles pour l'intersection de ces graphes. Il est intéressant de remarquer que l'abscisse à l'origine correspond à la vitesse libre.

Remarque 6.8

Cet algorithme est soumis à la condition $-1 < \mu a_{\mathrm{NT}} < 1$ qui est généralement remplie pour les corps déformables, où les termes diagonaux de la matrice sont en général plus grands que les

termes extradiagonaux pour une discrétisation des interfaces raisonnables. Pour les corps rigides, il peut arriver que cette condition ne soit pas remplie. Elle signifie que la solution n'est pas unique pour un contact α.

❑

Remarque 6.9
La résolution présentée ici est écrite en vitesse pour des raisons de simplicité d'écriture. Si l'on veut écrire ces algorithmes en terme d'interstice, on se sert alors de la prédiction fournie par la discrétisation temporelle :

$$g^{i+1} = g^i + h(1-\theta)(v_{\mathrm{N}})_i + h\theta v_{\mathrm{N}}^{k+1} \tag{6.3.41}$$

La relation entre les déplacements et les vitesses étant elle aussi linéaire, elle conduit au même type d'approche pour une condition de Signorini en déplacement.

❑

6.3.2.d Résolution 3D du problème élémentaire de contact frottant

En trois dimensions, le problème de contact frottant est résolu par une méthode de Newton généralisée due à Curnier & Alart (Curnier & Alart, 1988 ; Alart & Curnier, 1991). Pour cela, le problème élémentaire suivant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_{locfree} + \boldsymbol{w}h\boldsymbol{r} \\ (\boldsymbol{v}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{N}}) &\in \mathsf{GR} - \mathsf{Signorini} \\ (\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}}) &\in \mathsf{GR} - \mathsf{Coulomb}(\mu \boldsymbol{r}_{\mathrm{N}}), \end{aligned} \tag{6.3.42}$$

est réécrit sous la forme mixte :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{locfree} - \boldsymbol{w}h\boldsymbol{r} &= 0, \\ r_{\mathrm{N}} - proj_{\mathbb{R}^+}(r_{\mathrm{N}} - \rho v_{\mathrm{N}}) &= 0, \\ \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} - proj_{\mathcal{D}(\mu r_{\mathrm{N}})}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} - \rho \boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}) &= 0. \end{aligned} \tag{6.3.43}$$

Ces deux systèmes sont équivalents pour un coefficient $\rho > 0$ et peuvent être remis sous la forme formelle suivante :

$$\phi(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) = 0 \tag{6.3.44}$$

Le problème revient donc à chercher les zéros de la fonction Ψ pour obtenir la solution du problème de contact frottant. Cette fonction est continue mais non différentiable. En faisant appel à la notion de sous-gradient, Alart & Curnier (1991) proposent de généraliser la méthode de Newton aux fonctions seulement sous-différentiables.

Si les résultats classiques de convergence des méthodes de Newton standards ne sont pas étendus à cette méthode généralisée, il n'en reste pas moins que, dans la pratique, la convergence est obtenue en quelques itérations. Cette opération est relativement peu coûteuse puisqu'elle est réalisée sur un système de taille réduite à 6 inconnues.

6.3.3 Algorithme général de résolution - Méthode NSCD

On se propose ici de donner un aperçu synthétique de l'algorithme général de résolution :

- boucle : incrément de temps
  - boucle : incrément de NEWTON-RAPHSON
  - évaluation du résidu libre $\mathcal{R}_{free}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k)$
  - évaluation de la vitesse libre $\boldsymbol{u}_{free}^{k+1}$
    - boucle : parcours des points de contact
      (α nœud courant)
    - 1. évaluation de $\boldsymbol{v}_{locfree}^{\alpha}$ à partir des valeurs stockées de $\boldsymbol{r}^{\beta}, \beta \neq \alpha$,
    - 2a. En 2D, calcul direct de $\boldsymbol{r}^{\alpha}, \boldsymbol{v}^{\alpha}$, (cf. § 6.3.2.c)
    - 2b. En 3D, itération de NEWTON pour obtenir $\boldsymbol{r}^{\alpha}, \boldsymbol{v}^{\alpha}$, (cf. § 6.3.2.d)
      - boucle : résolution de $\phi(\dot{U}^{\alpha},\, R^{\alpha}) = 0$
      - itérations de la méthode de Newton généralisée.
    - 3. Stockage de $\boldsymbol{r}^{\alpha}, \boldsymbol{v}^{\alpha}$
  - évaluation du résidu $\mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k)$
  - évaluation de la vitesse $\boldsymbol{u}_{i+1}^{k+1}$
  - *suivante*

Commentaires Cet algorithme général de résolution possède la particularité de séparer les opérations de traitement de non linéarités matérielles et géométriques qui sont traitées à un niveau global, des opérations de traitement des non linéarités dues au contact. Dans les applications aux maçonneries, le comportement volumique des corps est considéré comme élastique linéaire en grandes transformations géométriques. Rien n'empêche, par contre, d'inclure d'autres types de non linéarités comme de l'endommagement ou de la plasticité en incluant des bibliothèques éléments finis traitant ces comportements. La séparation entre le traitement des interfaces et les non linéarités de niveau global permet d'inclure ces enrichissements facilement, sans modifier le squelette général de l'algorithme.

La résolution itérative sur chaque point de contact permet de la même manière de prendre en compte, facilement, des comportements locaux d'interfaces sophistiqués différents pour chaque point de contact. Nous allons voir, dans le paragraphe suivant, que les modèles de flexibilité et de cohésion peuvent être introduits de façon simple sans modifier de façon fondamentale la struture de l'algorithme.

6.3.4 Particularité des modèles de cohésion et de flexibilité

L'introduction des raideurs d'interfaces et des modèles de cohésion peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_{locfree} + \boldsymbol{w} h \boldsymbol{r} \\ (\boldsymbol{v}_{\mathrm{N}}, \tilde{r}_{\mathrm{N}}) &\in \mathsf{GR} - \mathsf{Signorini} \\ (\boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}, \tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{T}}) &\in \mathsf{GR} - \mathsf{Coulomb}(\mu \tilde{r}_{\mathrm{N}}), \end{aligned} \tag{6.3.45}$$

avec les changements de variables qui ont été écrits pour chacun des modèles sous la forme suivante :

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_{\mathsf{adh}}. \tag{6.3.46}$$

La réaction $\boldsymbol{r}_{\mathsf{adh}}$ représente, en toute généralité, la contribution du modèle de flexibilité ou d'adhésion introduit. La réaction $\boldsymbol{r}$ est la réaction que l'on souhaite obtenir au point de contact et la réaction $\tilde{\boldsymbol{r}}$ est une réaction auxiliaire qui respecte les conditions de contact- frottant usuelles. Pour mémoire, ce changement de variable prend la forme suivante dans le modèle de Frémond-Cangémi :

$$\tilde{r}_{\mathrm{N}} = r_{\mathrm{N}} + \beta^2 c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}, \quad \tilde{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{T}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{T}} + \beta^2 c_{\mathrm{T}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \tag{6.3.47}$$

La prise en compte dans l'algorithme de cette cohésion se fait dans la boucle sur les points de contact. La réécriture de l'équation de la dynamique condensée est alors faire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^{\alpha} &= \boldsymbol{v}^{\alpha}_{locfree} + \boldsymbol{w}^{\alpha\alpha} h \boldsymbol{r}^{\alpha} && (6.3.48) \\ &= \boldsymbol{v}^{\alpha}_{locfree} + \boldsymbol{w}^{\alpha\alpha} h (\tilde{\boldsymbol{r}}^{\alpha} - \boldsymbol{r}^{\alpha}_{\mathsf{adh}}) && (6.3.49) \\ &= \boldsymbol{v}^{\alpha}_{locfree} - \boldsymbol{w}^{\alpha\alpha} h (\boldsymbol{r}^{\alpha}_{\mathsf{adh}}) + \boldsymbol{w}^{\alpha\alpha} h (\tilde{\boldsymbol{r}}^{\alpha}) && (6.3.50) \end{aligned}$$

On note alors la vitesse locale libre modifiée par la cohésion par :

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{\alpha}_{locfree} = \boldsymbol{v}^{\alpha}_{locfree} - \boldsymbol{w}^{\alpha\alpha} h (\boldsymbol{r}^{\alpha}_{\mathsf{adh}}) \tag{6.3.51}$$

On donne dans le schéma qui suit, les modifications de l'algorithme qui sont faites pour prendre une réaction supplémentaire dans sa généralité :

boucle : parcours des points de contact
(α nœud courant)
1. évaluation de $\boldsymbol{v}^{\alpha}_{locfree}$ pour les valeurs provisoires de $\boldsymbol{r}^{\beta}, \beta \neq \alpha$
2. calcul de $\boldsymbol{r}^{\alpha}_{\mathsf{adh}}$
3. changement de variable $\tilde{\boldsymbol{v}}^{\alpha}_{locfree} = \boldsymbol{v}^{\alpha}_{locfree} - \boldsymbol{w}^{\alpha\alpha} h(\boldsymbol{r}^{\alpha}_{\mathsf{adh}})$
boucle : résolution de $\phi(\boldsymbol{v}^{\alpha}, \tilde{\boldsymbol{r}}^{\alpha}) = 0$
itérations de la méthode de Newton généralisée sur le système suivant.
$\boldsymbol{v}^{\alpha} - \tilde{\boldsymbol{v}}^{\alpha}_{locfree} - \boldsymbol{w}^{\alpha\alpha} h \tilde{\boldsymbol{r}}^{\alpha} = 0,$
$\tilde{r}^{\alpha}_{\mathrm{N}} - proj_{\mathbb{R}^+}(\tilde{r}^{\alpha}_{\mathrm{N}} - \rho v^{\alpha}_{\mathrm{N}}) = 0,$
$\tilde{\boldsymbol{r}}^{\alpha}_{\mathrm{T}} - proj_{\mathcal{D}(\mu\tilde{r}^{\alpha}_{\mathrm{N}})}(\tilde{\boldsymbol{r}}^{\alpha}_{\mathrm{T}} - \rho \boldsymbol{v}^{\alpha}_{\mathrm{T}}) = 0.$
4. Restauration de la réaction $\boldsymbol{r}^{\alpha} = \tilde{\boldsymbol{r}}^{\alpha} - \boldsymbol{r}^{\alpha}_{\mathsf{adh}}$

Le terme d'adhérence $\boldsymbol{r}^{\alpha}_{\mathsf{adh}}$, qui peut dépendre des déplacements, vitesses et d'autre variables internes est estimé pour des valeur provisoires de $\boldsymbol{r}^{\beta}, \beta \neq \alpha$. Il est clair qu'il peut être modifié après le calcul de la réaction $\tilde{\boldsymbol{r}}^{\alpha}$. Nous choisissons pourtant de ne pas effectuer d'itérations supplémentaires pour ce terme en essayant de faire converger ce champ avec les vitesses et les autres réactions.

Une version plus générale des techniques de changements de variables affines est présentée dans (Jean *et al.*, 2001). En effet, on peut envisager de la même manière des changements de variables plus généraux portant à la fois sur les interstices, les vitesses et les réactions. La seule condition qui doit être remplie est que l'on doit être capable d'estimer les termes de ce changement de variables. Comme nous l'avons déjà souligné, la prise en compte de la dilatance peut être traitée de la sorte.

Sans entrer dans les détails de calcul de la méthode, donnons quelques éléments du calcul du modèle d'adhésion de Frémond-Cangémi. Nous avons vu dans la présentation du modèle que l'intensité d'adhésion était donnée par la solution du système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} b\dot{\beta} & = & -\Big[\big(w\,h'(\beta) - \beta(c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^2 + c_{\mathrm{T}} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|^2)\big)^{-}\Big]^{(1/p)}, & \text{si } \beta \in [0,1] \\ b\dot{\beta} & \leq & -\Big[\big(w\,h'(\beta) - \beta(c_{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}^2 + c_{\mathrm{T}} \|\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}\|^2)\big)^{-}\Big]^{(1/p)}, & \text{si } \beta = 1 \end{array} \right. \tag{6.3.52}$$

Ce système différentiel est intégré par une $\theta-$méthode pour des sauts de déplacements fournis en début de pas de temps et les valeurs actuelles de ces déplacement sont calculées grâce à la vitesse du contact α en reprenant le schéma d'intégration temporelle :

$$u_{\mathrm{N}}^{k+1} = u_{\mathrm{N}}^{i} + h(1-\theta) v_{\mathrm{N}}^{i} + h\theta v_{\mathrm{N}}^{k+1} \tag{6.3.53}$$

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}^{k+1} = \boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}^{i} + h(1-\theta) \boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}^{i} + h\theta \boldsymbol{v}_{\mathrm{T}}^{k+1} \tag{6.3.54}$$

6.4 Commentaires et conclusions sur la méthode présentée

La discrétisation spatiale des équations de la dynamique a été réalisée en tâchant de tirer partie de la structure discrète des systèmes étudiés. Elle a conduit à une résolution à deux

niveaux. La mise en œuvre informatique a cherché de la même manière à suivre l'analyse qui a été faite d'un point de vue mécanique. Bien qu'une démarche objet n'ait malheureusement pas été utilisée [12], les développements ont tentés de suivre au maximum le découpage en modules qui a été suggéré, et de tenir compte des relations qui ont été mises en évidence entre ces niveaux. Cette structure logiciel, bien que de bas niveau, offre une ouverture nécessaire à une intégration simple de nouveaux comportements volumiques. On peut penser par exemple à de la plasticité et de l'endommagement.

Le respect du caractère non régulier des liaisons et de leurs formulations implique l'emploi de schémas d'intégration temporelle implicites. Les schémas sont construit sur la forme faible de l'équation de la dynamique et non comme il est usuellement fait sur des méthodes aux différences finies. Aucune estimation de l'accélération n'a été réalisée. Les variables de choix du modèle sont la vitesse et les impulsions ; les déplacements ne sont que des variables auxiliaires qui sont actualisés à partir des vitesses.

L'intégration des modèles de cohésion a été réalisée dans un cadre tridimensionnel sans modifier la structure fondamentale de l'algorithme. Elle s'opère par un changement de variables judicieux dans la résolution des problèmes élémentaires de contact frottant. Cette modification permet de tenir d'une loi de cohésion différente par point de contact ainsi que l'intégration de comportement supplémentaire comme la dilatance.

12. Nous verrons, tout de même, dans le chapitre suivant que la détection des contacts et la manipulation de polyèdres ont été développés en C++. Il s'avère que le traitement d'objet complexe, un langage de plus haut niveau est obligatoire.

CHAPITRE 7

Applications aux structures maçonnées

———————— oOo ————————

La question d'un équilibre statique se révèle ardue. En effet, pour les systèmes multi-corps, seule la dynamique permet de passer outre le manque de définition des conditions aux limites de chaque corps qui ne sont pas connues *a priori*. Il n'est donc pas possible d'envisager une évolution quasi-statique usuelle. La première partie de ce chapitre essaiera de sortir de ce dilemme. Si en première analyse des tests académiques peuvent donner des éléments de validation des algorithmes, l'application aux édifices monumentaux impose la résolution d'un certain nombre de difficultés techniques. L'acquisition des données, la connaissance des matériaux et la détection des contacts sont autant de problèmes à surmonter. De plus, nous verrons que la compréhension d'un édifice requiert une approche globale, interdisciplinaire. La prise en compte d'une réalité architecturale et archéologique se révèle indispensable.

———————— oOo ————————

Plan du Chapitre 7

7.1 Obtention d'un équilibre 247
7.1.1 Position du problème 247
7.1.2 Alternatives envisagées 249
7.1.3 Commentaires et conclusion 255
7.2 Tests de validation sur des structures académiques 258
7.2.1 Cas des appareils de joints vifs 258
7.2.2 Cas des appareils de joints de mortier cohésif 271
7.3 Applications à l'étude d'édifices monumentaux 279
7.3.1 Difficultés des modélisations - Nécessité de l'interdisciplinarité . . . 279
7.3.2 Acquisition des données & stéréo-photogrammétrie numérique . . . 282
7.3.3 Détection des contacts et discrétisation des interfaces 283
7.3.4 Une première tentative : Le Palais des Papes 289
7.3.5 Le projet d'étude de la priorale Notre-Dame d'Aleyrac 294
7.4 Conclusion 304

7.1 Obtention d'un équilibre

7.1.1 Position du problème

Comme on l'a déjà souligné auparavant, la structure maçonnée est considérée comme une collection de corps, rigides ou déformables, interconnectés par des lois d'interfaces. Les conditions aux limites pour chacun de ses corps sont donc déterminées par ces lois d'interfaces. Lorsque ces lois ne sont pas bilatérales, aucune condition aux limites explicite n'est écrite et les corps sont donc susceptibles de subir des mouvement de solides rigides.

Nécessité de la dynamique. Si l'on cherche à calculer la réponse de ce type de structure au moyen de méthodes incrémentales en temps, une manière simple et naturelle consiste à considérer la formulation dynamique du problème. Dans ce cadre, en effet, le problème reste correctement posé même en présence de mouvements de solides rigides correctement pris en compte par les termes d'inertie.

Si l'on souhaite obtenir une position d'équilibre de la structure, on fait généralement appel à une formulation incrémentale quasi-statique. Elle est équivalente au problème de dynamique discrétisée et linéarisée, mais où les termes d'inertie sont négligés. A moins d'introduire des conditions aux limites sur chaque bloc, cette démarche n'est pas possible pour les structures considérées. Elle conduit nécessairement à un problème mal posé.

Afin de se faire une idée plus précise, on se propose d'illustrer notre propos d'un point de vue numérique. Reprenons, pour cela, l'équation de la dynamique discrétisée et linéarisée :

$$\hat{\boldsymbol{M}}^k(\boldsymbol{u}_{i+1}^{k+1} - \boldsymbol{u}_{i+1}^k) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k), \quad \text{avec } \hat{\boldsymbol{M}}^k = \boldsymbol{M}^k + h\theta \boldsymbol{C}_t^k + h^2\theta^2 \boldsymbol{K}_t^k \tag{7.1.1}$$

Pour résoudre ce problème, il est nécessaire que la matrice des itérations $\hat{\boldsymbol{M}}^k$ soit inversible. Ceci est toujours possible en dynamique puisque la matrice de masse est définie positive. Si le terme d'inertie est négligé, la présence des modes rigides dans la matrice de rigidité la rend singulière. On ne peut dons plus inverser cette matrice directement.

Si le comportement du matériau est visqueux, la matrice des itérations n'est plus inversible. En effet, un des axiomes fondamentaux associés au Théorème des Puissance Virtuelles nous rappelle que la puissance des efforts intérieurs doit être nulle pour tout mouvement rigidifiant. De la même manière que la matrice de rigidité tangente, la matrice de viscosité tangente est uniquement semi-définie positive. La viscosité matérielle ne travaille donc pas sur les mouvements de solides rigides.

Effet de la dynamique sur une position d'équilibre. L'équilibre statique de la structure ne peut donc être obtenu qu'à la suite d'une évolution dynamique où les effets de dissipation numérique ou matérielle permettent d'annuler progressivement l'énergie cinétique du système. Lorsque l'état d'équilibre n'est pas unique, ce sont les effets d'inertie qui détermine une position d'équilibre parmi tous les choix possibles. Il se peut alors que l'équilibre choisi ne soit pas physiquement acceptable et qu'il ne soit pas du tout le reflet d'une évolution quasi-statique.

Considérons l'exemple simple suivant d'une murette soumise à la gravité, composée d'un appareil de joints-vifs réguliers de 12 assises. Le problème est considéré en deux dimensions sous l'hypothèse des contraintes planes. Chaque bloc est maillé par 8 éléments T3 et 8 candidats au contact sont placés sur la frontière. Cette discrétisation est illustrée à la figure 7.1.

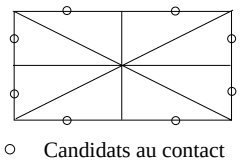


FIGURE 7.1 – *Maillage d'un bloc*

On illustre maintenant un calcul dynamique effectué avec la méthode NSCD. Pour obtenir un équilibre statique, on a fait appel à la viscosité numérique en choisissant $\theta = 1$ où elle est maximum. Le pas de temps a été choisi comme égal à $1/20^{\text{ème}}$ de la période fondamentale d'un bloc. Ce choix est usuel pour effectuer un calcul dynamique dans les règles. Le résultat est illustré à la figure 7.2. Les bâtons noirs correspondent aux réactions aux points de contact et les niveaux

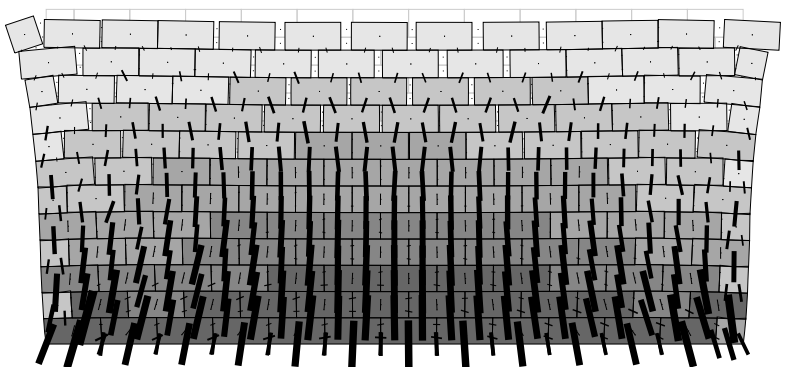


FIGURE 7.2 – *Réactions et déformée à l'équilibre, (amplification= 10000)*

de gris représente la pression totale sur chaque bloc exercée par les réactions normales.

Cette déformée peut paraître quelque peu surprenante. Elle résulte en fait des oscillations successives de la murette lors du passage de l'onde de gravité. On voit que cet équilibre n'est pas physiquement acceptable et ceci pour plusieurs raisons. D'une part, la déformée en tonneau à laquelle on pouvait s'attendre n'est pas du tout reproduite ici, d'autre part, les joints verticaux du haut du mur sous déjà tous ouverts.

Nous verrons dans le prochain paragraphe quelles sont les alternatives qui ont été envisagées pour essayer de contourner, ou tout au moins d'atténuer, le problème des effets indésirables de l'inertie.

7.1.2 Alternatives envisagées

Plusieurs tentatives, visant à obtenir un équilibre statique, vont être présentées dans la suite. Il ne s'agit pas, à proprement parler, de solutions à ce problème mais de techniques pour essayer d'obtenir des résultats acceptables pour un coût numérique raisonnable.

Tout d'abord, nous rappelerons quelles sont les techniques utilisées dans le cadre des méthodes éléments distincts (MED, voir § 3.2). Ensuite, nous proposons d'utiliser, au §7.1.2.b, la viscosité numérique du schéma d'Euler implicite, alliée à ses qualités de filtrage pour introduire une atténuation des effets dynamiques. Dans le même esprit, on propose, au §7.1.2.c, une méthode de régularisation explicite basée sur une décomposition de la matrice de rigidité tangente. Enfin, nous donnerons une dernière méthode conduisant à introduire une viscosité artificielle de manière brutale puis nous essaierons de conclure.

7.1.2.a Conditions aux limites artificielles

Nous avons vu, dans la partie concernant les méthodes éléments distincts (cf § 3.2), où le problème de l'obtention d'un état d'équilibre pour des structures flottants se pose dans les mêmes termes, que des solutions ont été proposées pour surmonter ce problème.

Sans entrer dans des détails techniques, ces solutions consistent à introduire des conditions artificielles pour chaque bloc. Il s'agit en fait d'attacher chacun des ces blocs à un repère fixe par une liaison élastique et/ou visqueuse. Les mouvements de solides rigides se retrouvent alors à nouveau déterminés et permettent un calcul quasi-statique.

Dans le cas des méthodes explicites, il s'agit, par ce moyen, d'introduire une viscosité dans le calcul dynamique permettant d'atténuer les effets de la dynamique. Pour les méthodes implicites, les termes d'inertie peuvent être négligés et les liaisons supplémentaires rendent la matrice des itérations à nouveau inversible.

L'avantage d'introduire une liaisons purement visqueuse est que son effet s'annule à l'équilibre. En pratique, il est nécessaire d'introduire de forte viscosité dont l'effet est souvent très long à s'atténuer. De même, les rigidités supplémentaires qui sont ajoutées doivent être assez fortes pour donner à la matrice de rigidité un conditionnement correct nécessaire à son inversion. D'une manière générale, ces méthodes sont difficiles à calibrer et leurs effets sur l'état d'équilibre choisi sont durs à estimer.

En s'inspirant de ces méthodes, nous allons essayer de donner d'autres solutions qui ne nécessitent pas l'estimation de nouveaux paramètres.

7.1.2.b Régularisation dynamique et viscosité numérique.

Propriétés d'amortissement et de filtre de l'algorithme L'algorithme d'intégration temporelle utilisé assure de la conservation pour $\theta = 1/2$, où le déclin pour $1 \leq \theta > 1/2$, de l'énergie totale du système. Cette propriété lui confère une stabilité inconditionnelle. Lorsque $\theta = 1$, le schéma devient un schéma d'Euler implicite pour lequel l'amortissement numérique est le plus fort. Cet amortissement est d'autant plus fort que le pas de temps choisi est grand.

Plutôt que d'introduire une viscosité artificielle au moyen de liaisons, il a été choisi d'approcher le problème d'une évolution quasi-statique par une évolution dynamique où les effets d'inertie sont filtrés par l'algorithme.

Illustration sur l'exemple de la murette soumise à la gravité On donne sur la figure 7.3 la résultante sur le sol en fonction du temps pour différents pas de temps, évoluant de $h = 0.5.10^{-04}$ s à $h = 0.1.10^{-01}$ s. La période fondamentale d'oscillation de la murette est d'environ $T = 0.18.10^{-01}$ s et pour chaque bloc de $0.15.10^{-02}$.

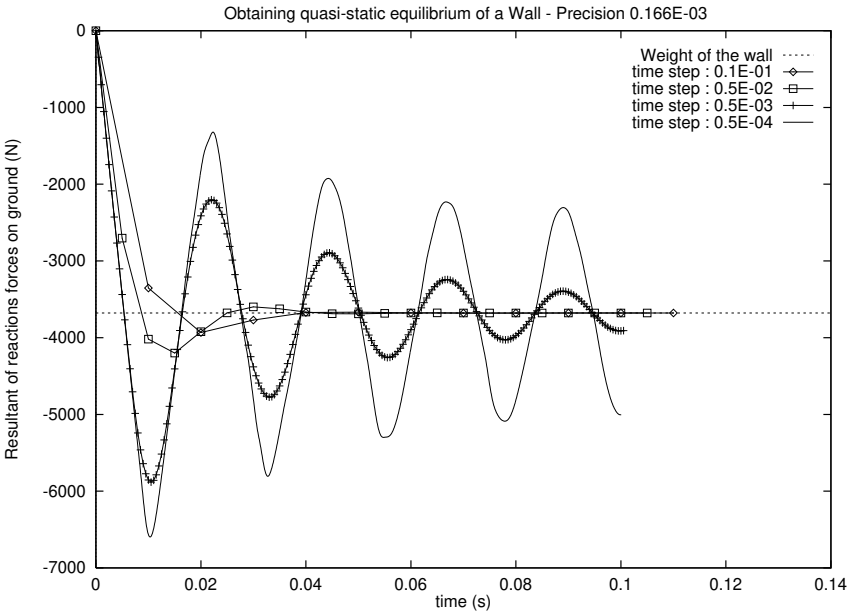


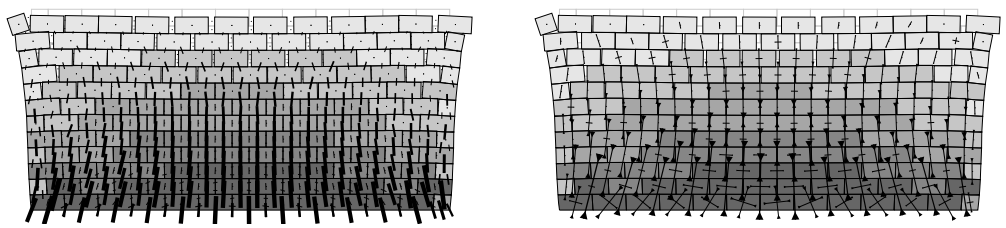
FIGURE 7.3 – *Résultante sur le sol en fonction du temps*

On constate que plus le pas de temps se rapproche de la période propre du mur plus les effets dynamiques sont absorbés par l'algorithme, sans pour autant changer la valeur de la résultante à l'équilibre. Pour des structures simples, l'équilibre peut être obtenu en une seule itération en utilisant des pas de temps de l'ordre de la période propre fondamentale.

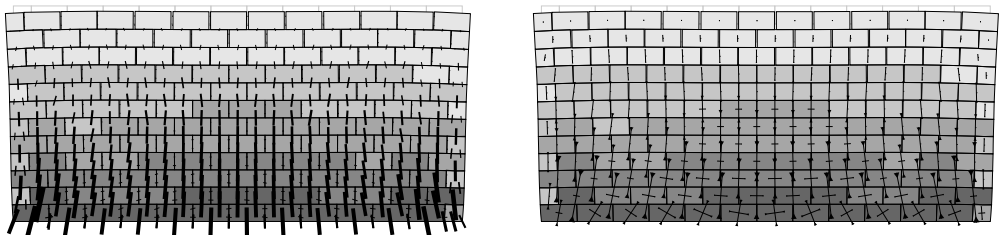
Sur la figure 7.4, on illustre les différents états d'équilibre obtenus pour les différents pas de temps. On constate que les problèmes liés aux passages des oscillations (ouverture des joints verticaux par exemple) sont réduits.

Si ces résultats sont encourageants, il n'en reste pas moins que l'utilisation de grands pas de temps ont tendance à déstabiliser la convergence des algorithmes. En effet, la matrice des itérations $\boldsymbol{M}^k$ reste toujours inversible, mais son conditionnement varie fortement avec le pas de temps. En effet, la matrice de rigidité tangente qui possède des modes à énergie nulle, représentatifs des mouvements de solides rigides de chaque bloc, prend une part de plus en plus importante dans la matrice des itérations avec l'acroissement du pas de temps.

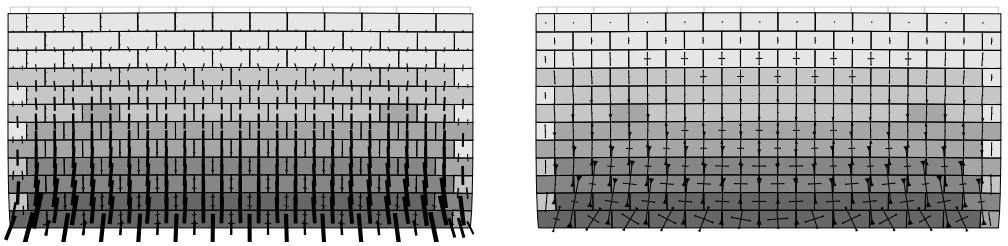
Les problèmes de convergence associés à ce mauvais conditionnement de la matrice des itérations sont aggravés lorsque l'on considère des grandes structures où le nombre de blocs est



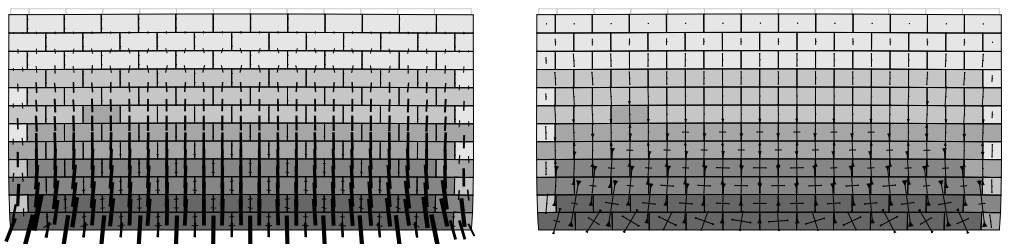
(a) Réactions et contraintes pour $h = 0.5.10^{-04}$ s



(b) Réactions et contraintes pour $h = 0.5.10^{-03}$ s



(c) Réactions et contraintes pour $h = 0.5.10^{-02}$ s



(d) Réactions et contraintes pour $h = 0.1.10^{-01}$ s

FIGURE 7.4 – *Différents états d'équilibre pour différents pas de temps* *Amplification = 10000*

important. Ces problèmes de conditionnement nous obligent à ne pas dépasser un incrément de temps critique au délà duquel la convergence du système devient difficile. il devient alors difficile d'amortir fortement les termes d'inerties. Pour essayer de contourner ce problème, on donne dans la partie suivante une méthode de régularisation explicite de la matrice de rigidité tangente qui permet de négliger une bonne part des effets d'inertie.

7.1.2.c Régularisation par décomposition en valeurs singulières des opérateurs tangents.

Considérons à nouveau le problème de dynamique linéarisée et discrétisée suivant pour un comportement non visqueux :

$$\hat{\boldsymbol{M}}^k(\boldsymbol{u}_{i+1}^{k+1} - \boldsymbol{u}_{i+1}^k) = \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_{i+1}^k), \qquad \text{avec } \hat{\boldsymbol{M}}^k = \boldsymbol{M}^k + h^2\theta^2\boldsymbol{K}_t^k \tag{7.1.2}$$

Introduisons maintenant l'ensemble des vitesses discrètes $\boldsymbol{u}$ noté $\mathcal{U}$. Dans le cadre du problème linéarisé, $\mathcal{U}$ a la structure d'un espace vectoriel (translations et petites rotations linéarisées). L'objectif de cette partie est de décrire une décomposition en somme directe de $\mathcal{U}$ de façon à séparer explicitement les vitesses de solides rigides des vitesses correspondant à une déformation pure.

Décomposition des vitesses Soit $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}\}$ l'espace vectoriel de paramétrisations des mouvements de solides rigides (ensemble des distributeurs), on considère une application linéaire $\boldsymbol{G} : \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}\} \longrightarrow \mathcal{U}$ fournissant à partir d'une vitesse de rigide un élément de l'espace des vitesses généralisées. On désigne par $\mathcal{U}_R$ l'image de $\boldsymbol{G}$.

Pour construire le projecteur canonique sur $\mathcal{U}_R$, on introduit une application linéaire $\boldsymbol{L}$: $\mathcal{U} \longrightarrow \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}\}$ tel que $\boldsymbol{GL}$ soit l'application identité sur $\mathcal{U}_\mathcal{R}$. On désigne par $\mathcal{U}_\mathcal{D}$ le noyau de $\boldsymbol{L}$. De part la définition des applications $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{L}$, on a donc construit deux espaces supplémentaires tel que : $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\mathcal{R} \oplus \mathcal{U}_\mathcal{D}$.

Décomposition des efforts Considérant maintenant l'espace vectoriel des efforts généralisés, il est mis en dualité par la forme bilinéaire canonique représentant la puissance d'un effort par rapport à une vitesse notée $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{F} \rangle$. De même, l'espace des torseurs cinématiques $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{\mu}\}$ peut être mise en dualité avec $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\omega}\}$ par la forme bilinéaire canonique suivante : $\big\langle (\boldsymbol{u}_Q, \boldsymbol{\omega}_Q) \bullet (\boldsymbol{f}_Q, \boldsymbol{\mu}_Q) \big\rangle$ (Q étant le point de réduction du distributeur). En utilisant la dualité mise en place, on construit de manière classique les applications transposées ${}^\intercal\boldsymbol{G}$ et ${}^\intercal\boldsymbol{L}$. Le noyau de l'application transposée $Ker\,({}^\intercal\boldsymbol{G})$ représente donc l'ensemble des efforts à torseurs nuls. On a donc ${\mathcal{U}_\mathcal{R}}^\perp = Ker\,({}^\intercal\boldsymbol{G})$. Les décompositions sont résumées sur la figure 7.5.

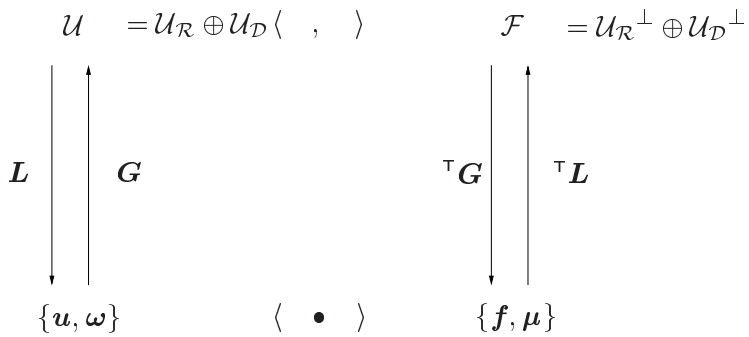


FIGURE 7.5 – *Décomposition en somme directe*

Cette décomposition effectuée, il reste à restreindre l'opérateur de rigidité tangente sur l'espace $\mathcal{U}_\mathcal{D}$. Le choix explicite des applications $\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{L}$ est vaste mais peut être alors arbitrairement restreint en dimension finie si nous choisissons de munir $\mathcal{U}$ d'une norme et de former le projecteur orthogonal à cette norme. Dans notre application, nous choisissons une norme s'appuyant sur l'opérateur inertiel toujours défini positive de la manière suivante :

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}, \left\langle \boldsymbol{u}, \frac{1}{h}\boldsymbol{M}\boldsymbol{v} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{v}, \frac{1}{h}\boldsymbol{M}\boldsymbol{u} \right\rangle = \frac{1}{h}{}^\intercal\boldsymbol{u}\boldsymbol{M}\boldsymbol{v} \tag{7.1.3}$$

Physiquement, le choix de cette norme définit les mouvements de solides rigides par rapport au centre d'inertie du corps. De plus, nous avons choisi de multiplier l'opérateur par $\frac{1}{h}$ de façon à garder l'homogénéité des écritures d'un point de vue mécanique ($\frac{1}{h}\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}$ correspondant en effet à l'effort d'inertie discret induit par le vitesse $\boldsymbol{v}$). En choisissant de construire $\boldsymbol{GL}$ comme le projecteur $\dfrac{1}{h}\boldsymbol{M}$-orthogonal, nous pouvons écrire la relation suivante :

$${}^\intercal(\boldsymbol{GL})\frac{1}{h}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{GL}) = 0 \text{ soit } {}^\intercal\boldsymbol{GMGL} = {}^\intercal\boldsymbol{GM} \tag{7.1.4}$$

La matrice $\boldsymbol{M}$ étant définie positive, si l'on suppose de plus que $\boldsymbol{G}$ restreint à $\mathcal{U}_\mathcal{R}$ est une bijection bicontinue, on peut démontrer sans difficulté que l'application $\boldsymbol{m} = {}^\intercal\boldsymbol{GMG}$ est inversible. On peut d'ailleurs remarquer que $\boldsymbol{m}$ est l'opérateur d'inertie du rigide associé. Se donnant $\boldsymbol{G}$, on peut déduire $\boldsymbol{L}$ de manière unique de sorte à produire un projecteur $\frac{1}{h}\boldsymbol{M}$-orthogonal :

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{m}^{-1}{}^\intercal G\boldsymbol{M} \tag{7.1.5}$$

Application à l'équation de la dynamique discrétisée L'opérateur de rigidité $\boldsymbol{K}^k$ restreint à $\mathcal{U}_\mathcal{D}$ est alors

$$\boldsymbol{K}_\boldsymbol{m} = \boldsymbol{K} + {}^\intercal\boldsymbol{L}\boldsymbol{m}\boldsymbol{L}. \tag{7.1.6}$$

La matrice, $\boldsymbol{S}_\boldsymbol{m} = \boldsymbol{K}_\boldsymbol{m}^{-1} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{m}^{-1}{}^\intercal\boldsymbol{G}$, fournit alors un pseudo-inverse de $\boldsymbol{K}$ sur $\mathcal{U}_\mathcal{D}$, c'est à dire,

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{S}_\boldsymbol{m} = \boldsymbol{I} - {}^\intercal(\boldsymbol{GL}). \tag{7.1.7}$$

On peut réécrire un inverse de $\hat{M}^k$ notée $\hat{W}^k$ de la manière suivante :

$$\hat{W}^k = \boldsymbol{G}\boldsymbol{m}^{-1}{}^\intercal\boldsymbol{G} + \boldsymbol{S} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{S} = h^2(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{GL})\boldsymbol{S}_\boldsymbol{m}(\boldsymbol{I} - {}^\intercal(\boldsymbol{GL})) \tag{7.1.8}$$

Si l'on repose maintenant la question de l'obtention d'un équilibre statique d'une structure flottante dans un état initial, on peut rappeler le résultat suivant :

Si l'on considère le système linéaire suivant $\boldsymbol{Kq} = \boldsymbol{F}$ avec $det(\boldsymbol{K}) = 0$, on sait qu'il admet une solution si et seulement si le second membre $\boldsymbol{F}$ est orthogonal aux solutions du système linéaire adjoint ${}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}_R = 0$, soit ${}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{q}_R\boldsymbol{F} = 0$. Ce résultat exprime simplement que les efforts ne doivent pas travailler sur les modes de vitesses rigides de la structure.

Grâce à la décomposition précédente, on simule une évolution quasi-statique avec pour matrice des itérations le choix suivant : $\hat{W}^k = \boldsymbol{S}$. Ce qui revient à négliger le terme inertiel global $\boldsymbol{Gm^{-1}}{}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{G}$ est donc négligé . L'inertie apporte une rigidité équivalente par le terme ${}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{LmL}$ dans la matrice $\boldsymbol{K_m}$ qui permet de traiter les modes rigides.

Cette opération n'améliore malheureusement pas le conditionnement de la matrice des itérations mais permet de calculer, à pas de temps équivalents des évolutions qui tendent plus vite vers un état d'équilibre. Pour des structures plus complexes que la simple murette, on obtient avec cette décomposition des équilibres quasi-statique en quelques incréments (inférieur à 5). L'application de cette méthode sera illustrée au § 7.2.1.a sur des arches et des arcs-boutants.

7.1.2.d Amortissement brutal.

Dans l'optique de conserver la convergence des algorithmes de calcul des réactions de contact, on emploie une troisième méthode, pour obtenir, à moindre coût numérique, un équilibre de la structure. Le principe simple s'appuie sur une mise à zéro de la vitesse globale du système à chaque pas de temps. On conserve alors des pas de temps faibles pour lesquels l'algorithme de calcul des réactions converge rapidement et on limite, en même temps les effets d'inertie. Cette méthode, qui peut sembler sauvage revient à utiliser un amortissement matériel linéaire.

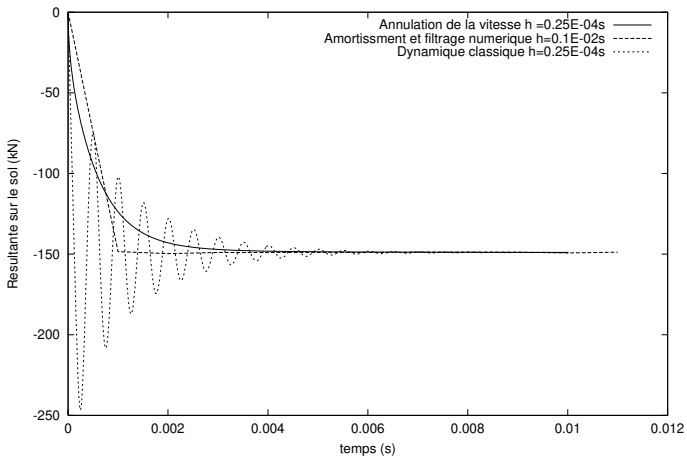


FIGURE 7.6 – *Résultante sur le sol en fonction du temps*

On donne, sur la figure 7.6, la résultante sur le sol en fonction du temps pour une murette tridimensionnelle équivalente à la murette présentée précédemment. On compare, sur cette fi-

gure, les résultats pour deux types de méthode d'amortissement avec le résultat d'un calcul en dynamique classique.

On se rend compte que l'amortissement introduit, en annulant la vitesse à chaque pas de temps, conduit à un réponse exponentielle caractéristique d'un amortissement linéaire. Pour se faire une idée plus précise de l'amortissement introduit dans un cadre linéaire, cette procédure revient à considérer une matrice de viscosité égale à l'inverse de la masse, puis à annuler la matrice de masse.

On donne sur la figure 7.8 les déformées obtenues par dynamique classique et l'annulation de la vitesse. On constate, par cette méthode, qu'on évite bien les problèmes liés aux effets d'inertie.

Sur la figure 7.7, on donne un exemple d'un affaissement du murette. Ce problème, déjà traité par Jean-Jacques Moreau, permet de retrouver les résultats obtenus avec des solides rigides sans méthodes de régularisation. Il est à noter que si l'élasticité pose de sérieux problèmes pour l'obtention d'équilibre statique, elle offre, par contre, une diminution de l'hyperstaticité du système en introduisant des degrés de liberté supplémentaires.

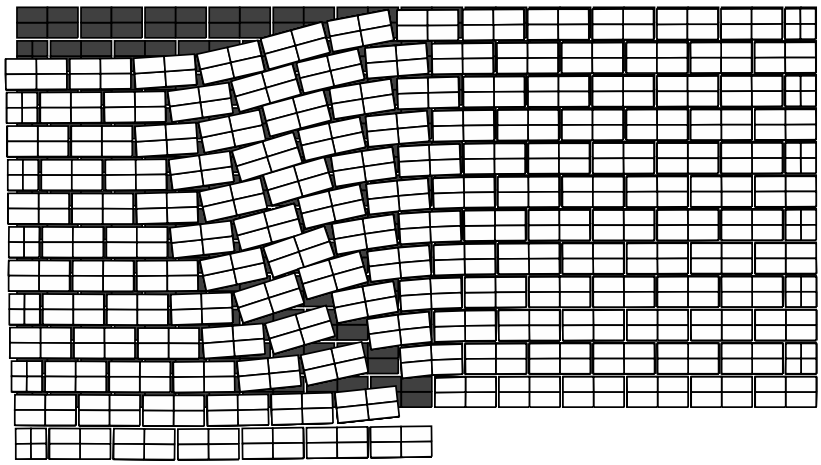
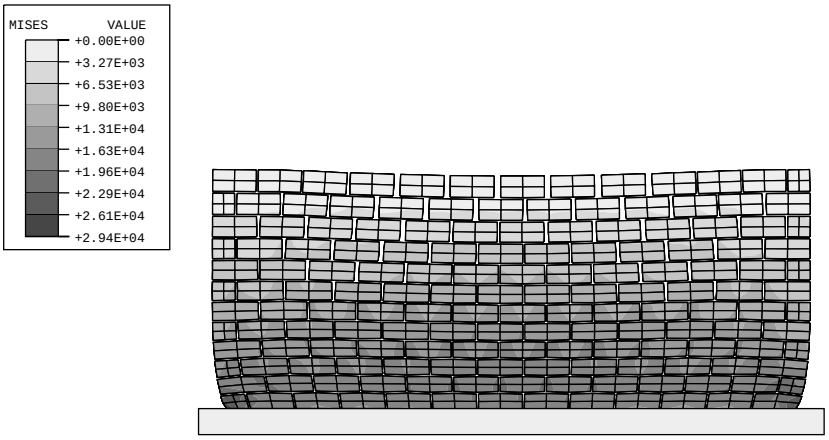


Figure 7.7 – *Simulation d'affaissement de sol en quasi-statique (-50mm sur la gauche)*

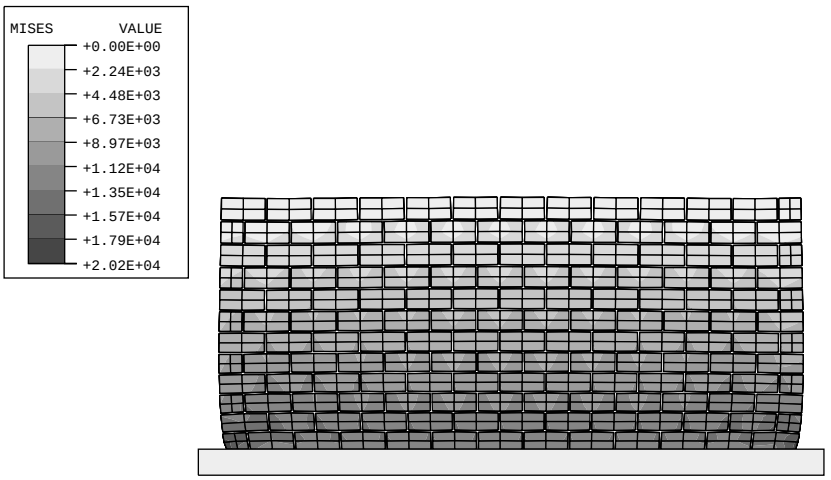
7.1.3 Commentaires et conclusion

L'obtention d'une position d'équilibre pour une collection de solides flottants n'est pas une chose facile. Une méthode naturelle consiste, soit à user de la dynamique associée à un mécanisme de dissipation de l'énergie cinétique, soit à régulariser les opérateurs tangents en apportant une information supplémentaire sur les modes rigides.

Ces méthodes ont pour objectif d'obtenir un équilibre physiquement acceptable. L'adjectif « acceptable » cache en fait les nombreuses hypothèses qui sont fait sur le système étudié. En effet, on souhaite obtenir un état d'équilibre qui rende compte de l'histoire du chargement et de



(a) Contraintes de von Mises - Dynamique standard



(b) Contraintes de von Mises - Annulation de la vitesse

Figure 7.8 – *Murette tridimensionnelle sous gravité (amplification=2.5E+06)*

son mode de construction. Si négliger les effets de l'inertie ne parait pas être une hypothèse trop sotte, elle ne garantie tout de même pas que l'équilibre obtenu sera correcte.

Sans informations supplémentaires, les méthodes, qui ont été proposées, cherchent à s'approcher d'une évolution quasi-statique sans introduire de paramètres supplémentaires difficiles à estimer.

A l'image du calcul à la rupture, on aurait pu chercher un équilibre statique par une méthode directe en imposant, concomitamment, le respect de l'équilibre de la structure et des capacités des lois d'interfaces. Si la méthode est directe et rapide, il est par contre tout aussi difficile de choisir un état d'équilibre. Les méthodes incrémentales dynamiques reviennent à simuler un chargement succesif et progressif des assises du bas vers le haut dans le cas de la gravité. Ce

mode de chargement bien que très schématique par rapport au mode de construction semble être raisonnable.

Pour conclure ce paragraphe, nous dirons que nous ne pouvons pas recommander un méthode « passe-partout », pour mener à bien le calcul d'un équilibre d'une structure maçonnée. Nous avons cependant trouvé des méthodes acceptables et circonstrit leurs qualités et leurs défauts.

7.2 Tests de validation sur des structures académiques

Avant de se lancer à l'assaut des édifices monumentaux, on considère, dans cette partie, des exemples académiques qui ont permis de tester et de dégrossir les principales caractéristiques de la méthode sur des exemples simples. Il s'agissait, avant tout, de mettre en évidence les avantages et les inconvénients d'une telle méthode et de tester la fiabilité des algorithmes indépendamment de tous problèmes techniques relatifs au maillage et à la reconnaissance des contacts, inhérents aux traitements de problèmes réels.

Les validations éventuelles que fournissent ces exemples sont à prendre au sens de validation de l'outil numérique. Cette validation est toute relative car les simulations ne sont que rarement confrontées à l'expérience. On comprendra que ces exemples ont servis pendant les phases de développement des algorithmes. Ils ne sont pas moins intéressants pour montrer les travers de la méthode.

La géométrie de ces édifices, ainsi que leur maillage, ont été crées grâce à des outils dédiés aux applications mécaniques usuelles. Le résultat de ces opérations de construction ferait certainement bondir un architecte. Leur existence est uniquement justifiée par la volonté d'obtenir des structures simples facilement interprétables, mais tout de même, suffisamment représentatives des mécanismes guidant la stabilité de structures standards (arche, arcs-boutants, voûte, dôme).

Le placement des candidats au contact est fait sur chaque bloc, *a priori*. Si l'on constate que ce placement nuit à la stabilité de l'édifice, il est adapté, *a posteriori*, pour garantir le maximum de stabilité. Nous discuterons les inconvénients de cette procédure sur le cas particulier des arches.

Les premières applications, présentées au § 7.2.1, sont effectuées sur des appareils de joints-vifs. Les lois d'interfaces choisies sont donc représentatives du contact unilatéral et du frottement. Nous donnons ensuite des applications où le joint est considéré comme cohésif, au § 7.2.2.

7.2.1 Cas des appareils de joints vifs

Quelques calculs sur des appareils de joints-vifs sont présentés dans ce paragraphe. Sauf mention particulière, les paramètres caractéristiques des matériaux et des interfaces sont identiques pour l'ensemble des applications. Pour simplifier la présentation, on se propose de les résumer dans le tableau 7.1. Ces paramètres correspondent à des blocs faits de calcaire ou de granit.

Masse volumique $\rho(\,\mathsf{Kg.\,m^{-3}})$	Module d'Young $E(\,\mathsf{MPa})$	Coefficient de Poisson ν	Coefficient de frottement μ
2700	60000	0.27	0.5

Tableau 7.1 – *Paramètres génériques*

Dans la plupart des applications traitées dans ce paragraphe, le joint est le plus souvent d'épaisseur nulle. Lorsque le joint est épais, il est simplement supposé qu'il est constitué d'un mortier ancien dont les propriétés mécaniques sont modélisées par du contact unilatéral et du frottement.

L'interaction avec le sol est rudimentaire. En règle générale, le sol est représenté par un massif rigide en contact frottant avec la structure. Pour l'étude d'édifices réels, il est clair que des conditions aux limites plus représentatives doivent être prises en compte.

7.2.1.a Cas des arches et des arcs-boutants en deux dimensions

Ce paragraphe est dédié à l'étude de structures en deux dimensions reproduisant les phénomènes d'arc-boutement, clef de la tenue mécanique de nombreuses structures architecturales. Le cas d'une arche est tout d'abord considéré, puis un portique, constitué d'une arche sur pilier avec arcs-boutants est abordé.

En premier lieu, nous examinerons l'équilibre de telles structures soumises à la gravité. Cette étape apporte, des informations utiles sur la tenue des structures sous poids propre, et constitue, de plus, une étape indispensable à tout autre calcul. En effet, sans les efforts de poids propre, il n'est pas envisageable de considérer la stabilité des systèmes d'arcs. Les efforts de compression, alliés le plus souvent au frottement sont les seuls éléments de la tenue de ces structures.

Une fois la stabilité assurée sous poids propre, nous donnerons deux exemples de calcul pour des conditions de chargement pathologiques. Le premier de ces calculs simule l'affaissement d'une partie du sol et le second représente schématiquement un séisme par une onde de cisaillement.

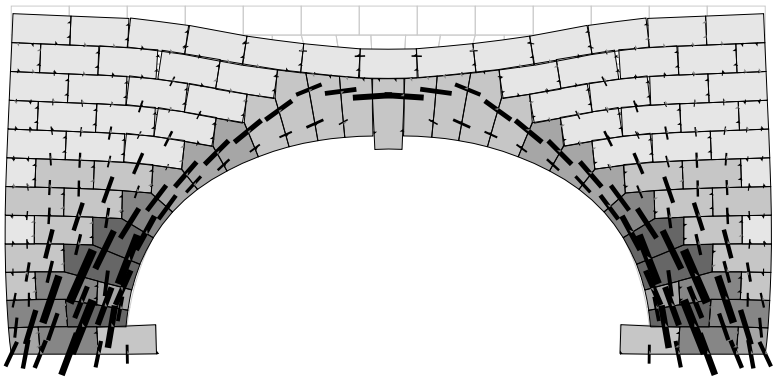
Calcul sous gravité L'arche étudiée est constituée de 98 blocs maillés par 8 T3 (élément isoparamétrique à 3 noeuds) de façon identique aux murettes présentées précédemment (cf. figure 7.1). L'arc, proprement dit, est un arc de plein cintre à extrados en escalier. Ce choix a été fait pour faciliter les opérations de maillage, en n'imposant pas de taille supplémentaire des blocs adjacents à l'extrados.

Comme on l'a déjà souligné les points candidats au contact sont placés, *a priori*, au centre des segments constituants les cotés des blocs. Le nombre de points de contact est de 370. Pour donner un ordre de grandeur, la dimension des blocs parallélépipédiques est de $50\,\mathsf{cm} \times 25\,\mathsf{cm} \times 50\,\mathsf{cm}$. On illustre sur la figure 7.9 les réactions et les contraintes obtenues après un calcul sous poids propre.

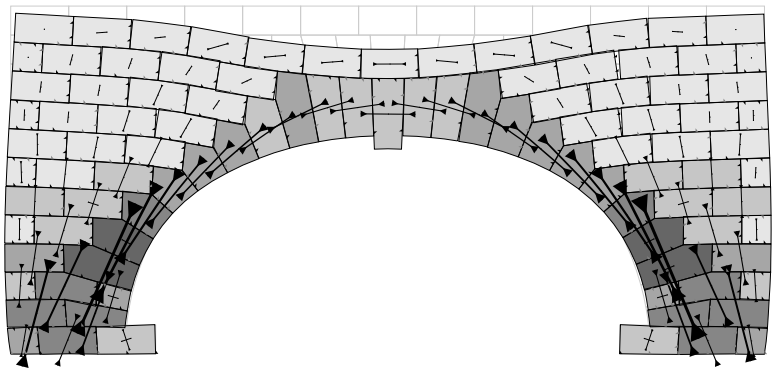
Les bâtons représentent, à nouveau, les réactions de contact. Cette représentation n'est pas orientée. Elle schématise à la fois la réaction qu'un point candidat exerce sur une surface antagoniste et la réaction opposée. Ce choix de représentation n'est pas ambigü puisque les réactions au point de contact sont nécessairement positives. Elle a été choisie pour mettre en évidence les descentes de charges chères aux architectes des monuments.

La première constatation qui peut être faite, est assez évidente : la structure résiste à son poids propre et s'équilibre. Cette remarque n'est pas aussi triviale qu'elle en a l'air et ceci pour plusieurs raisons que nous allons expliquer.

Le calcul de l'équilibre a été réalisé grâce à une décomposition de l'opérateur tangent (§ 7.1.2.c). Un calcul dans le cadre de la dynamique transitoire standard se révèle instable. En effet, les oscillations provoquées par le passage des ondes de gravité provoquent un déchaussement de la clef



(a) Réactions



(b) Contraintes principales au centre des blocs

FIGURE 7.9 – *Déformée d'un arc sous gravité,* ($\times$30000)

de voûte, conduisant à la ruine de l'arche.

En outre, le placement des points candidats a été choisi a priori et semble convenir à l'état d'équilibre. Si ce positionnement implique uniquement des modifications des états de contraintes au niveau local lorsqu'un équilibre est trouvé, il peut être déterminant sur la charge extrême que peut supporter la structure. Nous allons essayer de préciser ce point dans le paragraphe suivant.

Discussion sur le positionnement des points candidats au contact A titre d'illustration, considérons un arc de plein cintre composé de voussoirs réguliers. La stabilité de cet arc peut être interprétée en termes de lignes de poussées (On rappelle que la ligne de poussée est définie par l'enveloppe des résultantes des actions de contact dans chaque section de l'arc, en l'occurrence, pour un arc de plein cintre dans chaque joint). Un critère de stabilité géométrique exige que cette ligne de poussée demeure dans la matière, c'est à dire, qu'elle soit comprise entre l'intrados et l'extrados de l'arc. Ce critère est bien sûr valable si l'on considère que le frottement est assez fort pour ne permettent aucun glissement. Dans le cas contraire, l'orientation des surfaces des joints est importante.

Le placement des points de contact délimite donc la surface de contact où peut évoluer la ligne de poussée sans risque de ruine. En clair, si la ligne de poussée est intérieure à l'enveloppe convexe défini par ces points, un équilibre peut avoir lieu. On constate ici l'analogie avec le polygone de sustentation d'un solide. Ce propos est illustré sur la figure 7.10, où pour une ligne de poussée donnée, la ruine peut ou non avoir lieu.

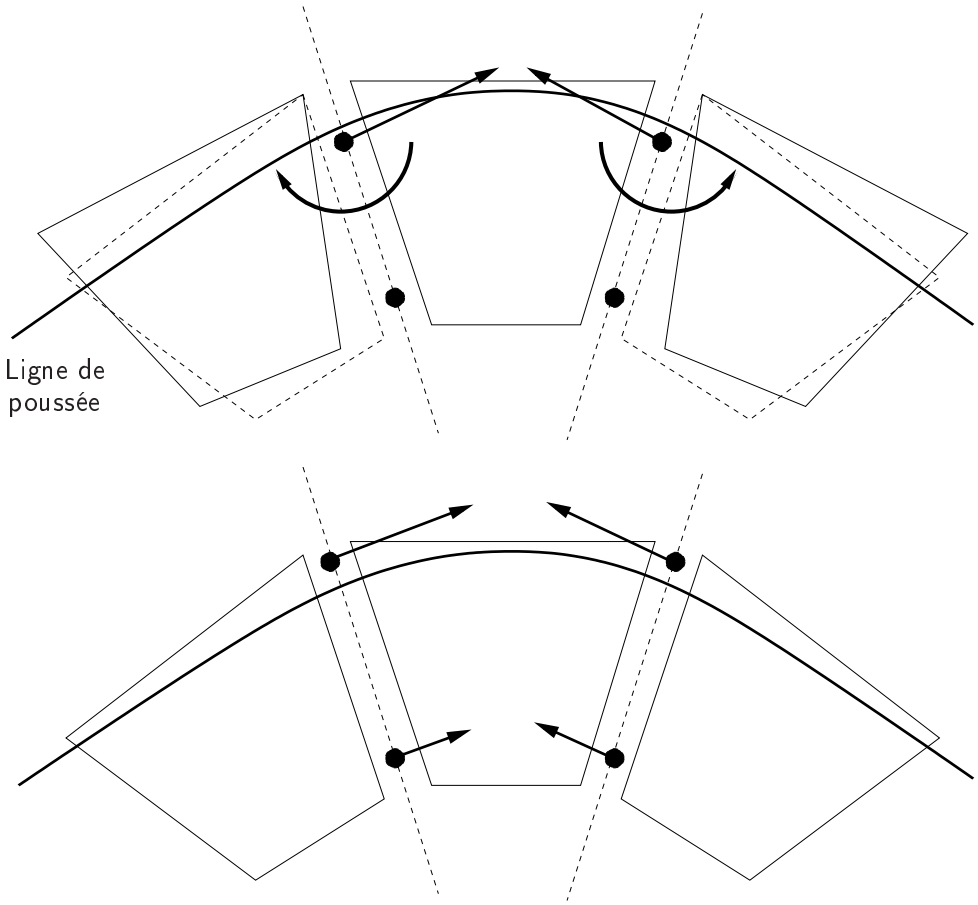


FIGURE 7.10 – *Ligne de poussée et placement des points de contact*

Une manière simple d'opérer le placement des candcidats au contact serait de considérer que les sommets de chaque voussoir sont candidats au contact sur les surfaces antagonistes des voussoirs voisins. Ce type de solution apparaît théoriquement idéale sont parfaitements rigides et non endommageables.

Malheureusement, dans la pratique numérique, il est nécessaire de faire jouer un rôle dissymétrique aux candidats et aux antagonistes (logique maître-exclave). On ne peut calculer correctement les réactions de contact si deux particules, en vis à vis, sont déclarées tour à tour candidat et antagoniste. Nous verrons de plus que dans le cas du joint épais, la démarche qui consiste à déclarer les sommets candidats conduit à des erreurs de détection. Si par contre, on déclare les sommets d'un voussoir comme candidat et comme antagoniste, lune face du bloc vis

à vis, on risque d'omettre des candidats actifs si les voussoirs ne sont pas parfaitement alignés ou si un glissement se produit.

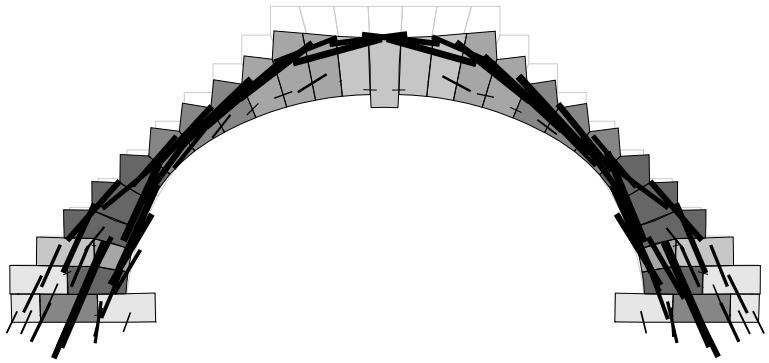
La solution adoptée consiste à placer les points candidats au contact, non plus au sommet, mais en retrait sur l'intérieure d'une face. Ceci permet tout d'abord de jouir d'une marge en cas de glissement relatif des voussoirs et d'éviter les problèmes de double déclaration en vis à vis en conservant un formalisme standard maître esclave.

Une autre solution alternative aurait pu consister à prolonger virtuellement la surface de contact de l'antagoniste, en ayant définit le sommet comme candidat. Nous n'avons pas fait ce choix car il ne va pas dans le sens de la sécurité. En effet, cette opération augmente la surface de contact entre les voussoirs. En réalité, les voussoirs ne sont jamais parfaitement polyédriques. De plus, ils ne résistent pas, de façon illimitée, à des efforts de compression trop grands concentrés sur les angles. Il est courant de constater que les pierres constituants les voûtes et les arcs présentent des éclats aux angles lorsque la structure subit des augmentations de portée (increasing span). Le choix de placer les candidats au contact à l'intérieur des faces semble donc être mieux justifié par ces considérations mécaniques.

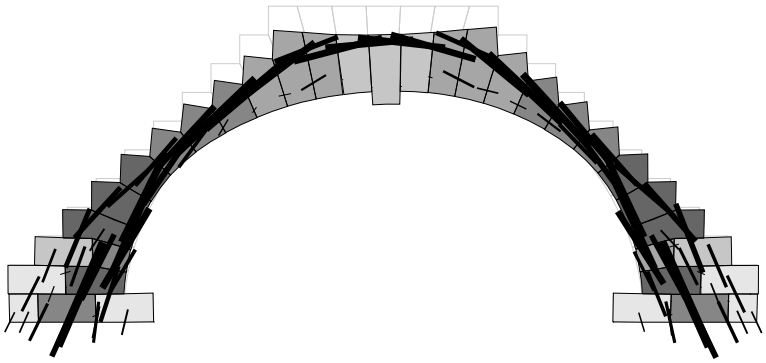
Lorsque que les blocs ne sont pas susceptibles de subir des rotations relatives et que deux de leurs faces en vis à vis sont parallèles, un placement de plusieurs candidats au contact répartis sur toute les faces permet d'obtenir de meilleurs résultats en évitant des concentrations de contraintes trop importantes.

Exemple d'artefacts liés à un mauvais positionnement des points candidats. Afin d'illustrer notre propos, on se propose d'étudier un arc simple composé des voussoirs de l'arche déjà traité. La position des candidats au contact est repéré par ξ l'abscisse du point sur le segment candidat. L'arc est soumis à la gravité et l'on fait varier l'abcisse des candidats au contact sur la clef de l'arc. Les valeurs d'abscisse testées sont les suivantes : $\xi = 0.95, 0.75, 0.50$. On rappelle que chaque joint comporte deux segments portant chacun un candidat. Les résultats de la simulation de cet arc sont illustrés sur la figure 7.11. On peut constater que pour les abscisses $\xi = 0.95$ et $\xi = 0.75$ un état d'équilibre est trouvé et les résultats sur la déformée et les pressions sont similaires(Figures 7.11(a) et 7.11(b)). Il est intéressant de noter que pour certains joints une seule réaction est représentée. Il se trouve alors que le point candidat est très proche de la ligne de poussée.

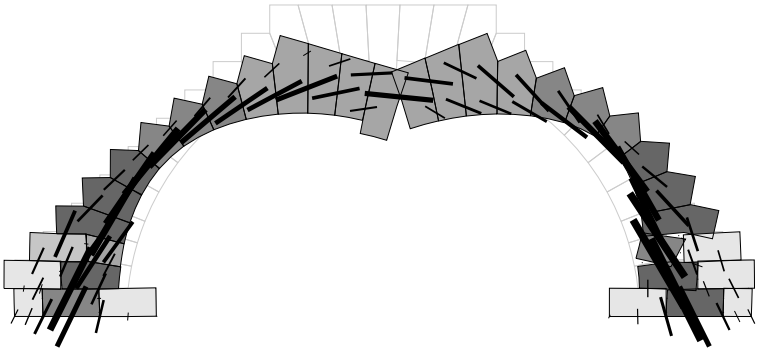
Par contre, pour $\xi = 0.50$, un mécanisme se développe qui conduit à la ruine de l'arc. Sur la figure 7.11(c), on donne le résultat du premier incrément de la simulation ce qui permet de conserver les amplifications de déformées pour pouvoir effectuer une comparaison. La suite du calcul conduit à une ruine qu'il n'est pas raisonnable de calculer par un calcul quasi-statique approché. Il aussi bon de noter que ce mécanisme de ruine résulte du choix des candidats. En effet, en faisant varier les abscisses d'autres candidats, situés par exemple dans les joints où ils sont déjà proches de la ligne de poussée on peut obtenir d'autres mécanismes.



(a) Equilibre pour $\xi = 0.95$, ($\times 30000$)



(b) Equilibre pour $\xi = 0.75$, ($\times 30000$)



(c) Développement d'un mécanisme pour $\xi = 0.50$, ($\times 30000$)

FIGURE 7.11 – *Effet du positionnement des points de contact*

Cas d'un portique soumis à la gravité Dans le même esprit, un portique a été soumis à la gravité. On donne, sur la figure 7.12, les contraintes principales au centre des blocs et la déformée de la structure.

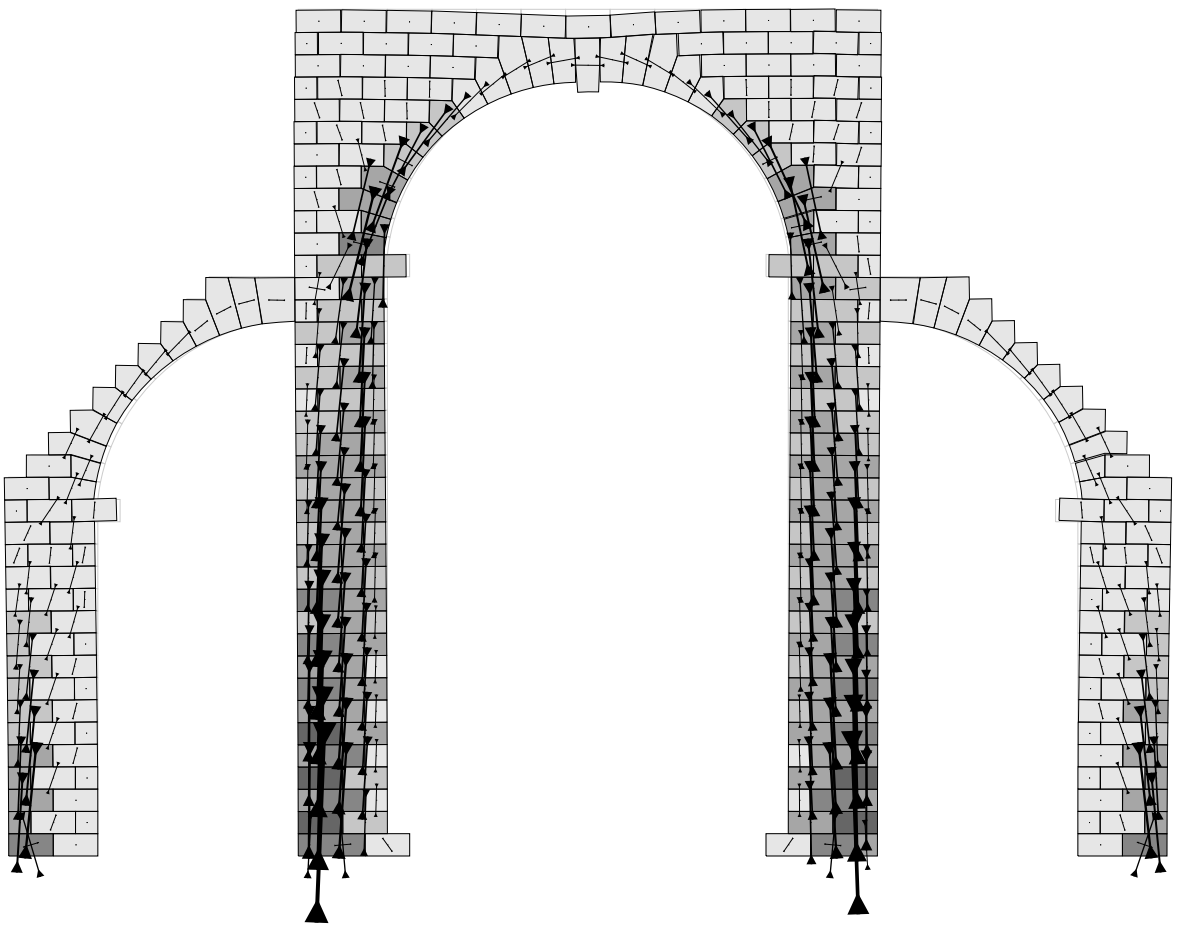


FIGURE 7.12 – *Contraintes principales et déformée d'un portique avec arcs-boutants,* ($\times 300$)

Cet exemple est avant tout pédagogique. En effet, des règles de chaînages rudimentaires n'ont pas été respectées, en particulier pour les arcs-boutants. Cette simulation montre néanmoins l'intérêt mécanique des arcs-boutants. Sans leur présence, les piliers sont cisaillés sous l'effet de la poussée de l'arche. On peut constater la reprise des efforts par les arcs-boutants en examinant leurs déformées. On remarque, en effet, qu'ils ont déportés vers l'extérieur. Ce type de déformées est courant dans les ouvrages monumentaux. On remarque aussi la faiblesse du système de piliers et d'arcs-boutants qui autorise une déformation de l'arche assez conséquente.

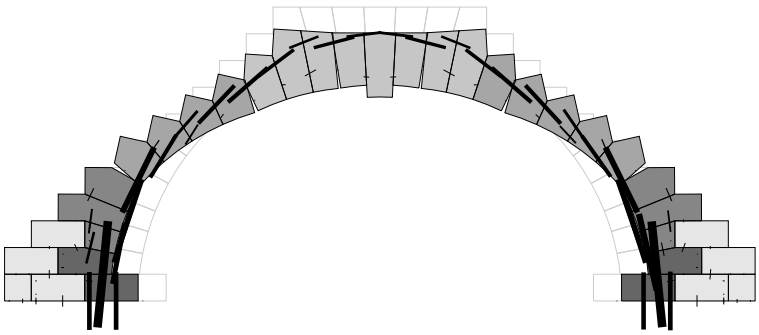
Après avoir étudié quelques exemples de structures soumises au poids propre, on donne dans le paragraphe suivant des exemples de situations pathologiques.

7.2.1.b Etude de cas pathologiques sur des arches

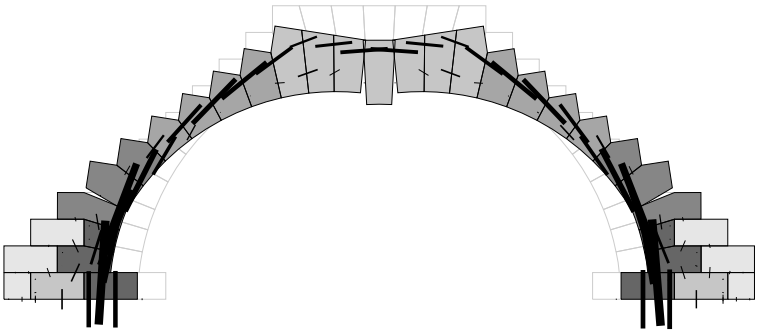
Les simulations qui vont suivre ont pour but de mettre en évidence les capacités de la méthode, et en particulier, l'avantage de son caractère discret dans la prise en compte de phénomène de fissuration. Les sollicitations imposées sont simples. Il s'agit d'augmentation de portée, d'affaissement de support ou encore d'onde de cisaillement.

Essais d'augmentation de portée Les calculs présentés dans ce paragraphe cherchent à simuler les mécanismes de rupture qui se développent dans les arcs et les voûtes lorsque leurs supports ne sont plus en mesure de reprendre la poussée horizontale qu'impose la structure.

Les premières simulations sont effectuées sur l'arc seul. Pour effectuer l'augmentation de portée, le frottement est annulé sur le support. On laisse alors glisser les retombées de l'arc puis on bloque leurs déplacements horizontaux à une valeur donnée pour obtenir l'équilibre. Sur la



(a) Equilibre pour $\xi = 0.95$, ($\times 1000$)



(b) Equilibre pour $\xi = 0.75$, ($\times 1000$)

FIGURE 7.13 – *Fissures provoquées par une augmentation de portée*

figure 7.13, on constate que l'on obtient les mécanismes de rupture caractéristiques de ce type de sollicitations comme elles sont décrites par HEYMAN (1995). Il se produit un jeu d'ouvertures de joint sur l'intrados proche de la clef et deux fissures sur l'extrados proche des assises de lit de

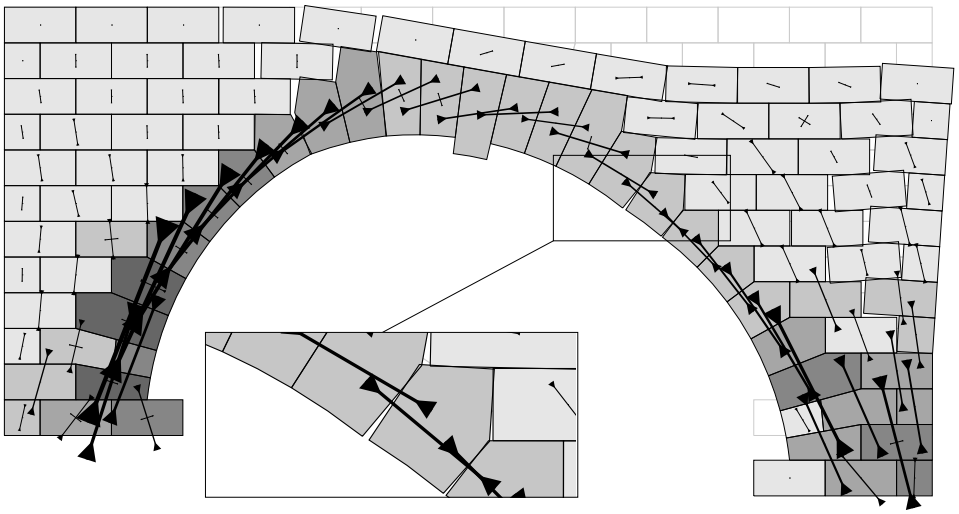


FIGURE 7.14 – *Contraintes après un affaissement de sol,* $-4\,\mathsf{cm}$, $(\times 10)$

l'arc. On compare les déformées obtenues sur les figures 7.13(a) et 7.13(b) pour des placements de points de contact sensiblement différents. A l'équilibre, comme c'est le cas ici, on note peut de différences sur les fissures apparentes. Par contre, les déplacements extrêmes au delà desquels la ruine se produit sont sensiblement différents.

Un calcul d'affaissement de support La première sollicitions représente un affaissement d'un des supports de l'arche. Il a été réalisé en limitant au maximum les effets d'inertie afin de simuler une évolution quasi-statique. Les résultats sont présentés à la figure 7.14.

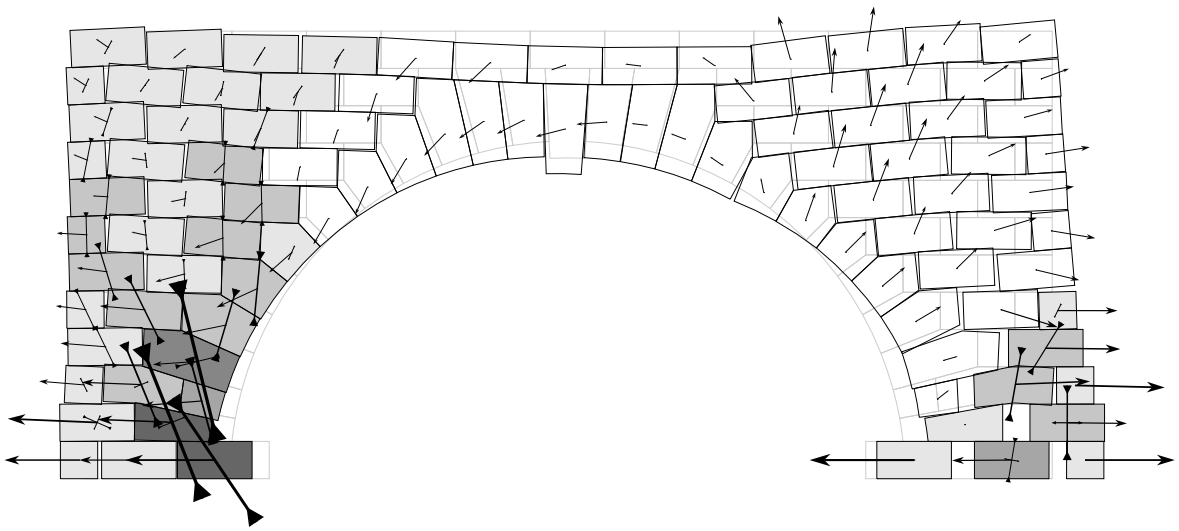
On constate l'ouverture de la maçonnerie à plusieurs endroits. Dans l'arc lui-même, il se produit plusieurs fissures révélatrices du déplacement de la ligne de poussée. La partie, la plus sollicitée en compression, est dont le support est resté fixe. Pour l'autre partie, on constate l'ouverture de nombreux joints verticaux, qui sont souvent observés dans la réalité par de lézardes prenant source dans l'arc.

Un calcul sous séisme Le troisième cas traité est celui du passage d'une onde de cisaillement, sensée simuler un séisme éxagéré. La fréquence de l'onde sinusoïdale utilisée est de $1\,\mathsf{Hz}$ pour une amplitude de $5.10^{-2}\,\mathsf{m}$. Elle déporte, tout d'abord, l'arche vers la droite puis revient vers la gauche, en cisaillant la structure.

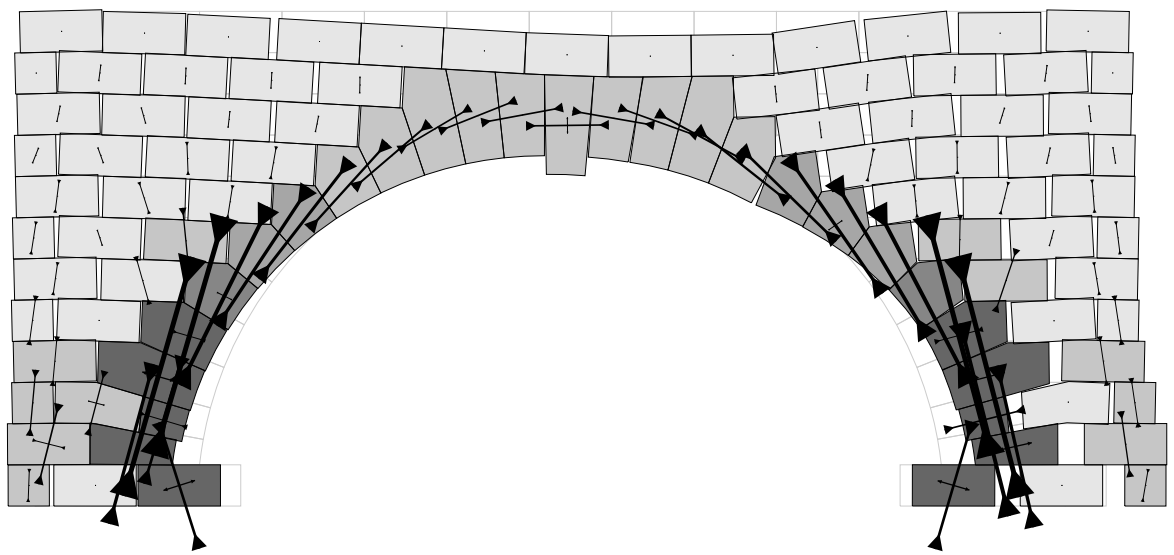
On donne sur la figure 7.15(a) les vitesses et les contraintes pendant le passage de l'onde. Cette représentation se situe au 3/4 de la période de l'onde. La majeure partie des blocs de l'arche ont une vitesse qui est dans la direction de l'onde. Pour la partie gauche de l'arche, le temps de déphasage dû à l'inertie fait que les vitesses sont toujours inversées par rapport à la sollicitation. Comme on peut le constater, ces différences de vitesse au passage de l'onde produisent l'ouverture de joints verticaux. Il est à noter en outre que pendant le passage de l'onde, un grande partie de l'arche est très peu sollicitée. Cela peut conduire à des désordre supplémentaires comme la chute

de blocs du haut de la structure.

Sur la figure 7.15(b), on donne l'état de contraintes après un certain laps de temps où les vitesses sont pratiquement nulles. L'ensemble du mur est rechargé par la gravité. Les joints verticaux sont pour la plupart endommagés.



(a) Vitesses et contraintes pendant la sollicitation



(b) Contraintes après le passage de l'onde

FIGURE 7.15 – *Passage d'une onde de cisaillement,* (×200)

7.2.1.c Cas des dômes en trois dimensions

Les exemples présentés dans le § 7.2.1.a sont en deux dimensions. Dans ce paragraphe, nous allons un exemple de structure tridimensionnelle que a été traitée par la méthodes. Pour être plus précis, il s'agit d'un dôme composé de 264 blocs répartis en 12 assises de 22 blocs. L'appareil est un appareil régulier plein-sur-joints. Pour donner un ordre de grandeur de la structure, la portée du dôme est de 4 m. L'épaisseur du voile est constante et égale à 48 cm. Les joints ont une épaisseur de 30 mm. Les dimensions caractéristique des blocs de l'assise de lit sont de $54\,\mathsf{cm} \times 24\,\mathsf{cm} \times 48\,\mathsf{cm}$.

Chaque bloc est maillé par 8 H8 (éléments isoparamétrique à 8 nœuds). Sur chaque facette, des blocs, 4 point candidats sont positionnés aux coordonnées de référence suivantes :

$$(0.25, 0.25), (0.25, 0.75), (0.75, 0.25), (0.75, 0.75).$$

Le modèle compte un peu plus de 21000 degrés de liberté pour 9000 points de contact.

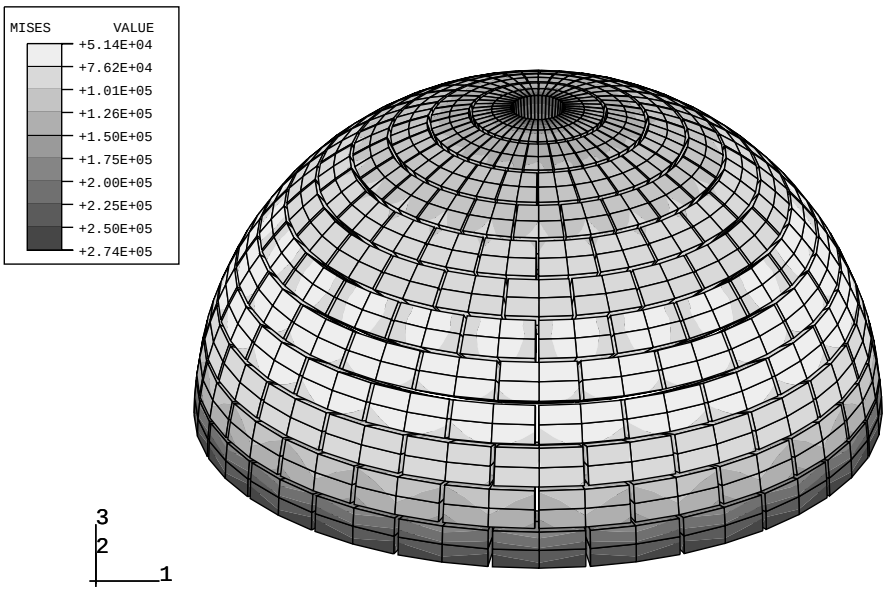
On illustre, sur la figure les contraintes de Von Mises pour une sollicitation sous poids propre. L'ensemble de la structure étant sollicitée soit en compression, cette représentation donne une estimation du niveau de contraintes que subit chaque bloc.

Le calcul de l'équilibre est effectué grâce à l'annulation de la vitesse en fin d'incrément de temps (§ 7.1.2.d). Cette procédure permet de conserver une convergence correcte de l'algorithme de calcul des réactions.

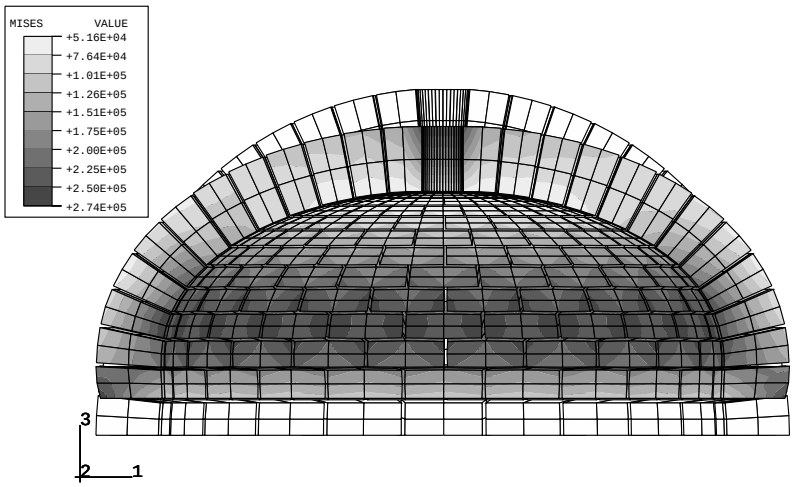
Sur la figure 7.16(b), on donne l'état des contraintes dans une section du dôme. On peut alors remarquer que l'on retrouve un état de contraintes similaires aux arcs en deux dimensions. On note des zones de forte compression sur la partie supérieur et les retombées de l'extrados, ainsi que sur un partie intermédiaire de l'intrados. Ces zones donnent un indication de la répartition de la poussée sous poids propre qui règne dans le dôme.

Pour terminer ce paragraphe, on donne un exemple d'une tour rudimentaire composée d'un tambour cylindrique surmonté du dôme étudiée précédemment. Ce calcul a pour simple objectif d'illustrer la fiabilité des algorithmes. Il compte, en effet, plus de 42000 degré de liberté pour prés de 17000 points de contact.

Outre le fait que le calcul converge correctement, un estimation grossière du temps de calcul de l'équilibre en un peu moins de 100 itérations est de $20H$ CPU sur un Intel Pentium® III 500 Mhz. Bien sur, il y a fort à parier que ce temps de calcul peut être optimisé d'un point de vue informatique. Nous nous sommes pas entrer dans ce jeu qui n'est pas de notre compétence. Une remarque peut toutefois être faite. Ce calcul requiert approximativement 120 Mo de mémoire vive. Les algorithmes présentés sont particulièrement sobres de ce point de vue du fait que l'on tire partie du caractère discret de la structure(voir pour cela le § 6.1).

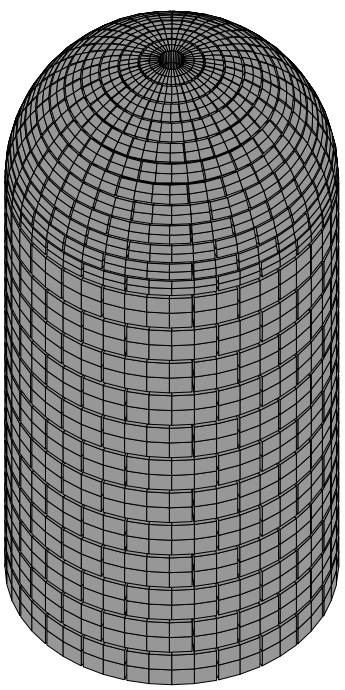


(a) Contraintes de Von Mises

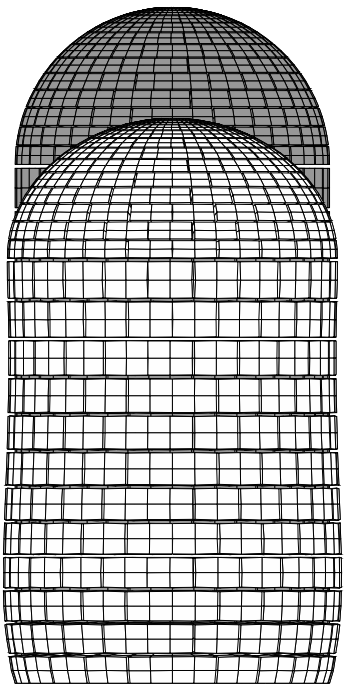


(b) Contraintes de Von Mises dans un plan de coupe ($\times 2.5.10^6$)

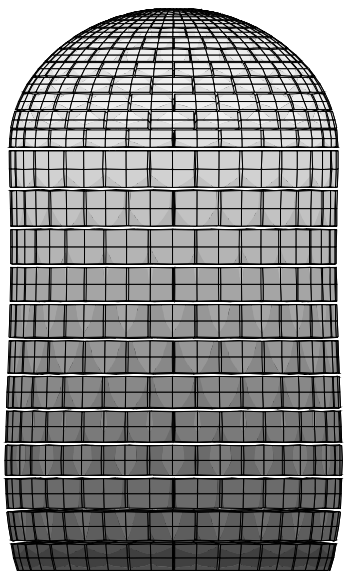
Figure 7.16 – *Dôme circulaire soumis à la gravité*



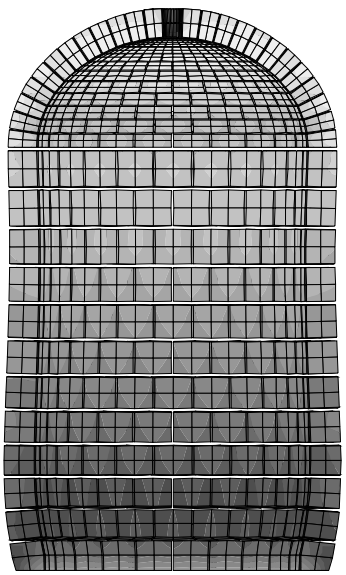
(a) Configuration initiale



(b) Déformée sous gravité



(c) Contraintes de Von Mises



(d) Contraintes de Von Mises dans un plan de coupe

FIGURE 7.17 – *Tour soumise à la gravité* ($\times 2.5.10^6$)

7.2.2 Cas des appareils de joints de mortier cohésif

Dans cette partie, on s'intéresse aux modèles de mortier cohésif qui ont été développés. Les § 7.2.2.a et 7.2.2.b sont consacrés à l'application du modèle d'adhésion fragile sans flexibilité. Ce modèle est particulièrement intéressant lorsque que l'on ne dispose que de peu d'informations sur les caractéristiques mécaniques du mortier. Ensuite, au § 7.2.2.c, on traite l'exemple du cisaillement d'un panneau de maçonnerie en briques,avec le modèle de Frémond-Cangémi.

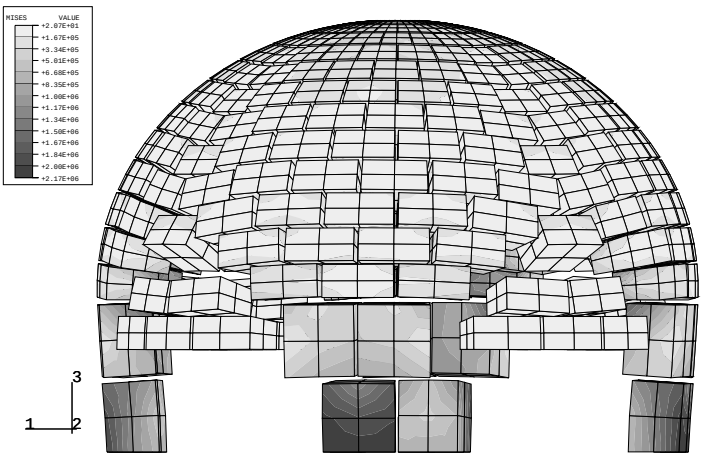
7.2.2.a Un dôme sur piliers

Le dôme qui est utilisé dans cette partie est identique à celui utilisé au 7.2.1.c. Il seulement posé sur 4 socles sensés modéliser des piliers.

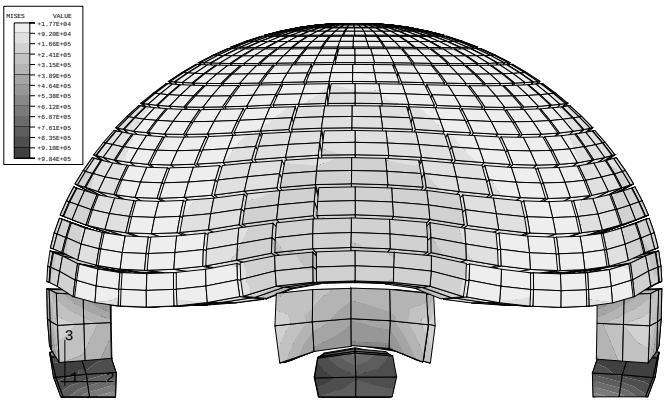
Le comportement d'interface choisi est un modèle adhésif fragile sans flexibilité comme il a été présenté au § 5.3.3. Le seuil de cohésion r_c a été choisi pour être capable de supporter le poids d'une pyramide de 6 blocs. Nous expliquerons ce choix purement arbitraire dans la suite en commentant les résultats des simulations. Le poids de chaque bloc avoisinant les 170 Kg, le seuil de cohésion en contraintes a été choisi à 0.40 MPa, soit pour chacun des poids de contact une réaction de cohésion maximum de 650 N.

On illustre, sur la figure 7.2.2.a, les résultats d'une simulation sans cohésion et d'une simulation en présence de cohésion. Sur la figure 7.18(a), on représente le résultat du premier incrément de calcul, où bien évidemment les blocs entre les piliers chutent sous l'effet de la gravité. Sur la figure 7.18(b), on constate que ces mêmes blocs sont retenus par la cohésion du mortier.

Le choix du seuil de cohésion a été fait pour garantir, en toute sécurité, l'équilibre de la structure. En effet, on peut remarquer que 6 blocs se détachent du dôme. En choisissant une cohésion supérieure au poids de ces blocs, on garantit la tenue de la structure. Bien sur, une cohésion plus faible aurait pu être choisi pour assurer cette tenue.



(a) Modèle d'interface sans cohésion



(b) Modèle d'interface avec cohésion fragile ($\times 2.5.10^6$)

FIGURE 7.18 – *Dôme sur piliers soumis à la gravité*

7.2.2.b Un exemple de fissuration de murs porteurs

Le problème traité dans ce paragraphe a été inspiré d'un problème concret de fissuration de murs porteurs, sous l'action des planchers qu'ils supportent. Plus exactement, les fissures, qui nous intéressent, sont engendrées par la rotation de la partie encastrée du plancher lorsqu'il se déforme sous l'effet de son poids. Le problème a fait le sujet d'une pré-étude réalisée pour un fabricant d'élément de construction en brique, la Société des Planchers de Limoux.

La géométrie, ainsi que le maillage, de la structure envisagée sont présentés sur la figure 7.19. La structure est constituée d'un mur porteur de 7 assises de briques. Les dimensions des briques sont de $20\,\mathsf{cm} \times 30\,\mathsf{cm}$ et leurs masses de $21.5\,\mathsf{Kg}$. Les deux assises supplémentaires, qui sont représentées correspondent aux assises supportant le toit. Le plancher est constitué d'une dalle précontrainte de $6\,\mathsf{cm}$ d'épaisseur et d'une chape de béton de chantier de $14\,\mathsf{cm}$. Les joint sont pleins et ont une épaisseur moyenne de $15\,\mathsf{mm}$.

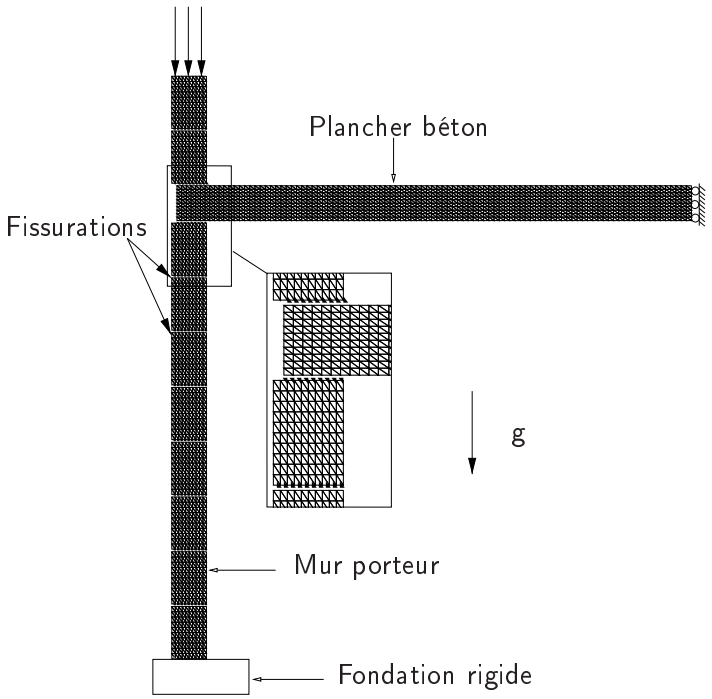


FIGURE 7.19 – *Géométrie initial et maillage*

Le problème est traité en deux dimensions sous l'hypothèse des déformations planes. Seule une moitié de plancher de $2.95\,\mathsf{m}$ de portée est modélisée pour des raisons de symétrie. Les triangles rectangles noirs représentent les points de contact. Une pression supplémentaire peut être imposée sur le mur pour tenir compte du poids du toit.

La géométrie ainsi donnée, il s'agissait de comprendre l'influence d'un désétaiement trop hâtif lors de la construction sur les phénomènes de fissurations, constatés sur les chantiers. Ces phénomènes se produisent à l'extérieur sur les joints de lits juste en dessous du planchers. Le temps de fluage et de durcissement complet du béton de chantier est approximativement de 28

jours. Un désétaiement après cette période entraîne une déformation du plancher uniquement due au comportement élastique du béton. En pratique, les désétaiements sont réalisés entre 7 et 14 jours. Les flèches constatées sont alors beaucoup plus grandes en raison du fluage du béton et de ses caractéristiques élastiques plus faibles.

La première hypothèse, qui a été évoquée, mettait en cause la tenue des mortiers sur les briques et la mauvaise résistance en traction des assemblages mortier/brique. Pour essayer de donner un ordre de valeur de la résistance en traction nécessaire pour empêcher cette fissuration, nous avons effectué une série de simulations avec un modèle cohésif fragile. On donne sur la figure 7.20 trois résultats de calcul pour des valeurs de résistance en traction différentes. Les triangles isocèles représentent les points en compression, les carrés noirs, les points en traction et les carrés blancs les points qui ont rompus.

Sur la figure 7.20(a), le calcul est réalisé avec une valeur de résistance en traction du mortier de 1.5 MPa. Cette valeur de résistance est celle du mortier à 7 jours. On constate que la fissure se produit de part et d'autre du plancher. Le mécanisme constaté sur les chantiers fait état de fissures dans le joint une assise plus bas. Pour réaliser ce type de mécanisme, il faut que la cohésion soit plus forte entre le mortier et la dalle que pour un joint entre briques. Sur la figure 7.20(b), la résistance en traction du joint autour du plancher a été augmentée à 1.6 MPa. On retrouve alors le mécanisme qui observé sur le chantier.

Enfin, sur la figure 7.20(c), on a cherché à estimer la résistance limite pour laquelle aucune fissuration apparente ne se produit à l'extérieur du mur. Cette valeur a été estimée à 2.1 MPa. La valeur de résistance en traction du mortier à 28 jours est de 1.8 MPa. Il semble donc difficile d'empêcher la fissuration des joints en s'appuyant sur les valeur des résistances des mortiers.

Ces indications sont bien sûr à prendre avec précaution pour plusieurs raisons :

- Tout d'abord, les valeurs caractéristiques de résistance sont des valeurs mesurées en laboratoire. Les valeurs de chantier sont souvent bien inférieures. De plus, ce sont des valeurs de résistance de mortier seul. Il paraît important de caractériser les résistances en traction d'assemblage brique/mortier et béton/mortier.

  Sur des chantiers, où la maçonnerie est constituée d'agglomérés, les fissures ne sont pas apparentes. Cette remarque semble corroborer le fait que des hypothèses sur la tenue des interfaces n'ont pas été prise en compte. En particulier, l'effet du pouvoir de rétention des mortiers utilisés et des caractéristiques d'absorption des éléments qui ont une grande influence sur la tenue des assemblages.
- Une grande incertitude sur les flèches du plancher, aussi bien dans le modèle que dans la réalité, nuisent à la qualité des résultats.

  Les hypothèses de déformations planes sont clairement erronées. Le plancher est en effet supporté sur ses quatre cotés. La flèche est donc surestimée. Cette hypothèse a été choisie pour corroborer les études analytiques menées par un bureau de vérification.

  De plus, l'effet du fluage n'a pas été pris en compte explicitement. Seule une déformation élastique du plancher a été calculée pour des caractéristiques élastiques différentes.

  Il est important de noter que le phénomène de rupture est instable. En effet, lorsque

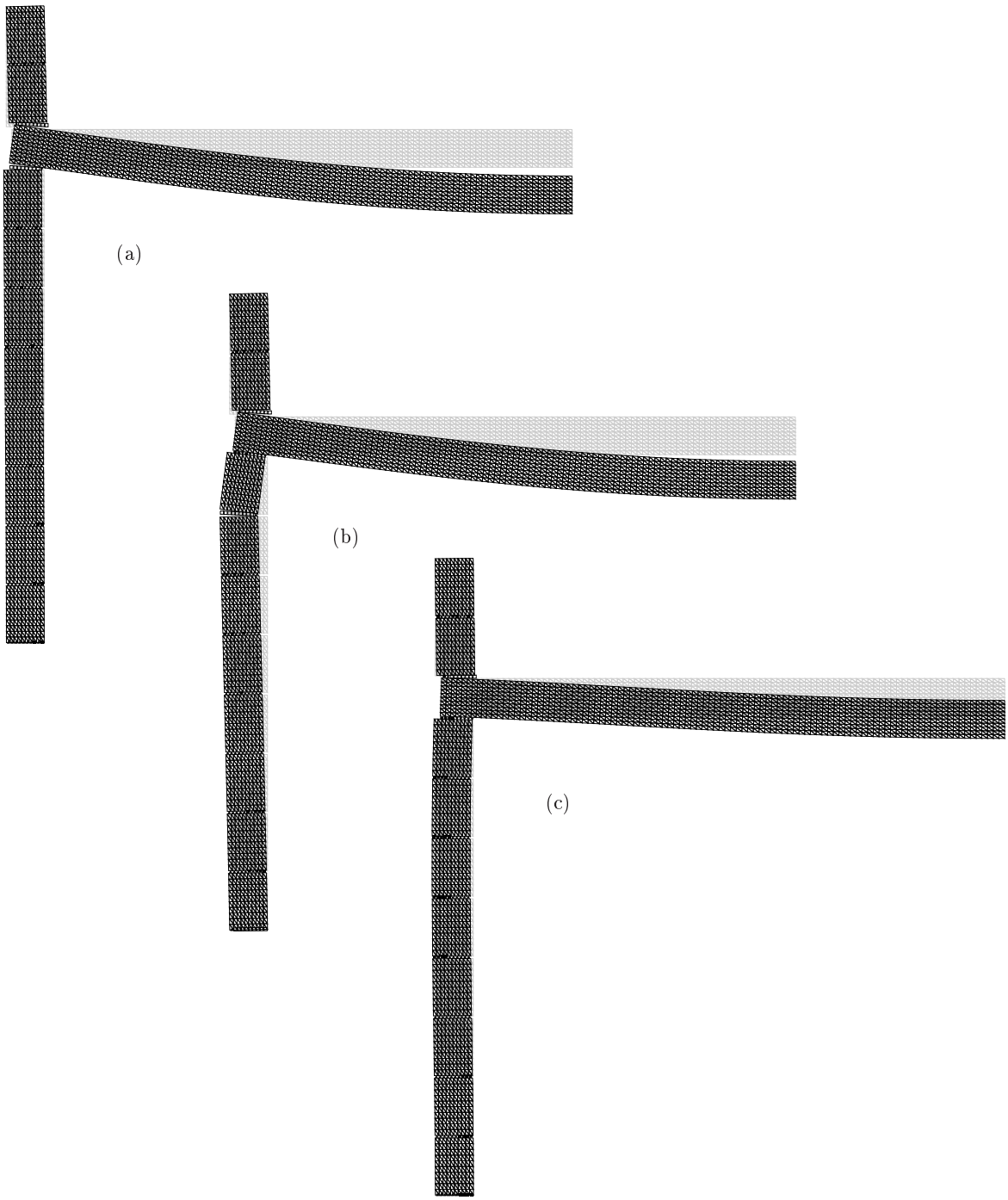


FIGURE 7.20 – *Déformées et faciès de fissures pour différentes valeurs de résistance du mortier. (a) Résistance à la traction de* 1.5 MPa*,(b) Résistance à la traction légèrement supérieure aux joints plancher/brique de* 1.6 MPa *(c) Résistance limite de* 2.1 MPa

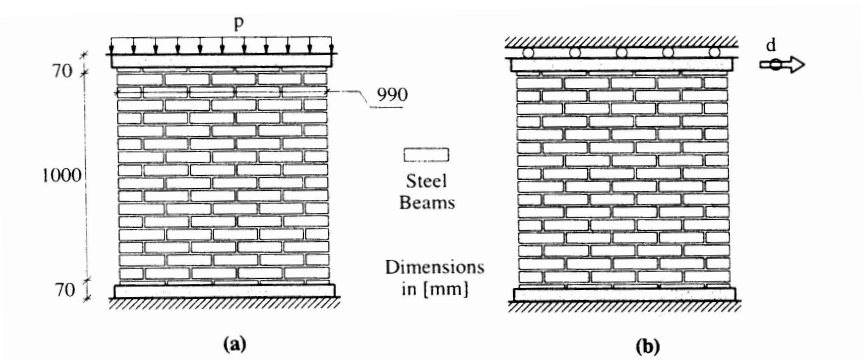


FIG. 10. Loads for Hollow and Solid Shear Walls: (a) Phase 1 —Vertical Loading; (b) Phase 2—Horizontal Loading

FIGURE 7.21 – *Essai de cisaillement sur un panneau, d'après (*LOURENÇO & ROTS*, 1997)*

la fissure se propage, elle relâche les conditions aux limites d'encastrement du plancher provoquant ainsi une flèche supplémentaire.

– Enfin, un paramètre a été négligé qui est la déformation maximale à rupture. En effet, si l'on considère que la rotation du plancher est donnée, il semble que des mortiers plus souples qui auraient une déformation à la rupture plus grande pourrait empêcher les phénomènes de fissuration.

  En règle générale, des systèmes souples, ou de chanfreins, sont utilisés pour découpler les rotations du plancher du mur porteur.

Il est clair que cette étude grossière ne fournit pas une solution technologique au problème. Les hypothèses faites sur le problème réel sont pour la plupart grossièrse. Cependant, la méthode offre tous les outils nécessaires pour des plus amples investigations. En particulier, le caractère tridimensionnel du problème et des lois de comportements et d'interfaces plus évoluées peuvent tout à fait être prises en compte de façon simple.

7.2.2.c Cisaillement d'un panneau

L'exemple traité dans cette partie est un essai standard de cisaillement sur un panneau de maçonnerie. Les valeurs caractéristiques de la géométrie, des caractéristiques des matériaux et des sollicitations appliquées sont tirées de (LOURENÇO & ROTS, 1997). Les expériences ont été réalisées par RAIJMAKERS & VERMELFOORT (1992) et VERMELFOORT *et al.* (1993).

Le panneau est constitué de 18 assises de briques pleines dont les dimensions sont les suivantes : $204\,\text{mm} \times 98\,\text{mm} \times 50\,\text{mm}$. Ces briques sont maçonnées dans un appareil régulier plein-sur-joint. L'épaisseur du joint est de $10\,\text{mm}$. Le panneau est tout d'abord soumis à une pression verticale puis à partir de cet état, mis en cisaillement à déplacement imposé.

Le premier type de panneau, représenté sur la figure 7.21, est un mur plein. Il est désigné sur les figures par « Solid wall ». Le second type est un panneau qui est affaibli par une baie. Celui-ci est désigné par « Hollow wall ». On reporte sur les figures 7.22 et 7.23 les faciès de

rupture expérimentaux obtenus pour différentes pressions verticales.

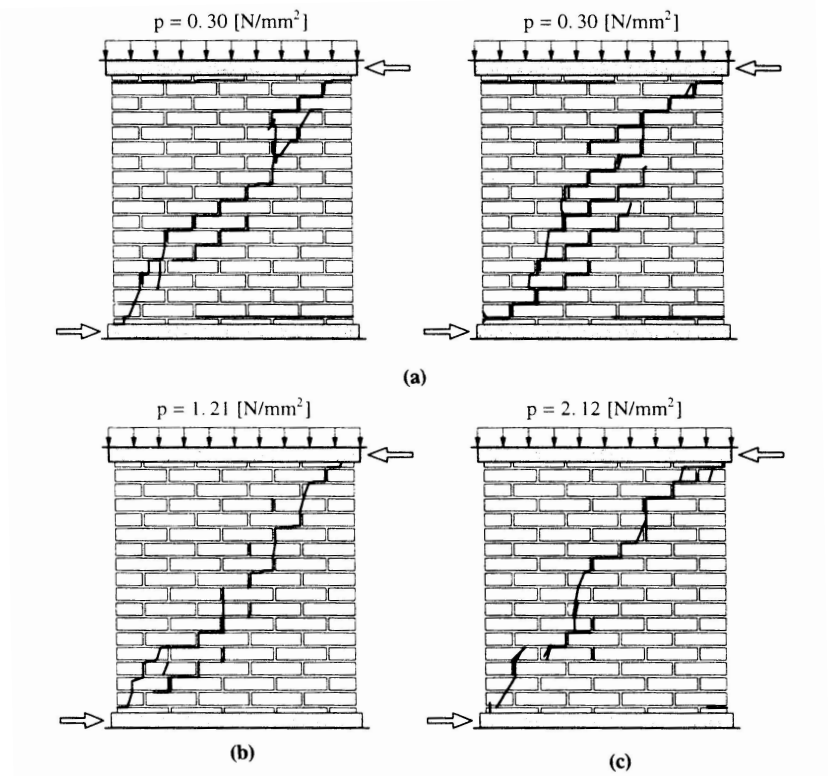


FIG. 15. Experimental Failure Patterns for Solid Walls: (a) *P* = 30 kN; (b) *P* = 120 kN; (c) *P* = 210 kN

FIGURE 7.22 – *Faciès de rupture expérimentaux pour les panneaux pleins, issus initialement de* RAIJMAKERS & VERMELFOORT *(1992) et* VERMELFOORT *et al. (1993).*

Nous avons choisi de modéliser cet essai au moyen du modèle de cohésion de FRÉMOND-CANGÉMI. Les briques sont considérées comme élastiques homogènes bien que l'on puisse constater sur les résultats expérimentaux que certaines briques se fissurent. Nous verrons plus tard comment cela peut être pris en compte. Les caractéristiques des briques sont les suivantes :

$$E = 16700\,\mathsf{MPa}, \quad \nu = 0.15 \quad , \rho = 2500\,\mathsf{Kg.\,m}^{-3} \tag{7.2.1}$$

En ce qui concerne les joints, les paramètres caractéristiques des interfaces ont été identifiées sur les essais de cisaillement d'assemblage simple. Ces identifications conduisent à

$$c_{\mathrm{N}} = 0.5.10^{10}\,\mathsf{N.m}^{-3}, \quad c_{\mathrm{N}} = 0.3.10^{10}\,\mathsf{N.m}^{-3}, \quad w = 0.18.10^{2}\mathsf{N.m}^{-1}, \quad w = 0.75 \tag{7.2.2}$$

Sur la figure 7.24, on donne la discrétisation spatiale qui a été réalisée. Les interfaces ont été matérialisé pour permettre un visualisation des valeurs de β.

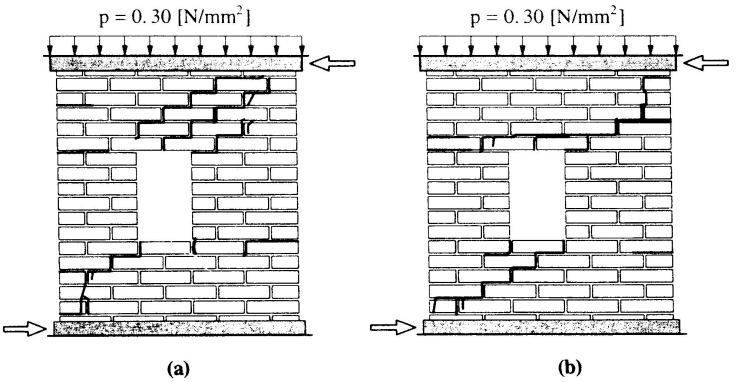


FIG. 11. Experimental Failure Patterns for Hollow Walls

FIGURE 7.23 – *Faciès de rupture expérimentaux pour les panneaux avec baie, issus initialement de* RAIJMAKERS & VERMELFOORT *(1992) et* VERMELFOORT *et al. (1993).*

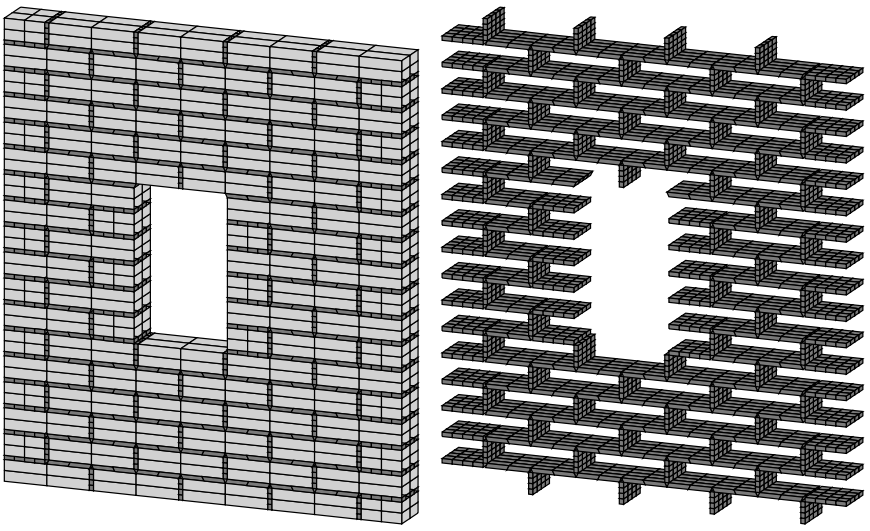


FIGURE 7.24 – *Maillage tridimensionnel du problème*

7.3 Applications à l'étude d'édifices monumentaux

Dans cette partie, nous allons faire état des tentatives qui ont été faites de modélisations mécaniques d'édifices réels. Le § 7.3.1 mettra en évidence les difficultés majeures que l'on rencontre lorsque l'on décode d'étudier les édifices historiques. Nous insisterons sur la nécessité d'une approche trans-disciplinaire de ces systèmes complexes. Sans cet effort, il semble que toute modélisation soit tronquée, voire aveugle. Dans ce premier paragraphe nous essaierons de donner des justifications à ce propos.

Ensuite, nous préciserons aux § 7.3.2 et 7.3.2, deux des difficultés techniques qui ont été surmontées. Il s'agit de l'acquisition des données géométriques et matérielles, et de la détection des contact associée à la discrétisation des interfaces.

Pour finir cette partie, nous présenterons deux applications qui ont été réalisées sur des monuments historiques maçonnés. Le premier de ces monuments est le célèbre Palais des Papes en Avignon dont une tour a fourni un premier terrain d'investigation. Le second exemple, plus modeste de part sa taille, est une priorale de la Drôme provençale, la priorale Notre-Dame d'Aleyrac.

7.3.1 Difficultés des modélisations - Nécessité de l'interdisciplinarité

Un monument historique apparaît clairement comme un système complexe mettant en jeu de nombreuses disciplines. Ces disciplines appartenant à la fois aux sciences humaines — Histoire, Architecture, Archéologie du bâti — et aux sciences dites « dures » — Physique, Chimie, Mécanique —, peuvent sembler, *a priori* orthogonales dans une approche de modélisation des monuments historiques. Nous allons essayer de donner quelques exemples des interactions utiles, parfois indispensables entre ces disciplines.

Pour commencer donnons deux exemples de ce qu'apportent l'Architecture et l'Archéologie du bâti à une approche mécanique d'un monument.

7.3.1.a Illustration de l'intérêt de l'Architecture pour une approche mécanique des monuments.

L'une des difficultés dans l'appréhension d'un monument historique d'un point de vue mécanique est le découpage en organes mécaniquement autonomes. En effet, dans la plupart des cas, il apparaît difficile de réaliser une étude précise du monument complet. D'une part, cela est souvent inutile, d'autre part, le coût d'une description de l'ensemble du monument est souvent prohibitif.

La notion d'entité architecturale apporte au mécanicien une information importante de ce point de vue. Cette notion s'inscrit dans une démarche d'analyse scientifique d'un monument.

L'édifice étudié est, tout d'abord, vu comme un assemblage d'objets architecturaux en interrelations. Cela repose sur l'élaboration d'un corpus architectural renvoyant à une typologie donnée, ou si l'on préfère, un style architectural donné. Le souci qui préside à l'organisation du corpus

est d'isoler des entités univoques (par leur fonction dans l'édifice, par leur morphologie) et de factoriser les propriétés communes à un ensemble de concepts. Le modèle architecturale du bâti comprend l'ensemble de ces entités (vocabulaire) et les relations qui les connectent (grammaire).

Nous le voyons, l'entité architecturale est définie et légitimée de manière heuristique par un ensemble de propriétés identiques pour la plupart des bâtiments d'un style donné. Afin de préciser cette notion, souvent évidente pour un architecte, on peut considérer une colonne romaine, qui est généralement constituée des trois entités bien distinctes : une base, un tambour et un chapiteau.

Il se trouve qu'une propriété qui définit souvent une entité soit dérivée de considérations mécaniques. Considérons pour cela l'exemple de la définition de l'arc qui est faite dans le dictionnaire du vocabulaire architectural de Pérouse de Montclos (1988) :

« Organe clavé porté par deux points d'appui et présentant un intrados formé d'un seul rouleau de voussoirs. Le tracé de l'arc est donné par l'intrados. L'arc est, par définition, appareillé ; il n'est donc nécessaire de le préciser que pour opposer l'arc clavé à l'arc monolithique. L'arc monolithique n'est un arc que par le tracé, il travaille comme le linteau ; l'arc appareillé transmet à ses appuis des forces obliques... »(Pérouse de Montclos, 1988, Chap. IX. Le couvrement, p. 126)

Cette description, en entités architecturales, suggère des éléments mécaniques autonomes, souvent pertinents. Les relations, qui les connectent aux autres entités, peuvent alors être traduites en conditions aux limites. Elle peut être utilisée, par exemple, pour considérer certaines structures comme homogènes et d'autres comme discrètes. Nous verrons, dans la suite, que cette connaissance, *a priori*, est prise en compte dans les outils d'acquisition et de représentation des modèles de monuments.

7.3.1.b Illustration de l'intérêt de l'Archéologie du bâti pour une approche mécanique des monuments.

Le monument apparaît au mécanicien à un instant donné comme déformé et chargé. Cette déformation est le fruit de l'histoire de la construction et du chargement, ainsi que des modifications des propriétés mécaniques au cours du temps. L'ensemble de ces déformations est souvent difficile à analyser et ceci pour plusieurs raisons. Les premières difficultés sont d'ordre mécanique — détermination des conditions aux limites et du chargement, identification des matériaux et de leurs comportements,... Ensuite, il s'agit de comprendre l'origine des déformations et de proposer des hypothèses de comportement mécanique.

Pour surmonter ces difficultés, l'Archéologie du bâti apporte de nombreuses et précieuses informations souvent indispensables. Ces informations ont, pour la plupart, trait à l'histoire de la construction et de ses techniques. Les archéologues, par l'étude du bâti et des textes, sont par exemple, capables de justifier le choix des entités architecturales employées, la provenance des matériauxet la présence de chaînages métalliques.

Pour illustrer l'intérêt de telles informations, donnons quelques exemples. Il est courant que les déformations constatées sur un édifice ne soit pas d'origine mécanique mais dues à des défauts

de construction ou à des déviations par rapport aux plans originaux. Seule l'étude des techniques de construction peut révéler ce type d'information. De même, il est souvent difficile d'accéder à la structure interne des entités architecturales. Pour les maçonneries fourrées par exemple, la connaissance des techniques de construction permet de prévoir où sont placées les boutisses, quelle est l'épaisseur des parements,...

Enfin, la connaissance des conditions socio-économiques dans lesquelles la construction a été effectuée apporte souvent des informations intéressantes pour le mécanicien. La fourniture des blocs et leur provenance en sont un exemple. Pour anecdote, citons l'exemple des maçonneries du sixième niveau de la Tour Saint Laurent du Palais des Papes. Le maître d'œuvre, à la fois concepteur et constructeur, a diminué les coûts de construction en remplaçant les boutisses par des carreaux dont les dimensions en parement sont identiques. Après plus de 5 siècles, on peut constater des déformations impressionnantes de ces murs qui sont le fruit de la désolidarisation des parements de la fourrure.

On ne fera pas un liste exhaustive des toutes les interactions fructueuses qui peuvent et qui doivent être menées entre ces disciplines. Rappelons toutefois que les modélisation mécaniques peuvent apporter aussi des indications pour les archéologue et les architectes. En particulier pour confirmer ou infirmer certaines conjectures archéologiques et architecturales, des simulations mécaniques peuvent se révéler intéressantes.

7.3.1.c Le cadre d'une collaboration transdisciplinaire

Afin de mener les études à la fois mécanique, architecturale et archéologique, trois laboratoires ont collaboré. Les études archéologiques ont été effectuées par Andreas Hartmann-Virnich et Stéphan Garrec du Laboratoire d'Archéologie Médiévale Méditerranéenne à Aix-en-Provence (LAMM, umr cnrs 6572). Pour ce qui est des études mécaniques, elles ont été prises en charge par Michel Jean et moi-même, au sein du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille (LMA, upr cnrs 7051). Enfin, comme liant et comme organe moteur des projets, les études architecturales ont été effectués au sein du Groupe d'Applications des Méthodes Scientifiques à l'Architecture et à l'Urbanisme de l'école d'architecture de Marseille (GAMSAU/MAP umr cnrs 694) par Pierre Drap, Jean-Yves Blaise et Michel Florenzano.

Le projet de recherche MOMA (Mesure Optique et Modèles en Architecture) développé au sein du GAMSAU à été la plate-forme de ces diverses collaborations. Sans entrer dans les détails, ce projet s'attache à formaliser et à développer des représentations du patrimoine architectural. Il ne s'agit pas seulement de construire des représentations graphiques d'un édifice, mais aussi de formaliser l'ensemble des connaissances de l'Architecte dans une représentation abstraite de l'édifice. Pour cela, il s'appuie sur les techniques de développement orientées objet particulièrement adaptée à la représentation de la connaissance. Ce processus de modélisation du patrimoine doit donc intégrer trois caractéristiques importantes : l'information, la représentation et la conservation.

Le projet peut être décrit en trois phases :

1. *Formalisation, processus de mesure et renseignement du modèle architectural*
2. *Représentation et développement de modèles archéologiques*
3. *Développement d'une interface réseau indépendante de la plate-forme des résultats des recherches*

Les travaux de formalisation du corpus architectural ont débuté avec le projet PAROS qui a fait l'objet de thèses de P. Drap et J.-Y. Blaise. Pour plus de détails, on renvoie aux travaux suivants : (Drap, 1997 ; Florenzano *et al.*, 1997b,a).

Le processus de mesure est réalisé grâce à l'Arpenteur (ARchitectural PhotogrammEtric Network Tool for EdUcation and Research, http://www.arpenteur.net) développé en grande partie par Pierre Drap. Cet outil bénéficie des techniques standards de photogrammétrie, auxquelles de techniques de segmentation d'images et de corrélation ont été ajoutées. La grande originalité de ce travail est que les processus et les techniques de mesure sont intimement associés, et en interaction permanente, avec le modèle architectural. Une mesure, « plus intelligente » se fait grâce à une connaissance, *a priori*, du modèle architectural et donc de l'objet mesuré. Cette interaction permet en retour d'informer le modèle en instanciant des entités dans une base de données objets. L'ensemble des ces outils a été développé en Java et peut fonctionner au moyan d'un navigateur réseau. Pour plus de détails sur ces outils, on renvoie aux travaux suivants : (Drap & Grussenmeyer, 2000a,b).

Afin de prendre en compte les informations des disciplines associées que sont l'Archéologie et la Mécanique, de nouveaux développements ont été réalisés. Ces développements ont permis d'intégrer des renseignements d'un niveau inférieur à l'entité architecturale. Des informations qui n'intéressent pas au premier chef l'Architecte dans un analyse globale de l'édifice telle qu'une description des blocs, les signes lapidaires, les matériaux constitutifs des blocs ont été ajoutées à la base de données. Ils peuvent ainsi être renseigné lors de la mesure. L'interaction entre les entités est particulièrement fructueuse comme nous le verrons dans les exemples qui vont suivre. De même, les développements ont été prévus pour intégrer les résultats des calculs mécaniques et en donner une représentation pour les autre disciplines. Pour plus de détails sur ces travaux spécifiques, on renvoie aux travaux suivants : (Acary *et al.*, 1999 ; Drap *et al.*, 2000).

Avant de présenter les deux études de cas sur des édifices, on va donner quelques précisions supplémentaires sur deux difficultés majeures qui sont à surmonter si l'on souhaite effectuer une modélisation discrète des structures maçonnées. Il s'agit de l'acquisition des données géométriques et la détection des contact et des interfaces.

7.3.2 Acquisition des données & stéréo-photogrammétrie numérique

Une modélisation discrète des structures composées de blocs nécessite la connaissance de la géométrie de chaque élément de la maçonnerie. Un relevé pierre à pierre traditionnel, capable fournir ces informations est une opération coûteuse et difficile. Pour donner une idée de la difficulté des ces travaux, on renvoie aux recherches réalisées par Hartmann-Virnich (1998), qui a

effectué avec une équipe d'archéologue, le relevé extérieur complet de la Tour Saint Laurent du Palais des Papes. De plus, ces relevés ne sont pas directement exploitables puisque qu'ils ne donnent qu'une information bidimensionnelle sur la géométrie et l positionnement des blocs et pour la plupart sur un support écrit.

La photogrammétrie architecturale numérique propose une aide précieuse pour ce type de relevé. En effet, dans bons nombres de cas, le relevé indirecte sur une photographie évite l'emploi d'échafaudages et rend moins pénible les conditions de travail. De plus, elle fournit des résultats tridimensionnels sous forme numérique, qui sont plus facilement exploitables pour des traitements informatiques. Par contre, les techniques de photogrammétrie standard ne donnent des informations uniquement, que sur ce qui est vu. Pour un élément standard de la maçonnerie, elle ne fournit donc que la position et la géométrie de la face visible du bloc.

Les techniques qui ont été développées au GAMSAU donnent une information plus complète sur la structure interne des entités architecturales qui permet une extrapolation des résultats du simple relevé. En effet, les informations d'ordre architectural et archéoloqique, disponibles au moment du relevé peuvent être utilisées par le restituteur. Donnons deux exemples qui seront illustrés dans les études de cas qui vont suivre.

Le cas de la maçonnerie fourrée est un premier exemple où le relevé extérieur des deux parements n'est pas suffisant à une modélisation mécanique discrète. Pour aboutir à une structure tridimensionnelle complète, il est nécessaire de connaître la profondeur de chaque bloc, afin de pouvoir extruder la face relevé. Les travaux des archéologues fournissent ce type d'information en examinant les textes anciens relatifs aux commandes de fourniture et en exécutant des fouilles sur l'édifice. Pour déterminer, la direction d'extrusion on fait appel à une propriété de l'entité qui fournit le plan moyen du mur et ainsi que le vecteur d'extrusion.

De même, le relevé usuel d'un arc ne fournit que les faces des blocs appartenant à l'intrados et aux cotés de l'arc. Ces informations géométriques relevées, associées à la connaissance, *a priori* de l'entité « arc », permettent de reconstruire l'ensemble des blocs la constituant. On donnera un exemple lors de l'étude de la priorale d'Aleyrac.

Ces méthodes apportent un crédit supplémentaire à l'application et au développement de modélisations micromécaniques discrètes en surmontant la difficulté de l'obtention de la géométrie. De plus, des méthodes standards de maillage ont été développées pour fournir directement une structure maillée suite au relevé.

7.3.3 Détection des contacts et discrétisation des interfaces

7.3.3.a Position du problème

Dans les structures académiques traitées au § 7.2, la détection des contacts était guidée par la donnée *a priori*, des candidats au contact et la régularité des géométries employées. Pour les édifices réels, les méthodes utilisées fournissent la géométrie d'une collection de blocs. Il reste à préciser les relations entre les blocs.

Pour déterminer ces relations, il est nécessaire de connaître qu'elles sont les paires de blocs

qui sont en interaction par l'intermédiaire du joint. La distance qu'introduit le joint dans cette interaction entre blocs est un écueil majeur. En effet, il ne suffit plus d'attendre que l'interstice s'annule pour calculer un action mécanique entre les blocs. La première étape de la détection des contacts est donc la constitution de cette liste de paires de blocs en relation. Il semble judicieux de noter que les joints épais ne sont pas forcément synonymes de joints de mortier. Suite à une restitution photogrammétrique, même les joints vifs ont une épaisseur, qui provient de la mesure en façade.

Cette première étape de tri des blocs en relation est la moins évidente à automatiser sans information supplémentaire sur les grandeurs caractéristiques de l'appareil. Si l'appareil est régulier et que l'épaisseur du joint est connue, on peut effectuer un premier tri grossier grâce à des boites englobantes de chaque bloc dont les dimensions sont augmentées de l'épaisseur moyenne du joint.

Une fois encore, la connaissance de l'entité traitée est importante. En effet, la construction des boites englobantes en recherchant les extrema des coordonnées des sommet des blocs peut être beaucoup plus efficace en utilisant des systèmes de coordonnées pertinents. Pour un mur en appareil régulier, les directions des joints de lits et joints montants doit être favorisées. Pour un arc ou pour une voûte, un système de coordonnées cylindriques semble être plus indiqué. Dans le même esprit, de nombreuses informations qui peuvent être acquises au moment du relevé peuvent être importantes comme la présence des trous dans la maçonnerie ou encore la répartition en assises qui permettent d'effectuer un tri plus efficace.

Une fois que cette liste de paire de blocs est dressée, deux étapes supplémentaires doivent être mises en œuvre. Il faut, tout d'abord, être capable de déterminer quelles sont les parties de l'interface de chaque blocs qui sont en relation. Enfin, pour terminer la description des interactions entre ces blocs, il est nécessaire de discrétiser les interfaces afin de répartir et de calculer les efforts qu'exercent les blocs entre eux par l'intermédiaire du joint. On propose, dans les paragraphes suivants, des méthodes heuristiques qui tentent de répondre à ces questions.

7.3.3.b Détermination des surfaces en interaction à travers le joint

Si on admet qu'un premier tri a été effectué fournissant une liste de paires de blocs en interaction, il faut arriver à déterminer la partie de l'interface des chaque bloc qui est en contact avec le joint les séparant. Cette étape revient à déterminer la frontière Γ_c où le contact peut avoir lieu.

La première hypothèse qui a été faite suppose que, parmi les points les plus proches de chaque bloc, il existe au moins un couple de points proximaux qui appartient à ces surfaces. Afin de donner de donner une première indication sur les surfaces recherchées, nous avons choisi de commencer par déterminer les points les plus proches de chaque bloc, comme il l'est fait, de façon standard, pour un contact unilatéral classique.

Ensuite, nous avons fait l'hypothèse supplémentaire que les blocs sont des polyèdres convexes. Cette hypothèse est rarement vérifiée car les faces des blocs mesurés sont rarement planes et les

blocs ne sont que rarement convexes. Le problème est contourné en triangularisant les faces et en subdivisant les blocs non convexes en parties convexes. Il est à noter que pour une détection classique du contact, ce découpage en parties convexes n'enlève rien à la généralité du problème.

Détection des particules proximales pour deux polyèdres convexes Il existe de nombreux algorithmes efficaces de recherche de points proximaux entre des polyèdres convexes. Deux démarches distinctes sont généralement employées.

Le premier type de méthodes, qualifié par son acronyme anglais « Simplex-based Algorithm (SBA) », considère l'enveloppe convexe des points de chaque bloc. Il cherche ensuite le simplexe défini par les sommets obtenus par la différence de MINKOWSKI des deux polyèdres, qui englobe ou qui le plus proche de zéro.

L'autre approche, « Feature-based Algorithm (FBA) », tient compte de la structure particulière des polyèdres qui n'est pas réduite à la description d'un ensemble de points. En effet, les notions d'arêtes et de faces peuvent aider à la détection des points proximaux. Les sommets, les arêtes et les faces d'un polyèdre sont qualifiés de manière générique de « caractéristiques » du polyèdre.

Ces deux méthodes sont efficaces, mais nous avons choisie la seconde approche pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elle est capable de tenir compte de légère pénétration entre les blocs. De plus, notre objectif final est l'obtention de surfaces d'interactions entre les blocs. Cet objectif peut être rempli en effectuant un postraitement supplémentaire sur les caractéristiques des blocs et en tirant partie de la structure objet conférée aux polyèdres.

Nous ne décrirons pas en détail l'algorithme utilisé en renvoyant aux travaux de leurs créateurs (LIN, 1993 ; MIRTICH, 1996, 1998). Dans les grandes lignes, ces algorithmes sont basés sur les régions de VORONOÏ des caractéristique des polyèdres. En cherchant, pour un couple de caractéristiques du polyèdre, leur appartenance réciproque aux cellules de VORONOÏ relatives à chaque entité du couple, ces algorithmes déterminent les caractéristiques proximales de chaque bloc.

Application à la détermination des surfaces Une partie du travail exposé, dans ce paragraphe, a été effectué par YANN VERVIALLE (1999) au cours de son stage de deuxième année d'école d'ingénieur au sein du LMA ancadré par l'auteur. Il a consisté à comprendre la structure des algorithmes FBA et d'opérer certaines modifications pour tenter de déterminer les surfaces en interaction.

Etant donnée une épaisseur moyenne de joint, connu *a priori*, ou calculée de manière statistique, l'idée est de partir des caractéristiques proximales de chaque bloc et de déterminer les zones adjacentes en contact avec le joint de mortier.

Les procédures mises en place ne sont pas totalement infaillibles car il difficile de définir des critères rigoureux de sélection des caractéristiques adjacentes. Il s'agit le plus souvent de tests sur la géométrie des caractéristiques inspirés par des considérations heuristiques. Cependant, cette méthode a permis de traiter les cas concrets qui vont être présentés dans la suite.

7.3.3.c Discrétisation des interfaces - Applications aux joints épais

Nous considérons maintenant que nous connaissons les parties des frontières en contact avec le joint, pour chaque bloc en relation. En quelque sorte, la position géométrique du joint a été matérialisée. Il reste à introduire les grandeurs cinématiques et sthéniques relatives à cette liaison. On entre donc dans la phase de discrétisation des interfaces, à savoir le positionnement des point de contact où les grandeurs mécaniques mécaniques seront évaluées.

Nous avons vu, au § 7.2, que ce positionnement était très important. Il conditionne en effet la qualité des résultats. Dans le cas du joint épais, il en est de même mais avec des difficultés supplémentaires. Il faut arriver à établir des relations entre des surface qui ne sont pas parallèles.

Le cadre dissymétrique de la description du contact candidat-antagoniste implique le choix d'un normale et donc d'une direction de glissement qui appartient à l'un des objets (antagoniste pour notre part). Lorsqu'un contact unilatéral usuel est modélisé, le repère local est commun à l'instant du contact et il n'y a pas de distinction à faire entre un éventuel repère candidat et repère antagoniste. Dans le cas d'un joint épais la situation est quelque peu différente. Il y a calcul d'un effort non nul alors que les surfaces ne coïncident pas au point de contact.

Lorsque ces surfaces ne sont pas parallèles, les opérations de projection sont rendues difficiles et le choix d'une normale est compliqué. Pour surmonter ces difficultés, nous avons choisi d'utiliser la notion de plan séparateur ou plan commun. Schématiquement, ce plan sépare l'espace entre les blocs et maximise la distance qui le sépare des sommets des interfaces considérées. Ce plan permet de donner une direction de moyenne glissement ainsi qu'une normale de projection. Il permet de plus de distribuer les points de contact sur le joint épais.

Détermination d'un plan séparateur Le plan séparateur est approché en trois étapes de la manière suivante :

1. Il est placé initialement comme le plan médiateur du segment constitué par les centroïdes des blocs.
2. On lui applique ensuite une translation de façon à maximiser la distance entre des sommets les plus proches de chaque bloc et ce plan.
3. Enfin, on applique une rotation de ce plan de façon à maximiser la distance avec tous les sommets des interfaces. Cette opération est réalisée par dichotomie jusqu'à convergence. L'emploi d'un algorithme d'optimisation plus sophistiqué n'est pas apparu nécessaire.

Cette opération est réalisée pour les blocs convexes. Pour les autres blocs, chaque relation entre les sous-parties convexes des blocs définit un nouveau plan séparateur.

Discrétisation de l'interface Une fois ce plan séparateur connu, deux choix peuvent être envisagés. Le premier consiste à calculer explicitement l'intersection des polygones, projections des interfaces sur le plan moyen. Sur cette intersection, il reste ensuite à positionner les points de contact au mieux. Bien que des algorithmes performants soient disponibles pour traiter ce problème d'intersection, nous avons préféré faire un autre choix et opérer de manière discrète.

La technique utilisée s'appuie sur un grille de points de contact potentiels placés sur le plan séparateur. On projette orthogonalement chaque point de la grille sur les plans constituants les interfaces de chaque bloc. On sélectionne ainsi un ensemble de points qui possèdent une projection appartenant aux deux interfaces. Cet ensemble fournit en quelque sorte une image discrète de l'intersection des surfaces.

Pour éviter les relations cinématiques surabondantes, générées par un discrétisation redeondante, on effectue ensuite une sélection parmi cet ensemble de points. Cette sélection conserve un nombre de point donné de façon a repartir au mieux les efforts. En pratique, on sélectionne le barycentre de cet ensemble de points et les points extrema qui constituent la frontière de l'intersection discrète.

La précision du positionnement des blocs est donc paramétrée par le raffinement de la grille employée et par le nombre de points sélectionnés. Cette précision est vérifiée *a posteriori* lors des premières itérations de calcul. Cette opération est illustrée de manière schématique sur la figure 7.25.

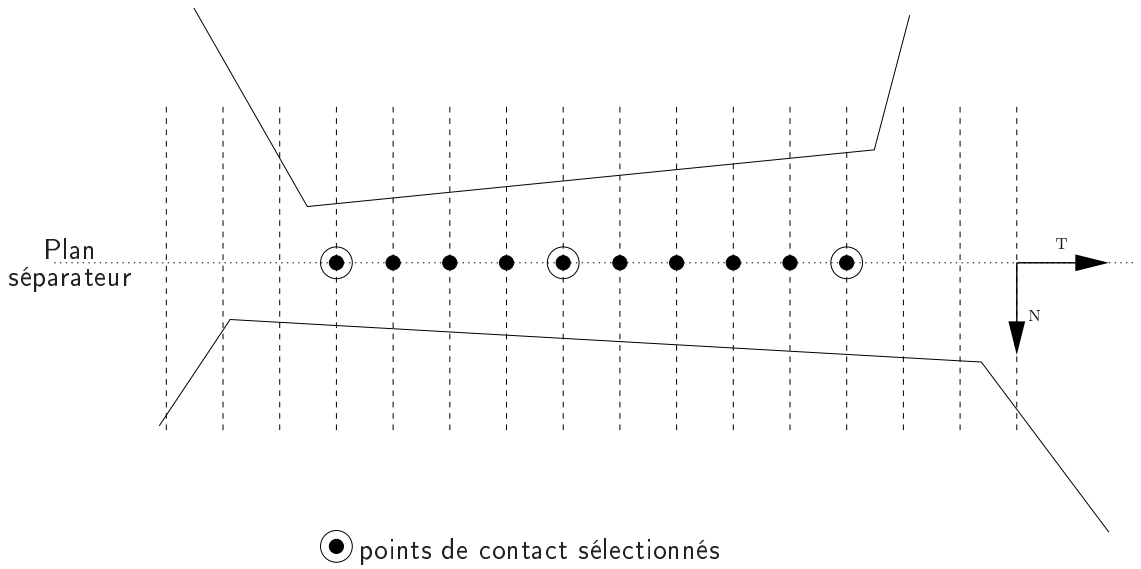


FIGURE 7.25 – *Définition du plan séparateur et sélection des points de contact*

7.3.3.d Commentaires

Paramètres de la méthode Si l'on excepte la première phase de tri grossier des relations entre les blocs, qui doit se faire au cas par cas, l'ensemble de la méthode de détermination des points de contact est piloté par trois paramètres. Le premier est géométrique ; il s'agit de l'épaisseur moyenne des joints de mortier. Cette information se révèle indispensable si l'on veut déterminer les interfaces en regard. Il peut être déterminé, *a priori*, grâce à des méthodes statistiques, en considérant la distribution des distances entre tous les blocs d'une structure. Les autres paramètres sont d'ordre mécanique ; il s'agit du raffinement de la grille et du nombre de points

de contact a conserver. Ces paramètres peuvent être ramenés à des valeurs par unité de surface, mais il n'en reste pas moins qu'il n'existe pas de règle *a priori* pour les déterminer.

Fiabilité de la méthode La fiabilité de la méthode est bien sûr toute relative. Elle fonctionne bien pour les cas traités dans la partie suivante mais rien ne nous garantit qu'elle ne faillira pas sur des structures plus complexes. De plus, un gros travail d'optimisation des développements est à réaliser si l'on souhaite pouvoir calculer à chaque pas de temps une nouvelle détection des contacts. Pour le moment, la méthode est utilisée avant le calcul en phase de pré-traitement.

Autres solutions alternatives. Devant les difficultés qu'entraînent la présence d'un joint épais, d'autres solutions ont été envisagées pour appréhender le problème différemment. En effet l'épaisseur du joint n'est pas un paramètre déterminant dans les lois d'interfaces proposées. Il modifie seulement légèrement la cinématique du contact. L'idée est donc de supprimer l'épaisseur du joint en modifiant la géométrie initiale des blocs.

La première voie envisagée s'appuyait sur la construction d'approximations polyédriques des cellules de VORONOÏ de chaque bloc. Cette construction s'avère particulièrement pertinente en fournissant une décomposition de l'espace en cellules polyédriques contenant un bloc et la partie du joint la plus proche du bloc. Malheureusement, les techniques de décomposition sont efficaces uniquement en deux dimensions. En trois dimensions, il n'existe pas à notre connaissance d'algorithmes pour réaliser ce traitement.

La deuxième solution alternative est inspirée des techniques de segmentation d'images. Les techniques usuelles généralement en deux dimensions s'appuient sur une carte de niveau de gris et les techniques de ligne de partage des eaux. Une des particularités des méthodes de segmentation sont qu'elle peuvent s'appuyer sur des contours polyédriques. Cette solution n'a pa été mise en œuvre mais offrirait une solution alternative élégante au problème.

7.3.4 Une première tentative : Le Palais des Papes

7.3.4.a Présentation de l'étude

Le choix de réaliser une étude mécanique sur des structures issues du Palais des Papes ne s'est pas imposé de lui-même. Dans les faits, il s'est inscrit dans le cadre d'un projet collectif de recherche dont les objectifs initiaux étaient l'étude archéologique et architecturale du monument.

Toutefois, le Palais des Papes est un sujet d'étude très intéressant capable de motiver les différentes disciplines engagées dans le projet. Son envergure et la diversité de sa construction, l'attrait qu'il suscite et les nombreux documents qui lui sont consacrés, en font un sujet de recherche consistant. Rappelons qu'il est tout de même le plus grand édifice médiéval d'Europe.

Notre étude s'est concentrée sur la Tour Saint Laurent dont un étude archéologique et architecturale de façon plus poussée (Hartmann-Virnich, 1998, 1999). Elle a été érigée entre 1353 et 1355 pour sa structure principale et terminée en 1358. Elle est en appui sur la Grande Chapelle de l'aile sud du Palais Neuf (voir figure 7.26). La rapidité de sa construction est peut être justifiée par le souci de fournir, à la plus grande voûte de la chapelle, une structure servant à reprendre sa poussée. Elle est faite de trois murs fourrés dans lesquels prennent place six niveaux voûtés pour une hauteur totale de 47 m. Les vouges ont en berceau pour les salles de moindre importance alors que pour les salles supérieures, des vouges d'arêtes quadripartites sont utilisées (voir figure 7.27(b))(Gagnière, 1965). On donne sur la figure 7.27(a) des vues extérieures de la tour qui ont servis à la restitution.

Le projet initial d'étude mécanique s'articulait autour de deux objectifs :

- Tester les communications et les procédures de la restitution photogrammétrique au calcul de structure sur un petite partie de la Tour.
- Aider à l'expertise d'hypothèses archéologiques. Deux problématiques particulières intéressaient les archéologues. La première concernait la reprise des efforts de la Grande Chapelle par la tour. La seconde concernait les tassements relatifs des assises en parement par rapport aux chaînages d'angle des culées. Pour cela, l'étude du niveau trois avait été envisagée en considérant le reste de la structure soit somme homogène et simplement pesante soit prise en compte par des condition aux limites. Cette étude ambitieuse n'a pas être réalisée de façon complète faute de moyens.

On illustre, dans le paragraphe suivant, une tentative de remplir le premier objectif de l'étude. L'analyse s'est portée sur une baie du niveau trois de la face ouest de la Tour. Cette baie est représentée sur la figure 7.27(c)

8. Annexe

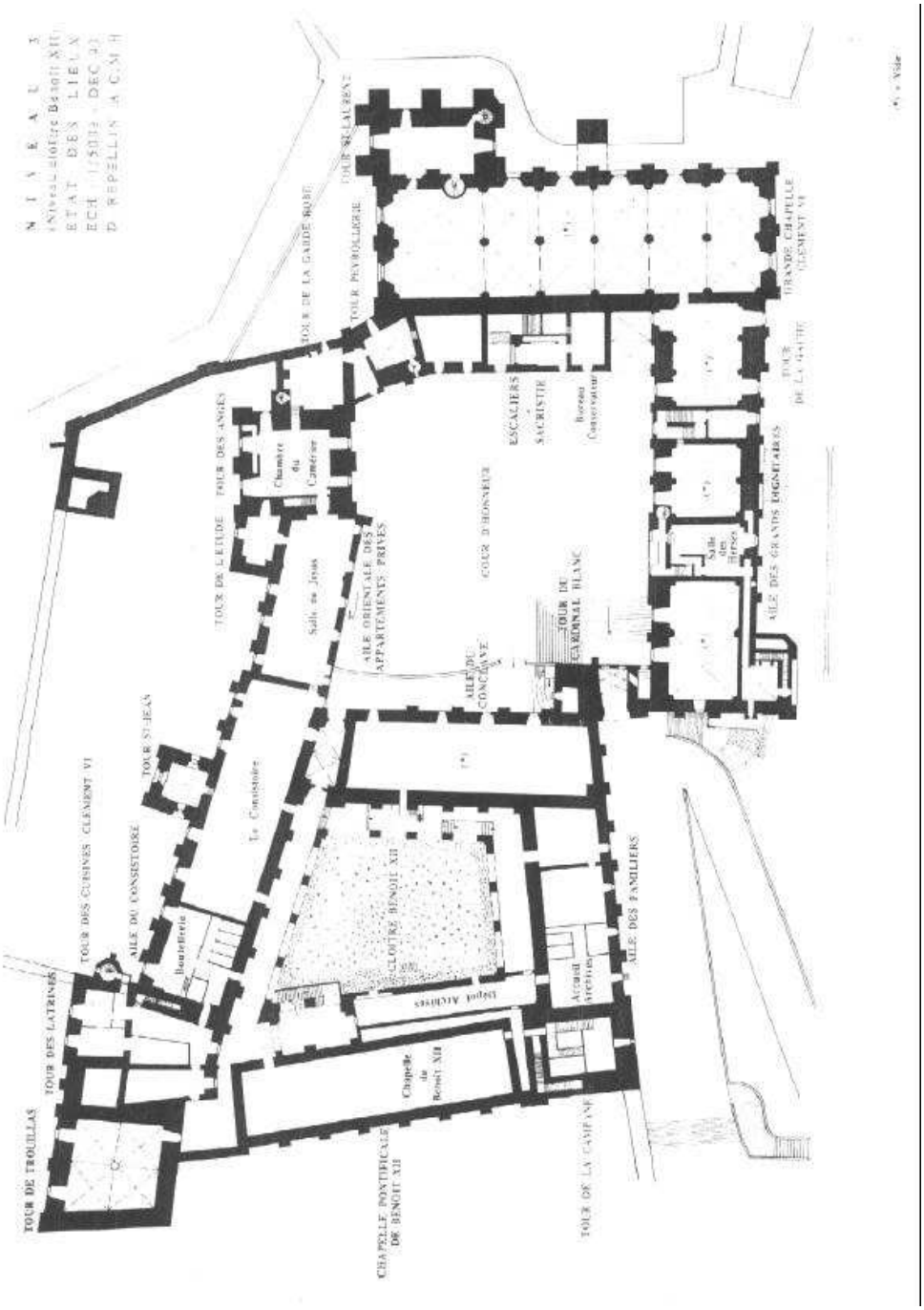
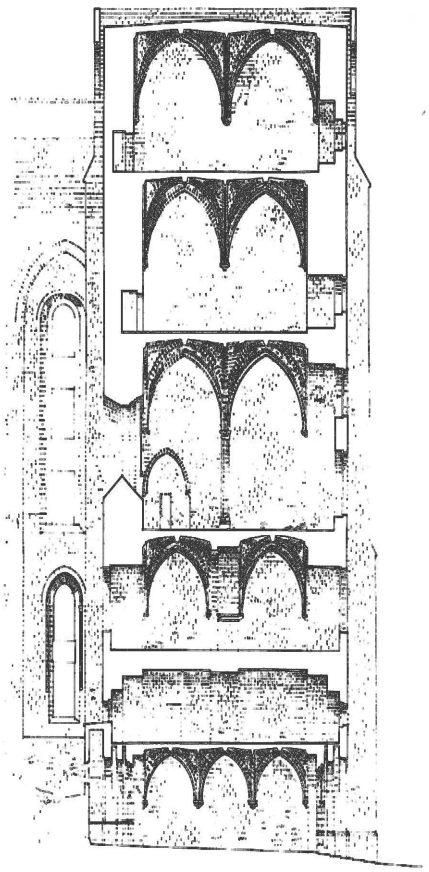


FIGURE 7.26 – *Plan général du Palais des Papes, d'après* D. REPPELIN A.C.M.H.

(a) Vues extérieures Sud-est, photographies Pierre Drap



(b) Coupe, d'après M.H. Nodet

(c) Détail de la baie, face Ouest

Figure 7.27 – *La Tour Saint Laurent*

7.3.4.b De la restitution photogrammétrique au calcul de structure

On illustre, sur la figure 7.28, la restitution photogrammétrique du parement contenant la baie. On peut remarquer sur la figure de droite que le modèle a été renseigné par des informations supplémentaires qui ont permis de déterminer l'épaisseur du parement et la profondeur des boutisses.

Sur les figures de gauche, on donne un exemple de mesure d'entités architecturales sans connaissance *a priori* des propriétés géométriques des objets mesurés. Le relevé des culées se réduit alors à un ensemble de lignes ou de points dont il est difficile d'extraire une information.

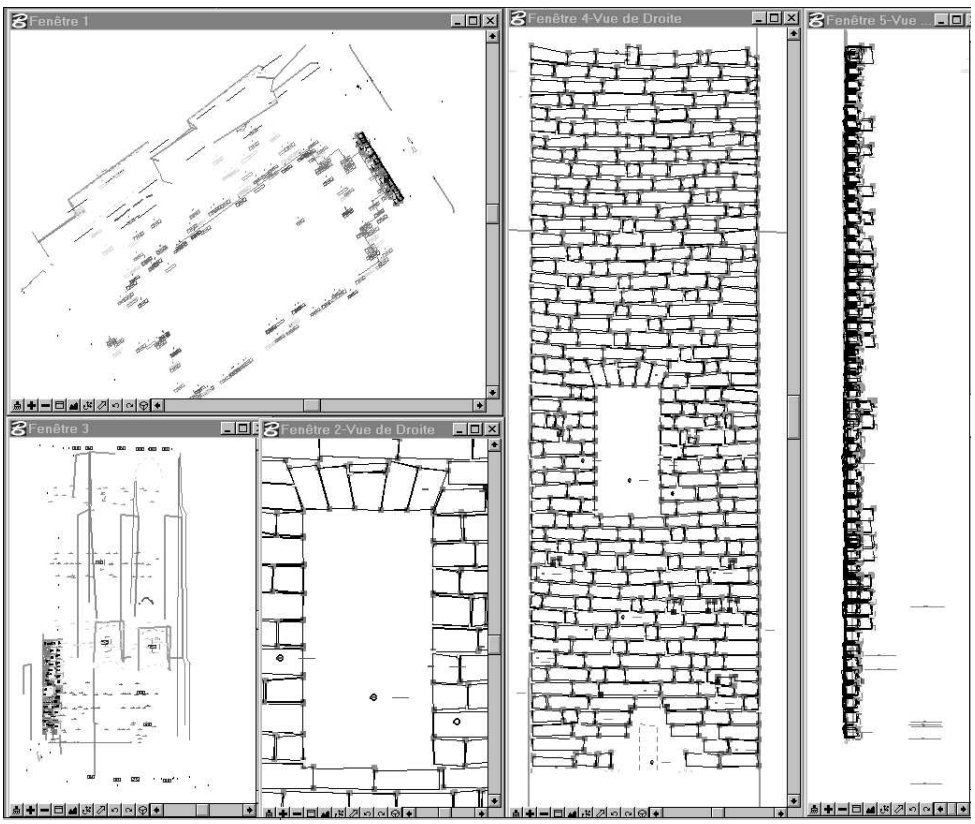


FIGURE 7.28 – *Restitution d'un parement*

A partir de ce relevé les opérations de maillage et de détection des contacts ont été opérées. Les résultats sont illustrés sur la figure 7.29. Dans cet exemple, tout les blocs sont hexaédriques. Leur maillage a été effectué par un découpage élémentaire (figures 7.29(a) et 7.29(b)). En ce qui concerne la détection des contacts, ce simple parement nous a posé beaucoup de problèmes. L'épaisseur irrégulière des joints, la présence des trous de boulins, la dispersion de la taille de blocs ont été autant d'éléments qui nous ont conduits à utiliser les méthodes assez lourdes que nous avons présentées au § 7.3.3. Sans présumer des résultats sur d'autres structures, elle ont permis dans ce cas d'obtenir d'obtenir une détection des contacts suffisante pour réaliser un chargement simple sous poids propre.

Le calcul, qui a été fait suite à cette restitution n'a certes pas d'intérêt mécanique intrinsèque,

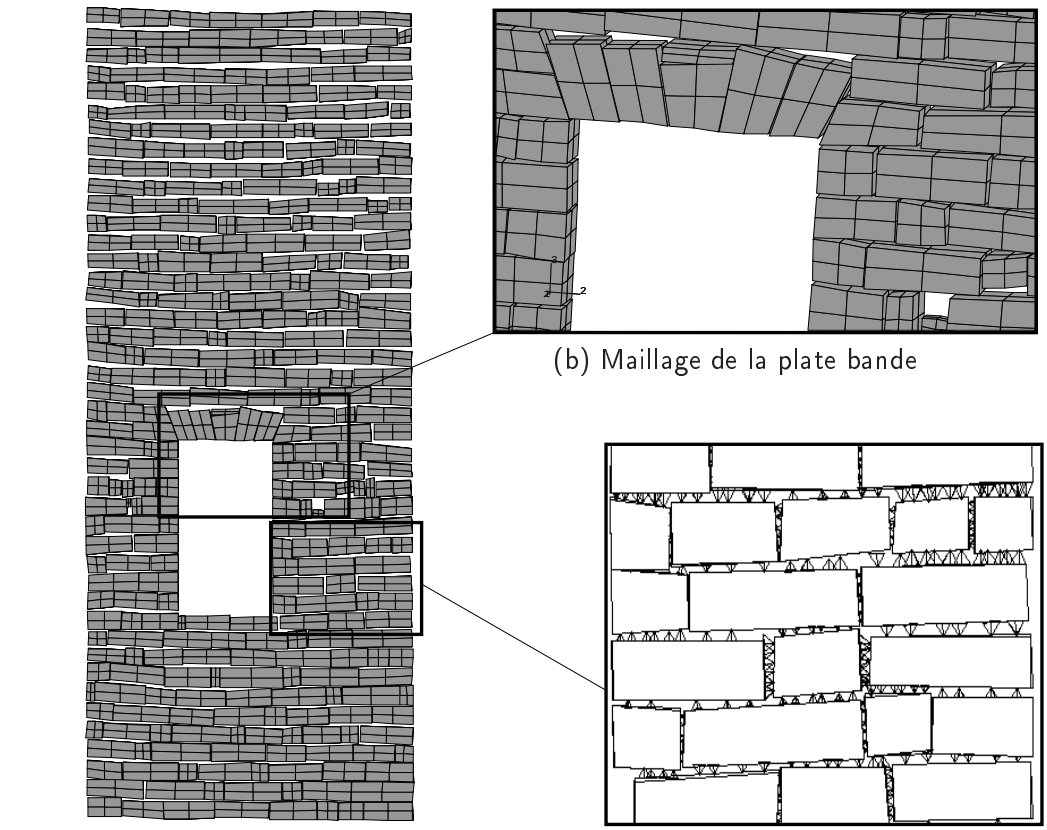


FIGURE 7.29 – *Illustrations des opérations de maillage et de détection des contacts*

mais il montre que l'ensemble de la démarche, de la photogrammétrie au calcul de structures fonctionne. Ceci est très important quand l'on sait combien il est difficile d'intervenir sur un monument. On donne à titre d'illustration les contraintes de VON MISES dans le parement à la figure 7.30.

Afin de donner plus de justifications à une étude mécanique d'un édifice monumental, un nouveau projet est né sur un édifice plus modeste où la mise en œuvre des outils nécessitent un investissement humain moins important. Le paragraphe suivant lui est consacré.

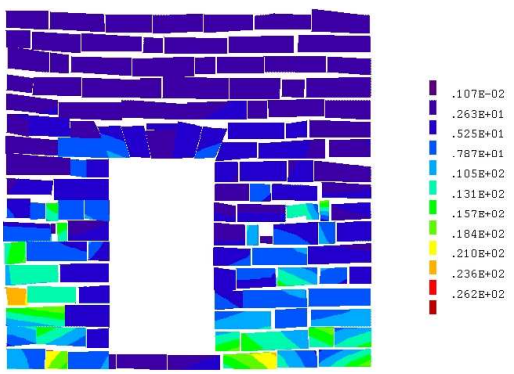


FIGURE 7.30 – *Contraintes de* VON MISES *dans le parement et la plate-bande*

7.3.5 Le projet d'étude de la priorale Notre-Dame d'Aleyrac

7.3.5.a Présentation du projet et campagne photographique.

L'idée de ce projet est née de la volonté d'étudier un édifice plus modeste pour essayer de réduire les phases de mise en œuvre simplement techniques nécessitant un investissement humain trop important. Le monument recherché devait, à la fois, être intéressant d'un point de vue mécanique, architectural et archéologique tout en conservant une certaine simplicité. Notre choix, guidé par les conseils de Andreas Hartmann-Virnich s'est arrêté sur la Priorale Notre Dame D'aleyrac dont les seuls vestiges visibles aujourd'hui se limitent aux ruines de son église romane. La présentation sommaire qui va suivre est largement inspirée des études archéologiques qui ont été effectuées (Hartmann-Virnich, 1996).

L'église est un édifice roman provençal datée approximativement du XIIème siècle. Elle comporte une nef longue de cinq travées se terminant par une abside principale et accompagnée de part et d'autres dans la quatrième travée d'un bras de transept (voir figure 7.31).

Deux structures parmi l'ensemble architectural ont été choisies pour mener l'étude. La première est un voûtement de cul-de-four en arc-de-cloître qui constitue la partie intérieure du couvrement de l'abside principale. La seconde structure, qui a attiré notre attention, est l'arc principal du transept Nord. Ces deux structures sont représentées sur la vue 7.32. Outre l'intérêt mécanique intrinsèque qu'elles comportent, les multiples spoliations qu'a subies l'église, rendent ces entités faiblement dépendantes du reste de la structure. En effet, elles ne sont attachées aux vestiges de l'église que part leurs points d'appui. Cette propriété facilite une étude mécanique préliminaire en simplifiant les conditions aux limites à appliquer.

La voûte en cul-de-four est une structure très intéressante d'un point de vue mécanique pour plusieurs raisons. Tout d'abord, sa forme à cinq pans est peu commune et sa stabilité seule mérite d'être étudiée. Ensuite, elle est constituée de deux matériaux différents. Les claveaux de l'arc de tête sont en calcaire blanc fin et ne sont liés à des voussoirs du même type que jusqu'à la cinquième assise. Au dessus, des assises de tuf sont chaineés aux angles par intervalles de deux, avec des blocs de calcaire. Pour terminer cette voûte, les cinq dernières assises réunies autour d'une clef semi-hexagonale se composent à nouveau de blocs de calcaire. Ces détails de la voûte en cul-de-four sont illustrées sur la figure 7.33. La répartition des matériaux est perceptible grâce à l'altération relative des blocs.

L'arc, quant à lui, est un arc de plein cintre composé de voussoirs réguliers formés de 3 ou 4 blocs. Son intérêt réside dans sa simplicité qui offre un terrain d'investigation intéressant pour les méthodes de restitution et de modélisation mécanique.

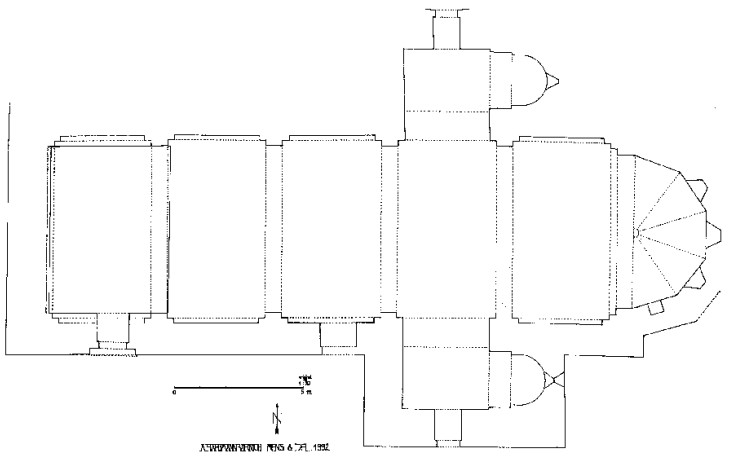


FIG. 2. — PRIEURÉ NOTRE-DAME, PLAN GÉNÉRAL DES VESTIGES
(A. Hartmann-Virnich, 1992).

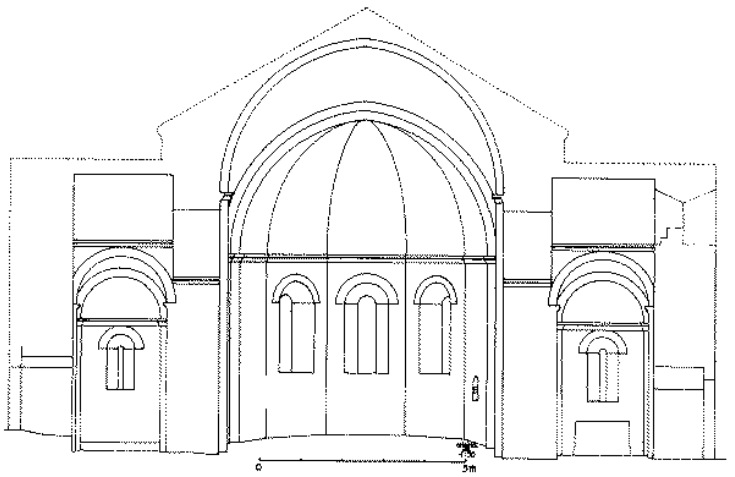


FIG. 3. — COUPE TRANSVERSALE NORD-SUD, TRANSEPT ET CHEVET
Parties hautes reconstituées (A. Hartmann-Virnich, 1992).

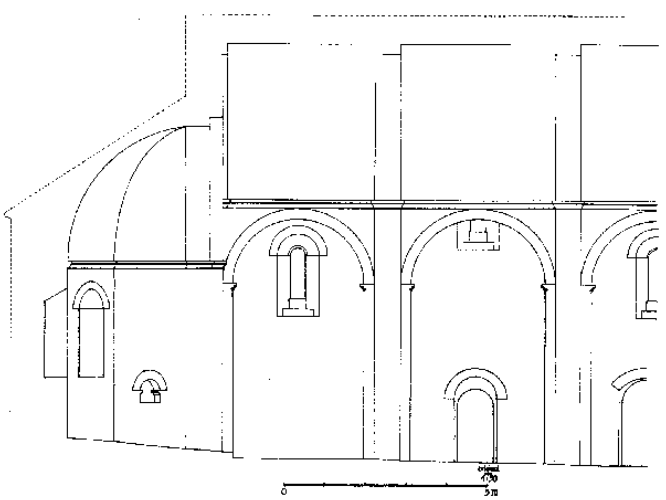


FIG. 4. — COUPE LONGITUDINALE EST-OUEST, ABSIDE ET TRAVÉES ORIENTALES DE LA NEF
Parties hautes reconstituées (A. Hartmann-Virnich, 1992).

FIGURE 7.31 – *Prieuré Notre-Dame, plan général des vestiges, d'après* HARTMANN-VIRNICH *(1996)*

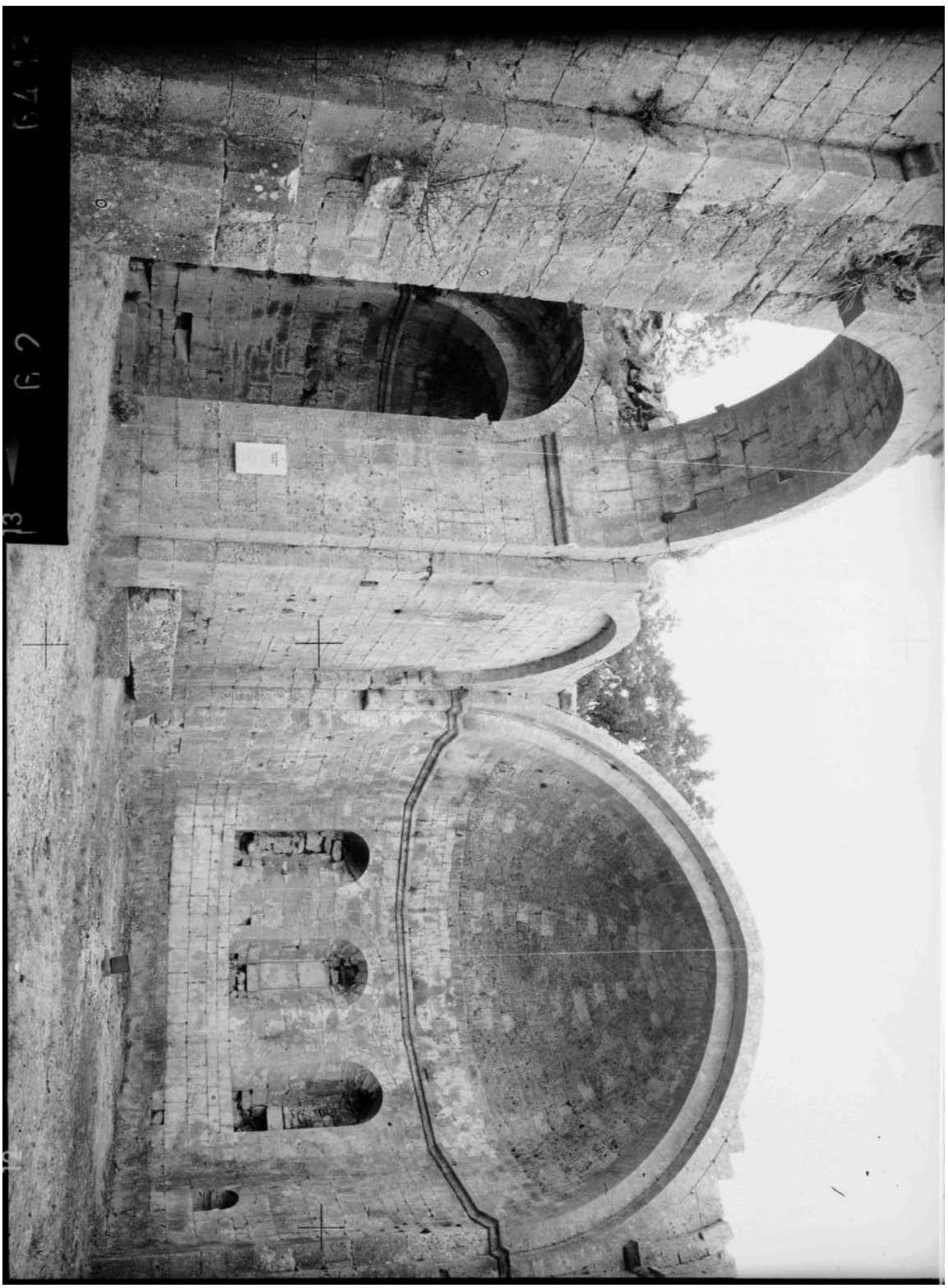


FIGURE 7.32 – *Vue intérieure, coté Nord-est*

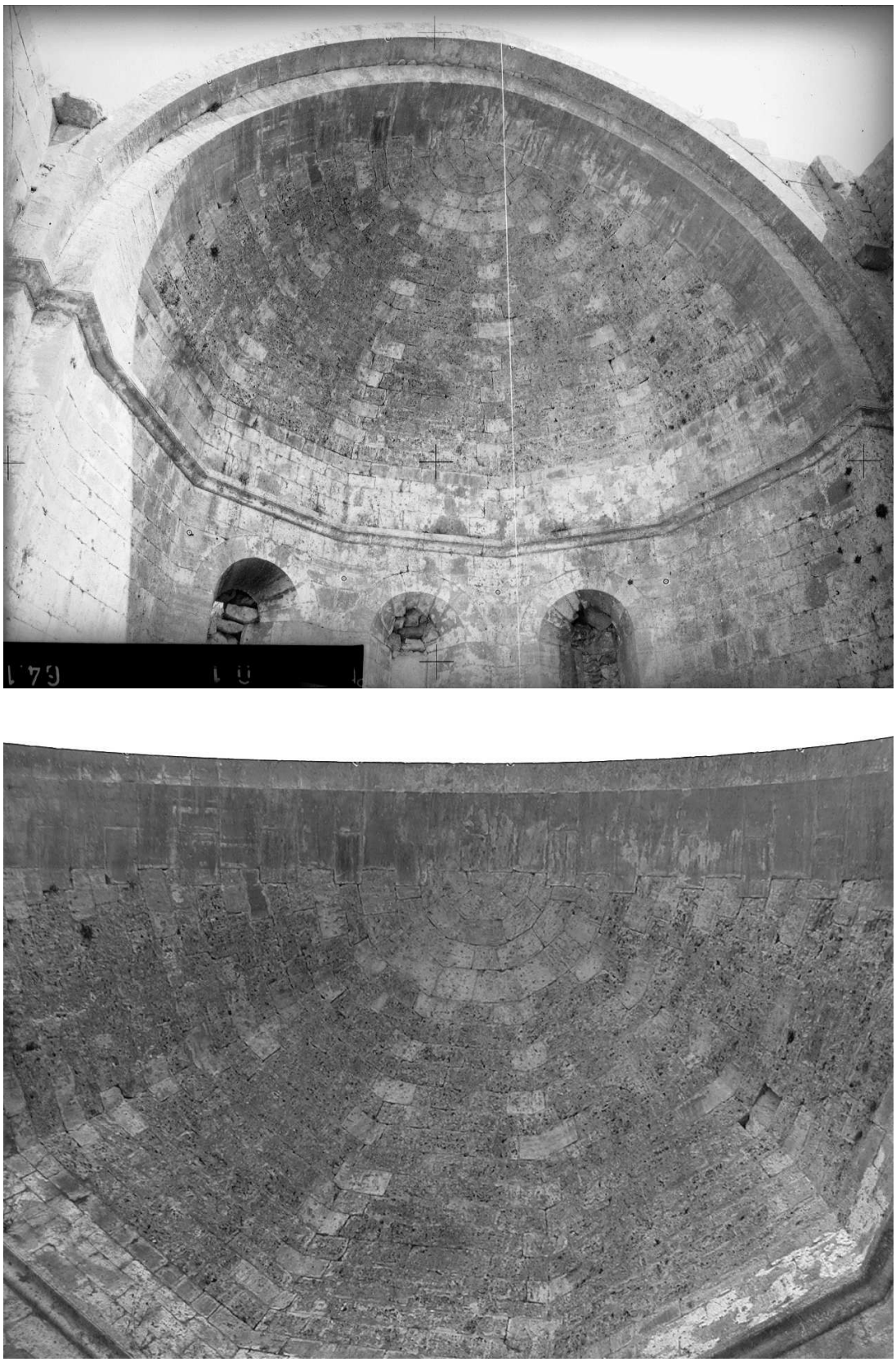


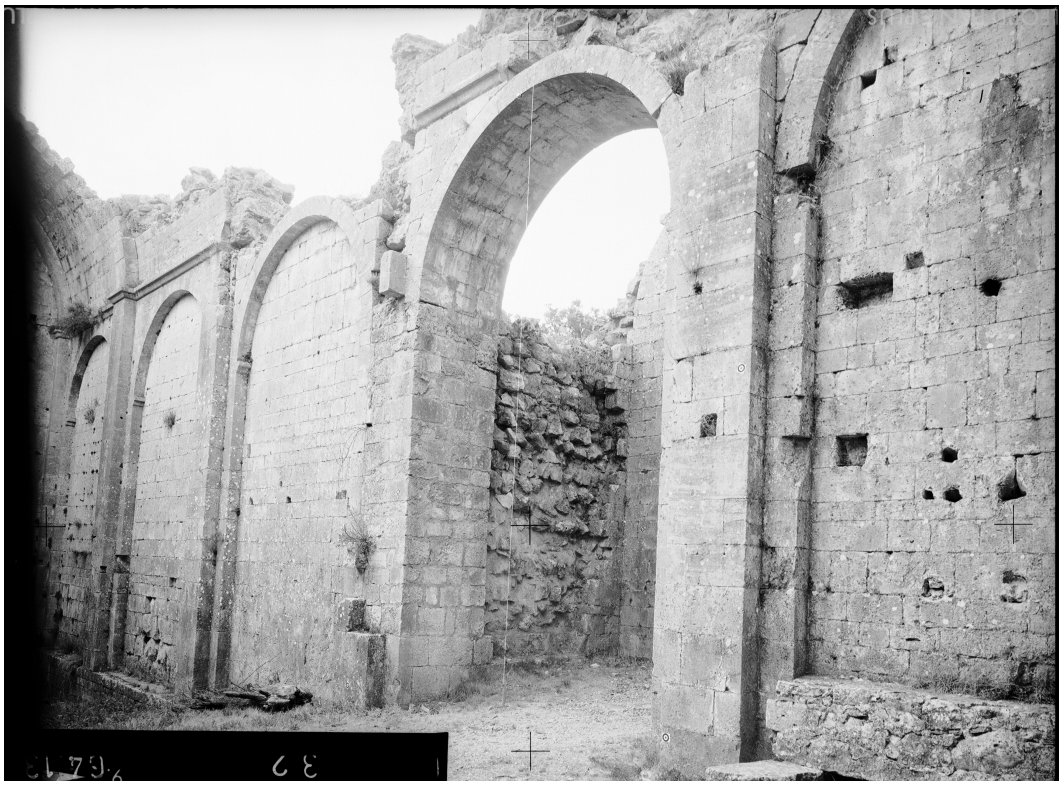
FIGURE 7.33 – *Vues de la voûte de l'abside principale*

7.3.5.b Campagne de prise de vues

La campagne de prises de vues a eu lieu en Août 1999. Elle a été réalisée par Pierre Drap et moi-même au moyen d'un appareil dédié à la photogrammétrie (Camera P32 Wild). L'emploi de cet appareil ainsi que la numérisation à haute densité par Kodak™, fournissent un support de travail de grande précision.

Aucun point de mesure n'a été pris ; seuls des fils à plomb ainsi que des distances relatives ont servi à fabriquer un repère local de référence. Pour chaque entité, deux vues décalées offrent une restitution en trois dimensions. Le calage des ces vues est réalisé par les cibles que l'on peut deviner sur les clichés. Trois paires de vues stéréo ont été utilisées pour restituer l'arc et l'intérieur du transept. On donne sur la figure 7.35 des extraits des couples photogrammétriques qui ont servis à la restitution, ainsi qu'un couple complet sur la 7.36.

Figure 7.34 – *Vue de l'arc dans l'axe du transept Nord*



(a) Vue de l'arc, direction Nord-ouest

(b) Vue de l'arc, direction Nord-est

FIGURE 7.35 – *Vues de l'arc du transept Nord - Extrait des couples stéréos*

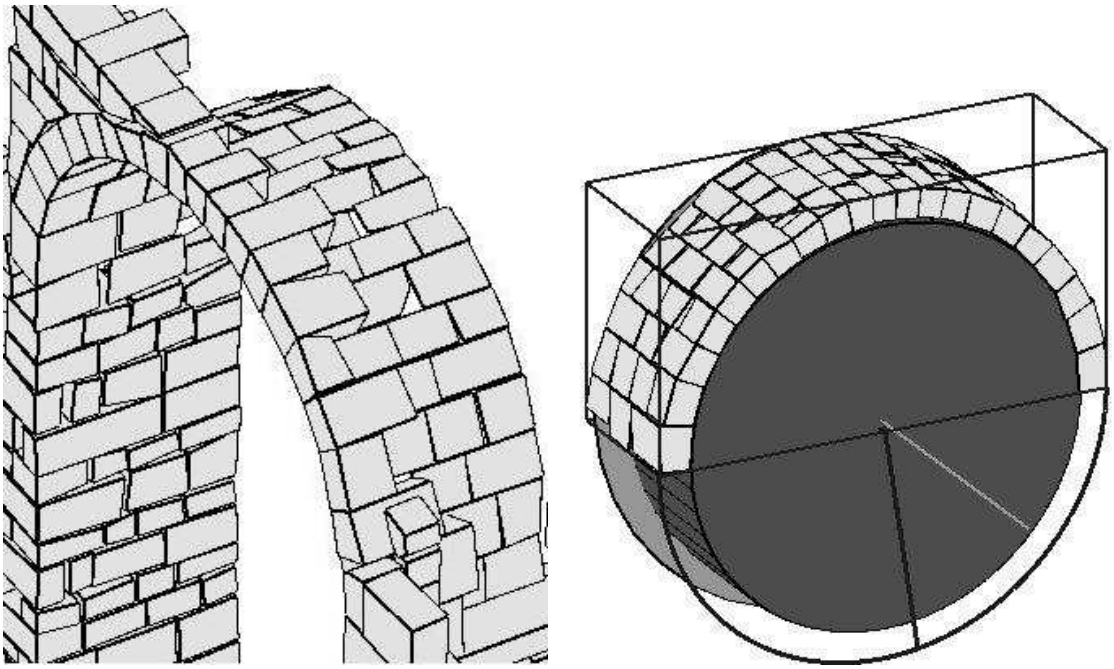
(a) Vue de gauche (b) Vue de droite

FIGURE 7.36 – *Couple stéréo-photogrammétrique de l'arc du transept Nord*

7.3.5.c Premiers résultats de restitution

La restitution a été effectué par Stéphan Garrec, étudiant en Archéologie. L'Arpenteur, développé par Pierre Drap, a été utilisé à travers son interface réseau.

Ce travail s'est d'abord focalisé sur le transept Nord. L'une des difficultés qui a été surmontée est la reconstitution complète de l'arc, à partir des faces de l'intrados et des cotées. Pour cela, l'entité architecturale « arc » a été complétée pour permettre de renseigner la mesure des cylindre d'intrados et d'extrados à partir des faces des blocs visibles. Une fois ces informatiosn traitées, chaque bloc a été reconstruit pour former l'arc complet. Le processus est visualisé sur la figure 7.37.

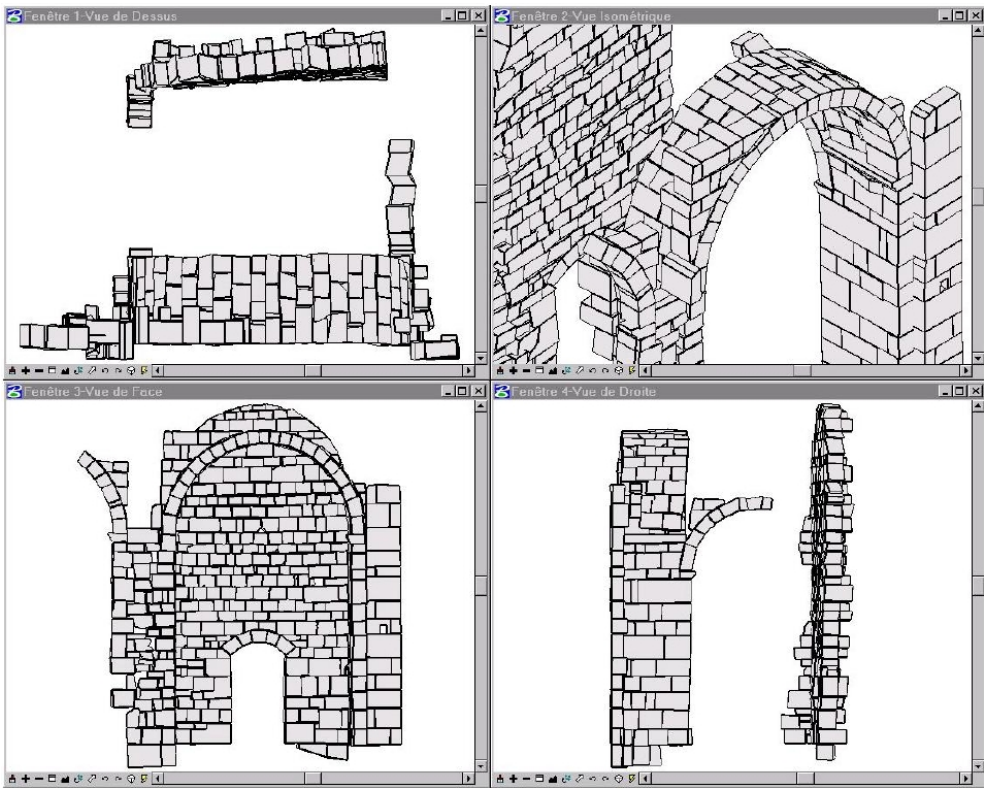


(a) Faces obtenues par mesure directe (b) Arc reconstruit

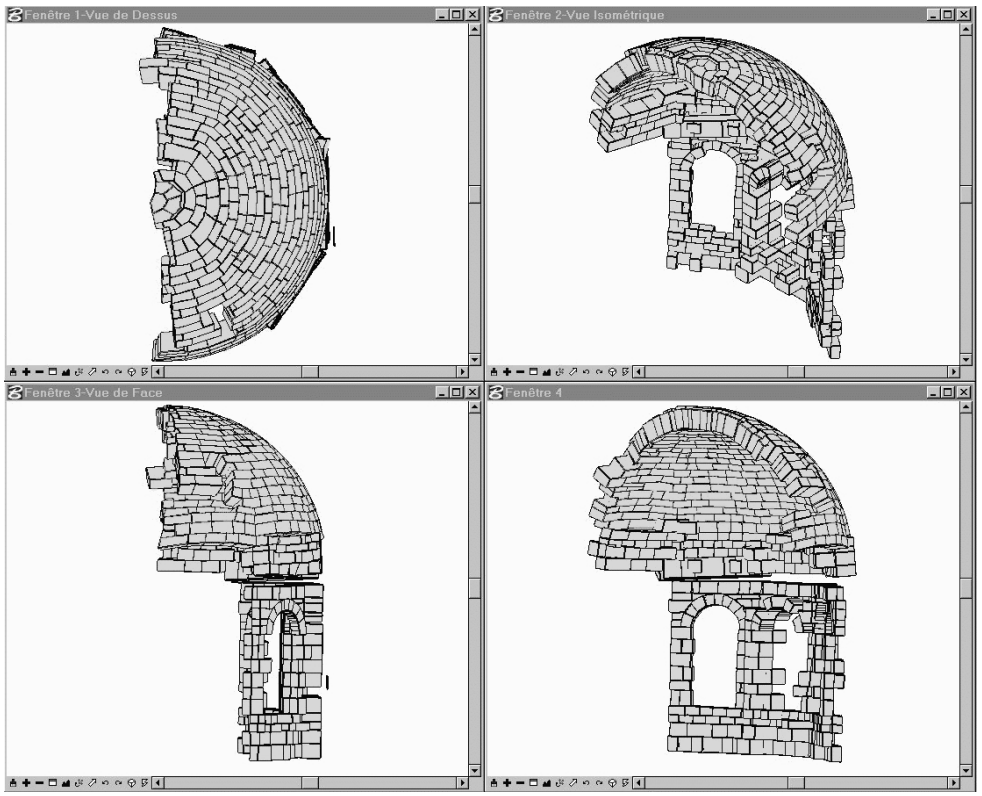
Figure 7.37 – *Reconstitution de l'arc à partir d'hypothèses archéologiques et architecturales, d'après* Drap *et al. (2000)*

(Drap *et al.*, 2000) précisent de plus les déformations par rapport au cylindre intrados mesuré. Cette information est intéressante à deux point de vues. D'un point de vue archéologique, elle confirme le degré d'exactitude avec lequel la construction est réalisée. D'un point de vue mécanique, elle précise quel type de déformations a subies l'arc par rapport à une configuration théorique.

La seconde étape de restitution a été réalisée sur la voûte en cul-de-four. Là encore, la reconstruction complète s'appuie sur les propriétés conférées à l'entité architecturale. Par exemple, les extrusions des blocs s'appuie sur l'hypothèse d'un voûte à cinq pans (Figure 7.38).



(a) Restitution et mesure de l'arc et du mur Nord



(b) Restitution de la voûte et de ses piédroits

FIGURE 7.38 – *Restitution des entités - Visualisation sous Microstation® Bentley*

7.3.5.d Etudes mécaniques envisagées

Les étude mécaniques sur ces structures n'ont pas encore été réalisées. On livre toute fois, dans ce paragraphe, les différents points qu'il semble bon d'aborder dans l'avenir.

- Le première phase devra s'articuler sur le maillage et la reconnaissance des contacts.
  Les opérations de maillage comportent quelques difficultés techniques supplémentaires par rapport à celles rencontrées aux Palais des Papes. Dans la voûte en particulier, de nombreux blocs ne sont pas simplement hexaédriques. Il est donc nécessaire de terminer le développement entrepris et de tester la robustesse des mailleurs.
  La reconnaissance des contacts s'avère aussi être une étape intéressante dans les tests de validation. La géométrie cylindrique ou sphérique des structures de couvrement va mettre à l'épreuve la robustesse des algorithmes de détection de contact.
- La simple étude sous gravité constituera sans doute un travail très intéressant sur plusieurs plans.
  Tout d'abord, sur le plan numérique, on a déjà mis en évidence que les structures, qui fondent leur stabilité sur des principes d'arc-boutement, sont sensibles au placement des points de contact. Ces exemples vont permettre confirmer ou d'infirmer la démarche adoptée.
  Enfin, sur le plan de la mécanique des structures maçonnées, ces exemples suscitent de nombreuses investigations. Les déformations relevées sur l'arc en font parties. Sont-elles le résultats de la construction, de l'écartement des piles ou des vestiges qui pèsent sur lui ? La répartition des matériaux de la voûte est aussi une question intéressante. Ce choix de répartition est-il opportun pour la stabilité de la voûte ? Si oui, peut être pouvons nous en inspirer pour des restaurations à venir. Est-il simplement un artifice qui permet lors de la construction de ne pas trop charger les cintres ? Autant de questions dont les réponses intéresse à la fois les archéologues, les architectes et les mécaniciens.

7.4 Conclusion

L'obtention d'un équilibre statique « acceptable » d'une structure maçonnée, considérée comme une collection de corps interconnectés est délicate. Plusieurs méthodes ont été proposées sans fournir de solutions définitives valables dans toutes les situations. Elles permettent néanmoins de fournir un état d'équilibre tenant compte du mode de chargement et s'affranchissant des effets de l'inertie inhérents à la formulation dynamique du problème.

Les tests de validation sur des structures académiques ont permis de montrer l'importance de la discrétisation des interfaces. Les zones sensibles des structures, où de grands glissements ou de grandes rotations sont attendus, sont à considérer avec précaution, si l'on souhaite garantir la qualité des résultats. De plus, ces exemples ont montré que les algorithmes développés étaient capables d'appréhender des structures de taille conséquente (d'un point de vue numérique). Il semble, dans l'optique d'une stratégie de modélisation mixte entre micromécanique et homogénéisation, qu'il soit possible d'envisager l'étude de structures réelles dans leur intégralité.

Enfin, l'application aux édifices monumentaux a révélé deux points importants :

- le premier, plus technique, concerne l'acquisition des données à la fois géométriques et mécaniques. Si la photogrammétrie numérique « intelligente » fournit un outil formidable pour le relevé pierre à pierre, il n'en reste pas moins que deux phases de traitement des données doivent être considérées avec une attention particulière : la génération des maillages et la détection/discrétisation des interfaces.

  Des méthodes heuristiques ont été mises en œuvre pour répondre à ces problèmes. Si elles ont permis de traiter les premiers édifices étudiés, il semble tout de même que leur forme soit encore à perfectionner si on veut qu'elles se généralisent.

  Enfin, pour compléter ce premier point, il est bon de noter que l'interaction avec le sol des édifices monumentaux reste à préciser et à prendre en compte. Une collaboration avec des géomécaniciens permettrait certainement de définir des conditions aux limites pertinentes, voire de prendre en compte dans les simulations une partie du sol à définir.
- Le second point, plus culturel, repose sur l'idée d'une collaboration interdisciplinaire indispensable à une approche globale et cohérente des édifices monumentaux. Nous avons essayer d'illustrer ce propos au travers des études de cas sur le Palais des Papes et sur la Priorale Notre-Dame d'Aleyrac. Quelques interactions fructueuses ont été mises en évidence. Il est bien clair que nous n'en avons pas fait le tour ; un bon nombre de choses restent encore à découvrir...

BIBLIOGRAPHIE

M. Abadie. *Simulation dynamique de mécanismes, prise en compte du contact frottant.* PhD thesis, Université des sciences et techniques du Languedoc, Montpellier II, 1998.

V. Acary, J.-Y. Blaise, P Drap, M Florenzano, S. Garrec, M. Jean & D. Merad. NSCD method applied to mechanical simulation of masonry in historical building using MOMA. *XVII CIPA (International Committee for Architectural Photogrammetry) International Symposium, WG3.*, Olinda, Brasil, October 1999. available at http://moma.gamsau.archi.fr/Sources/momap.htm.

E.C. Aifantis. On the microstructural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 106, pp. 326–330, 1984.

P. Alart & A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3), pp. 353–375, 1991.

G. Alfano, L. Rosati & N. Valoroso. A numerical strategy for finite element analysis of no-tension materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(3), pp. 317–350, 2000.

S.S. Ali & A.W. Page. Finite element model for masonry subjected to concentrated loads. *Journal of Structural Engineering, A.S.C.E*, 114(8), pp. 1761–1784, 1988.

G. Alpa & I. Monetto. Microstructural model for dry block masonry walls with in plane loadings. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(7), pp. 1159–1175, 1994.

C. Ambrosetti & P. Pegon. 3D modelling of complex block arrangement for columns of monuments. DGEMN-LNEC-JRC, editor, *Monument-98, Workshop on seismic perfomance of monuments*, pp. 135–144, November 12-14 1998.

S. Andrieux, Y. Bamberger & J.J. Marigo. Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 5(3), pp. 471–513, 1986.

A. Anthoine. In-plane behavior of masonry : a literature review. Technical Report EUR 13840 E, Commission of the European communities, 1992.

A. Anthoine. Derivation of in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures*, 32(2), pp. 137–163, 1995.

G. Armand, M. Boulon, J.C. Jay, C. Papadopoulos, G. Picaud, M. Reveillet, B. Rey & J.F. Verdys. Monuments under seismic action. Task number 3 - Interface Properties

EV5V-CT93-0300, Laboratoire Sols Solides Structures HMG INPG CNRS, Grenoble, France, 1997.

F. Armero & Petőcz. A new class of conserving algorithms for dynamic contact problems. J-A. Désidéri, P. Le Tallec, E. Oñate & E. Périaux, J. ans Stein, editors, *Numerical Method in numerical engineering '96, Proc. 2nd ECCOMAS Conf. on Numerical Methods in Engineering*, pp. 861–867, Paris, France, 9-13, September 1996.

F. Armero & Petőcz. Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158(3-4), pp. 269–300, 1998.

F. Armero & Petőcz. A new dissipative time-stepping alogorithm for frictional contact problem : formulation and analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179, pp. 151–178, 1999.

R.H. Atkinson, B.P. Amadei, S. Saeb & S. Sture. Response of masonry bed joints in direct shear. *Journal of Structural Engineering, A.S.C.E*, 115(9), pp. 2276–2296, 1989.

J.M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 64, pp. 337–403, 1977.

K.J. Bathe. *Finite Element Procedures.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, second edition, 1996.

K.J. Bathe & Chaudhary. A solution method for planar and axisymetric contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, pp. 65–88, 1985.

O. Bauchau, G. Damilano & N.J. Theron. Numerical integration of non-linear elastic multibody systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, pp. 2727–2751, 1995.

O.A. Bauchau. Computational schemes for flexible nonlinear multi-body systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Preprint submitted to Elsevier, 2000.

O.A. Bauchau & N.J. Theron. Energy decaying for nonlinear elastic multibody systems. *Computers & Structures*, 59(02), pp. 317–332, 1996a.

O.A. Bauchau & N.J. Theron. Energy decaying scheme for non-linear beam models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134, pp. 37–56, 1996b.

Z.P. Bazant & L. Cedolin. *Stability of structures. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories.* Oxford University Press, New York, 1991.

Z.P. Bazant & F.-B. Lin. Non-local yield limit degradation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, pp. 1805–1823, 1988.

T. Belytschko & M.O. Neal. Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and lagrangian method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31, pp. 547–572, 1991.

D. Besdo. Inelastic behaviour of plane frictionless block-systems described as Cosserat media. *Archives of Mechanics, Warszawa*, 37(6), pp. 603–619, 1985.

L. Biolzi. Evaluation of compressive strength of masonry walls by limit analysis. *Journal of Structural Engineering, A.S.C.E*, 114(10), pp. 2179–2189, 1988.

M. Bollaerts, editor. *Restauration de la cathédrale des Saints-Michel-et-Gudule, 1983-1988*. Régie des bâtiments, Ministère des travaux publiques, Brusselles, 1988.

M. Boulon, P. Garnica & P.A. Vermeer. Soil-structure interaction : FEM computations. In Selvadurai & Boulon (1995), pp. 147–171.

H. Brezis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupe de contraction dans les espaces de Hilbert*. North Holland, Amsterdam, 1973.

B. Brogliato. *Nonsmooth Mechanics : Models, Dynamics and Control*. Communications and Control Engineering. Springer-Verlag, prelimanary drafts of book in lectures notes in control and informations sciences 1996, second edition, 1996.

B. Budiansky. On the elactic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13, page 223, 1965.

B. Budiansky & R.J. O'Connell. Elastic moduli of a cracked solid. *International Journal of Solids and Structures*, 12, pp. 81–97, 1976.

L. Cangémi. *Frottement et adhérence : modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, 1997.

G. Cardani & A. Meda. Flexural strength and notch sensitivity in natural building stones : Carrara and dionysos marble. *Construction and Building Materials*, 13(7), pp. 393–403, 1999.

A. Cardona. Flexible three dimensional gear modelling. *Revue européenne des éléments finis*, 4(5-6, numéro spécial, rotations finies en mécanique des solides et des structures, Ibrahimbegovic, A & Géradin, M., éditeurs), pp. 663–691, 1995.

A. Cardona & M. Géradin. A superelement formulation for mechanisms analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(01), pp. 1–36, 1992.

A. Cardona & M. Géradin. Kinematic and dynamic analysis of mechanisms with came. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 103(01), pp. 115–134, 1993.

A. Cardona & M. Géradin. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, pp. 2403–2438, 1998.

N.J. Carpenter, R.L. Taylor & M.G. Katona. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992.

A. Cecchi & R. Di Marco. Homogenization of masonry walls with a computational oriented procedure. rigid or elastic block? *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19(3), pp. 535–546, 2000.

J.-L. Chaboche, F. Feyel & Y. Monerie. Interface debonding models : a viscous regularization with a limited rate dependency. *International Journal of Solids and Structures*, 38(18), pp. 3127–3160, 2001.

R. Chambon, D. Caillerie & N. El Hassan. One-dimaensionnal localisation studied with a second grade model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1998.

V. Chawla & T.A Laursen. Energy consistent algorithms for frictional contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42, 1998.

J. Chung & G.M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation : the generalized-α method. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 60, pp. 371–375, 1993.

I.F. Collins. The upper and lower bound theorems for rigid/plastic solids generalised to include Coulomb friction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17, pp. 323–338, 1969.

C. Comi, A. Corigliano & G. Maier. Dynamic analysis of elastoplastic softening discretized structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 118, pp. 2352–2375, 1992.

M. Como. Equilibrium and collapse analysis of masonry bodies. *Meccanica*, 27, pp. 185–194, 1992.

M. Como & A. Grimaldi. A unilateral model for the limit analysis of masonry walls. *Unilateral problem in structural analysis*, pp. 25–45, CISM, Ravello, 1983. Springer-Verlag, 1985.

C.A. Coulomb. Essai : Sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. *Mémoire présenté à l'académie royale des sciences*, 1773.

C. Crisfield & G.F. Moita. A co-rotationnal formulation for 2-d continua including incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(15), 1996.

M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. Wiley, New York, 1991,1997.

M. Crouzeix & A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Collection mathématiques appliquées pout la maîtrise. Masson, Paris., 2ème edition révisée et augmentée edition, 1992.

P.A. Cundall & O.D.L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1), pp. 47–69, 1979.

M. Cuomo & G. Ventura. A complementary energy formulation of no tension masonry-like solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(1), pp. 313–339, 2000.

A. Curnier & P. Alart. A generalized newton method for contact problems with friction. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, supplément no 1 to 7, pp. 67–82, 1988.

B. Dacoragna. Necessary and sufficient conditions for strong ellipticity of isotropic functions in any dimensions. *Discrete and discontinuous dynamical systems – Series B*, 1(2), pp. 257–263, 2001.

R. Dautray & J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et la technique.* Collection du Comissariat à l'Energie Atomique, série scientifique. Masson, 1988.

O. Débordes. *Mécanique du solide déformable.* Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 1996. Cours de tronc commun, deuxième année.

R. de Borst, L.J. Sluys, H.B. Mühlhaus & J. Pamin. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 10, pp. 99–121, 1993.

P. de Buhan & G. De Felice. A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(7), pp. 1085–1104, 1997.

G. De Saxcé. Une généralisation de l'inégalité de fenchel et ses applications aux lois constitutives. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, t 314,série II, pp. 125–129, 1992.

G. De Saxcé & Z.-Q. Feng. New inequality and functional for contact with friction : The implicit standard material approach. *Mech. Struct. & Mach.*, 1990.

G. De Saxcé, Z.-Q. Feng & G. Touzot. Numerical implementation of the implicit standard material approach dor 2d and 3d frictional contact problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*,????

E. Delassus. Mémoire sur la thèorie des liaisons finies unilatérales. *Annales scientifique de l'Ecole Normal Supérieure*, 34, pp. 95–179, 1917.

J.M. Delbecq. Analyse de la stabilité des voûtes en maçonnerie de Charles Augustin Coulomb à nos jours. *Annales des Ponts et Chaussées*, 19, pp. 36–43, 1981.

J.M. Delbecq. Analyse de la stabilité des voûtes de maçonnerie par le calcul à la rupture. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 1(1), pp. 91–121, 1982.

A. Dragon & Z. Mróz. A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. *International Journal of Engineering Science*, 17, pp. 121–137, 1979.

P. Drap. *PAROS??* PhD thesis, Université d'Aix-Marseille III, 1997.

P. Drap, G. Gaillard, P. Grussenmeyer & A. Hartmann-Virnich. A stone-by-stone photogrammetric survey using architectural knowlegde formalised on the ARPENTEUR photogrammetric workstation. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, WG 5/V*, volume XXXIII, Amsterdam, 2000.

P. Drap & P. Grussenmeyer. A digital photogrammetric workstation on the web. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, pp. 48–58, 2000a.

P. Drap & P. Grussenmeyer. Web based photogrammetry, arpenteur : a network tool for small format architectural photogrammetry. *GIM International*, pp. 13–15, March 2000b.

D.C. Drucker. Coulomb's friction, plasticity and limits loads. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, pp. 71–74, 1954.

D.C. Drucker. A definition of stable inelastic material. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 81, pp. 101–106, 1959.

R.G Drysdale, A.A. Hamid & A.C. Heidebrecht. Tensile strength of concrete masonry. *Journal of Stuctural Division A.S.C.E.*, 105(ST7), pp. 1261–1276, July 1979.

D.S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8, pp. 100–104, 1960.

A. Durand-Claye. Stabilité des voûtes de maçonnerie. *Annales des Ponts et Chausées*, 1, pp. 63–96, 1867.

A. Durand-Claye. Stabilité des voutes et des arcs. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1, pp. 416–440, 1880.

G.J. Dvorak. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proceedings Royal society, London*, 437, pp. 311–327, 1992.

I. Ekeland & R. Temam. *Convex Analysis and Variationnal problems.* North Holland, Amsterdam, 1976.

A. Elomri & F. Sidoroff. Homogenaization of a two-phase elastic-plastic layered composite. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 312, Série II, pp. 425–430, 1991.

J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings Royal society, London*, A241, pp. 376–396, 1957.

P.H. Feenstra & R. de Borst. A plasticity model and algorithm for mode-I craking in concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, pp. 2509–2529, 1995.

P.H. Feenstra & R. de Borst. A composite plasticity model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 33, pp. 707–730, 1996.

Z-Q. Feng. *Contribution à la modélisation des problèmes non linéaires : contact, plasticité et endommagement.* PhD thesis, Université Technologique de Compiègne, 1991.

M. Florenzano, J.-Y. Blaise & P. Drap. Photogrammetry and knowledge representation, restitution of archeological hypothesis on the Bigot model of ancient Rome. *International Archives of Photogrammetry and remote sensing*, volume XXXII, pp. 90–96 part 5C1B, October 1-3 1997a.

M. Florenzano, J.-Y. Blaise & P. Drap. PAROS, Photogrammétrie et modèles objets appliqués à l'étude de l'architecture construite. *Revue Informatique et Statistique dans les Sciences Humaines*, 1(4), pp. 163–190, 1997b.

G.A. Francfort & J.J. Marigo. Stable damage evolution in a britlle continuous medium. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 12, pp. 149–189, 1993.

L.B. Freund. *Dynamic fracture mechanics.* Cambridge University Press, 1989.

M. Frémond. Equilibre des structures qui adhèrent à leur support. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 295, Série II, pp. 913–916, 1982.

M. Frémond. Adhérence des solides. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(3), pp. 383–407, 1987.

M. Frémond. Contact with adhesion. In Moreau & Panagiotopoulos (1988), pp. 177–222.

M. Frémond & A. Friaà. Les méthodes statique et cinématique en calcul à la rupture et en analyse limite. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 1(5), pp. 881–905, 1982.

M. Frémond & B. Nedjar. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8), pp. 1083–1103, 1996.

S. Gagnière. *Le Palais des Papes d'Avignon.* Paris, 1965.

F. Genna. An accurate numerical integration scheme for solving structural problems in the presence of a « no-tension » material. *Computers & Structures*, 53, pp. 253–273, 1994.

J.M. Gere & S.P. Timoshenko. *Mechanics of materials.* PWS-KENT Publishing Co., Boston, Massachusetts, 3rd edition, 1990.

P Germain. *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Masson, Paris, 1973a.

P Germain. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus : Première partie : théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, 12, pp. 235–274, 1973b.

P. Germain, Q.S. Ngugen & P. Suquet. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 105, pp. 1010–1020, 1983a.

P. Germain, Q.S. Nguyen & P. Suquet. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 50, 50th Anniversary Issue, pp. 1010–1020, 1983b.

G. Geymonat, F. Krasucki & J.J. Marigo. Sur la commutativité des passages à la limite en théorie asymptotique des poutres composites. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 305, Série II, pp. 225–228, 1987.

G. Giambanco & L. Di Gati. A cohesive interface model for the structural mechanics of block masonry. *Mechanics Research Communications*, 24(5), pp. 503–512, 1997.

M. Giaquinta & E. Giusti. Researches on the equilibrium of masonry structures. *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 68, pp. 359–392, 1985.

B. Godart, M. Tiveron & D. Duval. Modélisation de la cathédrale de strasbourg à l'aide du code de calcul aux éléments finis CÉSAR-LCPC, etude de l'influence de mouvements d'appuis sur le comportement d'une partie de l'édifice. *Bulletin des laboratoires des Ponts et Chausées*, 206, pp. 41–62, Novembre - Décembre 1996.

R.E. Goodman, R.L. Taylor & T.L. Brekke. A model for the mechanics of jointed rocks. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E.*, SM3, pp. 637–659, 1968.

M. Géradin & A. Cardona. *Flexible Multibody Dynamics : A finite element Approach*. J. Wiley & Sons, New York, 2001.

M. Géradin & D. Rixen. *Théorie des vibrations. application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1993.

P. Guo. *Investigation and modeling of the mechanical properties of masonry*. PhD thesis, Mac Master University, Hamilton, Canada, 1991.

J.O. Hallquist, G.L. Goudreau & D.J. Benson. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51, pp. 107–137, 1985.

B. Halphen & Q.S. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique*, 14, pp. 39–63, 1975.

A.A. Hamid & R.G. Drysdale. Proposed failure criteria for concrete block masonry under biaxial stresses. *Journal of Stuctural Division A.S.C.E.*, 107(ST8), pp. 1675–1687, 1981.

A.A. Hamid, R.G. Drysdale & A.C. Heidebrecht. Shear strength of concrete masonry joints. *Journal of Stuctural Division A.S.C.E.*, 105(ST7), pp. 1227–1240, July 1979.

R.D. Hart, P.A. Cundall & J. Lemos. Formulation of a three-dimensionnal dicrete element model - part ii : Mechanical calculations and intercation of a system composed of many polyhedral blocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 25, pp. 117–125, 1988.

A. Hartmann-Virnich. La priorale notre-dame d'aleyrac. *Congrès archéologique de France, Société Francaise d'archéologie*, 150, pp. 9–21, 1996.

A. Hartmann-Virnich. Avignon. palais des papes. Bilan scientifique 1997, Direction Régionale des Affaires Culturelles, Provence-Alpes-Côte d'Azur (DRAC SRA PACA), 1998.

A. Hartmann-Virnich. Avignon. palais des papes, tour saint-laurent. etude archéologique des élévations. Bilan scientifique 1998, Direction Régionale des Affaires Culturelles, Provence-Alpes-Côte d'Azur (DRAC SRA PACA), 1999.

Z. Hashin & S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic and non-homogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10, pp. 335–342, 1962.

Z. Hashin & S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycristals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11, pp. 127–140, 1963.

E.J. Haug. *Computer Aided Kinematics and Dynmaics*, volume 1 : Basic methods. Allyn and Bacon, Boston, 1989.

E.J. Haug, S.C. Wu & S.M. Yang. Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction, stiction, and constraint addition-deletion, part i : Theory. *Mechanisms and Machine Theory*, 1986a.

E.J. Haug, S.C. Wu & S.M. Yang. Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction, stiction, and constraint addition-deletion, part ii : Planar systems. *Mechanisms and Machine Theory*, 1986b.

E.J. Haug, S.C. Wu & S.M. Yang. Dynamics of mechanical systems with Coulomb friction, stiction, and constraint addition-deletion part iii : Spatial systems. *Mechanisms and Machine Theory*, 1986c.

J.H. Heegard & A. Curnier. An augmented lagrangian method for discrte large slip contact poblems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, pp. 569–593, 1993.

J. Heyman. The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, 2(2), pp. 249–279, 1966.

J. Heyman. On shell solution for masonry domes. *International Journal of Solids and Structures*, 3(2), pp. 227–241, 1967a.

J. Heyman. Spires and fan vaults. *International Journal of Solids and Structures*, 3(2), pp. 243–257, 1967b.

J. Heyman. *Coulomb's Memoir on Statics*. Cambridge University Press, 1972.

J. Heyman. The strenghtening of the west tower of Ely cathedral. *Proceedings Institution Civil Enginneers, A.S.C.E.*, 60, pp. 123–147, 1976.

J. Heyman. The estimation of strengh of masonry arches. *Proceedings Institution Civil Enginneers, A.S.C.E.*, 69(2), pp. 921–937, 1980a.

J. Heyman. The rehabilitation of teston bridge. *Proceedings Institution Civil Enginneers, A.S.C.E.*, 68, pp. 489–497, 1980b.

J. Heyman. Poleni's problem. *Proceedings Institution Civil Enginneers, A.S.C.E.*, 84(1), pp. 737–759, 1988.

J. Heyman. The care of masonry buildings. the enginner's contribution. *Structural Repair and Maintenance of Historical Buildings*, pp. 1–12, 1992a.

J. Heyman. Leaning towers. *Meccanica*, 27, pp. 153–159, 1992b.

J. Heyman. Meccanica. *Meccanica*, 27, pp. 153–159, 1992c.

J. Heyman. *The Stone Skeleton, Structural Engineering of masonry architecture.* Cambridge University Press, 1995.

J. Heyman. *Elements Theory of Structures.* Cambridge University Press, 1996.

H.M. Hilber, T.J.R. Hughes & R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, 5, pp. 283–292, 1977.

R. Hill. A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1, page 18, 1948.

R. Hill. *The mathematical theory of plasticity.* Clarendon Press, Oxford, 1950.

R. Hill. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6, pp. 236–249, 1958.

R. Hill. Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 10, pp. 1–16, 1962.

R. Hill. Elastic properties of reinforced soils ; some theoritical principles. *jmps*, 11, pp. 357–372, 1963.

R. Hill. Continuum micromechanics of elastoplastic polycristals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13, pp. 89–101, 1965a.

R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13, pp. 227–240, 1965b.

R. Hill. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycristals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15, page 79, 1967.

R. Hill. Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain. *Proceedings Royal society, London*, A314, pp. 457–472, 1970.

H.K. Hilsdorf. Investigation into failure mechanism of brick masonry in axial compression. *Proc., Int. Conf. on Masonry Structural Systems*, pp. 34–41, Texas, 1969.

H. Horii & S. Nemat-Nasser. Overall moduli of solids with microcracks : Load-induced anisotropy. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31(2), pp. 155–171, 1983.

T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* Prentice-Hall, New Jersey, 1987.

T.J.R. Hughes, T.K. Caughey & W.K. Liu. Finite-element method for nonlinear elastodynamics which conserve energy. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 45, pp. 366–370, 1978.

T.J.R. HUGHES & M. HULBERT. Space-time finite element for elastodynamics : Formulation and error estimates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66, pp. 339–363, 1988.

T.J.R. HUGHES, R.L. TAYLOR, J.L. SACKMAN, A. CURNIER & W. KANOKNUKULCAHI. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8, pp. 249–276, 1976.

A. IBRAHIMBEGOVIC. Finite elastic deformations and finite rotations of 3d continuum with independent rotations field. *Revue européenne des éléments finis*, 4(5-6, numéro spécial, rotations finies en mécanique des solides et des structures, Ibrahimbegovic, A & Géradin, M., éditeurs), pp. 555–576, 1995.

M. JEAN. Unilateral contact and dry friction : time and space variables discretization. *Archives of Mechanics, Warszawa*, 40(1), pp. 677–691, 1988.

M. JEAN. *Frictional contact in rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterials*, pp. 463–486. A.P.S. Salvadurai J.M. Boulon, Elsevier Science Publisher, Amsterdam, 1995.

M. JEAN. The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177, pp. 235–257, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.

M. JEAN, V. ACARY & Y. MONERIE. Non smooth contact dynamics approach of cohesive materials. *Proceedings Royal society, London*, A359(1789), pp. 2497–2518, 2001.

M. KACHANOV. Effective elastic properties of cracked solids : critical review of some basic concepts. *Applied Mechanics Reviews, Transactions of A.S.M.E.*, 45, pp. 304–345, 1992.

M.L. KACHANOV. A microcrack model of rock inelasticity. part i : Frictional sliding on microcracks. *Mechanics of materials*, 1, page 19, 1982a.

M.L. KACHANOV. A microcrack model of rock inelasticity. part i : Propagation of microcracks. *Mechanics of materials*, 1, page 29, 1982b.

V. KERYVIN. *Contribution à la modélisation de l'endommagement localisé*. PhD thesis, Université De Poitiers, 1999.

A. KOOHARIAN. Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches. *Proceedings American Concrete Institution*, 317, page 89, 1953.

D. KUHL & E. RAMM. Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136, pp. 293–315, 1996.

D. KUHL & E. RAMM. Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178, pp. 343–366, 1999.

E. KUHL & M.A. CRISFIELD. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, pp. 569–599, 1999.

T.A. Laursen & V. Chawla. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, pp. 863–886, 1997.

J. Lemaitre. *A course on damage mechanics.* Springer Verlag, 2nd corr. & enlarged edition, 1996.

J. Lemaitre & J.L. Chaboche. Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal de mécanique appliquée*, 2, pp. 317–365, 1978.

J. Lemaitre & J.L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides.* Dunod, Paris, 2ème edition, 1988.

J.V. Lemos, R.D. Hart & P.A. Cundall. A generalized distinct element program for modeling jointed rock mass. *Proceedings of the international symposium on fundamantal rock joints*, pp. 335–348, 15-20 septembre 1985. Methode des elements distincts.

F.-H. Leroy, J.-L. Chaboche, P. Levasseur, D. Lévêque & S. Kruch. Mécanique multi-échelle des matériaux composites. Technical report, Rapport Technique ONERA n° RT 1/7310 DMSC/N, Mail 1999.

D. Lewis & J.C. Simo. Conserving algorithms for the dynamics of hamiltonian systems on Lie groups. *Journal of Nonlinear Science*, 4(3), pp. 253–299, 1994.

Ming C. Lin. *Efficient Collision Detection for Animation and Robotics.* PhD thesis, University of California, Berkeley, 1993.

R.K. Livesley. Limit analysis of structures formed from rigid blocks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, pp. 1873–1871, 1978.

R.K. Livesley. A computational model for the limit analysis of three dimensional masonry structures. *Meccanica*, 27, pp. 161–172, 1992.

F. Léné & D. Leguillon. Etude de l'influence d'un glissement entre les constituants d'un matériau composite. *Journal de Mécanique*, 20, pp. 509–536, 1981.

J. Lopez, E. Oller, E. Oñate & J. Lubliner. A homogeneous constitutive model for masonry. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, pp. 1651–1671, 1999.

H.R. Lotfi & P.B. Shing. An appraisal of smeared crack models for masonry shear wall analysis. *Computers & Structures*, 41(3), pp. 413–425, 1991.

H.R. Lotfi & P.B. Shing. Interface model applied to fracture of masonry structures. *Journal of Structural Engineering, A.S.C.E*, 120(1), pp. 63–80, 1994.

P.B. Lourenço, R. de Borst & J.G. Rots. A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, pp. 4033–4057, 1997.

P.B Lourenço & J.G. Rots. Multisurface interface model for analysis of masonry structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(7), pp. 660–668, July 1997.

P. Lötstedt. Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints. *S.I.A.M. Journal of applied mathematics*, 42(2), pp. 281–296, 1982.

P. Lötstedt. Numerical simulation of time-dependant contact and friction problems in rigid body mechanics. *S.I.A.M. Journal of Sci. Stat. Comput.*, 5(1), 1984.

M. Lucchesi, C. Padovani & G. Pasquinelli. On the numerical solution of equilibrium problems of elastic solids with bounded tensile strength. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1-4), pp. 37–56, 1995.

R. Luciano & E. Sacco. Stress-penalty method for unilateral contact problems. mathematical formulation and computational aspects. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 13(1), pp. 93–111, 1994.

R. Luciano & E. Sacco. Homogenization technique and damage model for old masonry material. *International Journal of Solids and Structures*, 34(24), pp. 3191–3208, 1997.

R. Luciano & E. Sacco. Variationnal methods fot the homogenization of periodic heterogeneous media. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 17(4), pp. 599–617, 1998.

G. Macchi. General methodology. the combined use of experimental and numerical techniques inside a single study. P. Roca, J.L. Gonzalez, A.R. Maro & E. Oñate, editors, *Structural analysis of historical constructions, possibilities of numerical and experimental techniques*, pp. 10–23. CIMNE, January 1997.

G Maier, E. Papa & E. Nappi. *On damage and failure of brick masonry*, chapter of, pp. 223–245. Experimental and Numerical Method in Earthquake Engineering, eds. J. Donea and P.M. Jones, kluwer, dordrecht edition, 1991.

J. Mandel. *Plasticité classique et viscoplasticité.* Cours du C.I.S.M., Udine. Springer Verlag, 1971.

J.J. Marigo. Formulation d'une loi d'endommagement d'un matériau élastique. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 292, série II, pp. 1309–1312, 1981.

J.J. Marigo. Etude numérique de l'endommagement. Série C, Méthodes informatiques 2, pp27-48, EdF, Bulletin de la direction des études et recherche, 1982.

J.J. Marigo, P. Mialon, J.C. Michel & P. Suquet. Plasticité et homogénéisation : un exemple de prévision de charges limites de structures hétérogènes périodiques. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(1), pp. 47–75, 1987.

R. Masiani, N. Rizzi & P. Trovalusci. Masonry as structured continuum. *Meccanica*, 30, pp. 673–683, 1995.

R. Masson, M. Bornert, P. Suquet & A. Zaoui. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48, pp. 1203–1227, 2000.

G.A. Maugin. *The Thermodynamics of Plasticity and fracture.* Cambridge university Press, 1992.

J. Mazars. *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure.* Thése de Doctorat d'Etat, université de Paris 6, 1984.

J. Mazars. A description of micro and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25, pp. 729–737, 1986.

J. Mazars. Endommagement non local. Technical report, Journées CEA-EDF-INRIA, Clamart, 1990.

H.B. Mühlhaus. Application of cosserat theory in numerical simulations of limit loads problems. *Ingenieur Archiv*, 59, pp. 124–137, 1989.

H.B. Mühlhaus. *Continuum model for layered and blocky rock*, volume 2, Analysis & design methods, chapter 8 of Comprehensive Rock Engineering, pp. 209–230. Pergamon Press, Oxford, 1993.

H.B. Mühlhaus, J. Sulem & P. Unterreiner. Discrete and continuous models for dry masonry columns. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(4), pp. 399–403, 1997.

H.B. Mühlhaus & I. Vardoulakis. The thickness of shear bands in granular materials. *geo*, 37(3), pp. 271–283, 1987.

J.C. Michel, U. Galvanetto & P. Suquet. Constitutive relations involving internal variables based on a micromechanical analysis. R. Drouot, G.A. Maugin & F. Sidoroff, editors, *Continuum Thermodynamics : The Art and Science of Modeling Material Behaviour*, pp. 301–312. Kluwer Academic Publishers, 2000.

B. Mirtich. *Impulsed-based Dynamic Simulation of Rigid Body Systems*. PhD thesis, University of California, Berkeley, December 1996.

B. Mirtich. V-clip : Fast and robust polyhedral collision detection. *ACM Transactions on Graphics*, 17(3), pp. 177–208, July 1998.

G.F. Moita & C. Crisfield. A finite element formulation for 3-d continua using the co-rotational technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22), 1996.

F. Mola & R. Vitaliani. Analysis, diagnosis and preservation of ancient monuments : the St. Marks's basilica in Venice. P. Roca, J.L. Gonzalez, A.R. Maro & E. Oñate, editors, *Structural analysis of historical constructions, possibilities of numerical and experimental techniques*, pp. 166–188. CIMNE, January 1997.

Y. Monerie. *Fissuration des matériaux composites : rôle de l'interface fibre/matrice*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille II, Octobre 2000.

Y. Monerie & V. Acary. Formulation dynamique d'un modèle de zone cohésive tridimensionnel couplant endommagement et frottement. *Revue européenne des éléments finis*, 10 (02–03–04), pp. 489–503, 2001.

Y. Monerie & M. Raous. A model coupling adhesion to friction for the interaction between a crack and a fiber/matrix interface. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1999. Special issues « Annual Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik Conference »,April 12-16,Metz.

J.J. Moreau. Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 256, pp. 871–874, 1963.

J.J Moreau. Quadratic programming in mechanics : dynamics of one sided constraints. *S.I.A.M. Journal on control*, 4(1), pp. 153–158, 1966.

J.J. Moreau. *Fonctionnelles Convexes.* Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, subventionné par le CNRS, Collège de France, Paris., 1967.

J.J. Moreau. Sur les lois de frottement, de viscosité et de plasticité. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, t 271, pp. 608–611, 1970.

J.J. Moreau. Fonctions de résistance et fonctions de dissipation (exposé n°6, 31 p.). *Séminaire d'analyse convexe*, Montpellier, 1971.

J.J. Moreau. On unilateral constraints, friction and plasticity. G. Capriz & G. Stampacchia, editors, *New Variational Techniques in Mathematical Physics, CIME II ciclo 1973*, pp. 175–322. Edizioni Cremonese, 1974.

J.J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. *Journal of Differential Equations*, 26, pp. 347–374, 1977.

J.J. Moreau. Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 296 serie II, pp. 1473–1476, 1983.

J.J. Moreau. Dynamique des systèmes à liaisons unilatérales avec frottement sec éventuel. Technical Report 85-1, Laboratoire de Mécanique et de Génie civil, Université des sciences et techniques du Languedoc, Montpellier, Mai 1985.

J.J. Moreau. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. In Moreau & Panagiotopoulos (1988), pp. 1–82.

J.J. Moreau. Some basics of unilateral dynamics. F. Pfeiffer, editor, *IUTAM Symposium on Multibody dynamics.* Kluwer, August 3-7 1998.

J.J. Moreau. Numerical aspects of the sweeping process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177, pp. 329–349, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.

J.J. Moreau & P.D. Panagiotopoulos, editors. *Nonsmooth mechanics and applications.* Number 302 in CISM, Courses ans lectures. Springer Verlag, 1988.

T. Mori & K. Tanaka. Average stress in matrix and average elastic of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 1973.

A. Moropoulou, A. Bakolas & K. Bisbikou. Investigation of the technology of historic mortar. *Journal of Cultural Heritage*, 1, pp. 45–58, 2000a.

A. Moropoulou, A. Bakolas & K. Bisbikou. Physico-chemical adhesion and cohesion bonds in joint mortars imparting durability to the historic structures. *Construction and Building Materials*, 14(1), pp. 35–46, 2000b.

A. Moropoulou, G. Biscontin, A. Bakolas & K. Bisbikou. Technology and behavior of rubble masonry mortars. *Construction and Building Materials*, 11(2), pp. 119–129, 1997.

Z. Mròz & G. Giambanco. An interface model for analysis of deformation behaviour of discontinuities. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 20(1), pp. 1–33, 1996.

E. Méry. Equilibre des voûtes en berceau. *Annales des Ponts et Chaussées*, 1, pp. 50–70, 1840.

B. Nayroles. Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites. *Journal de Mécanique*, 9(2), pp. 491–506, 1970.

A. Needleman. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67, pp. 69–86, 1988.

N.N. Newmark. A method of computation for structural dynamics. *Journal of Engineering Mechanics*, 85(EM3), pp. 67–94, 1959.

Q.S. Nguyen. *Basic Theorems of Elastoplasticity*, chapter 3 of Modelling small deformations of polycristals. Elsevier, London, 1986.

E. Oñate, A. Hanganu, A. Barbat, S. Oller, Vitaliani, A. Saetta & R. Scotta. Structural analysis and durability assessment of historical construction using a finite element damage model. P. Roca, J.L. Gonzalez, A.R. Maro & E. Oñate, editors, *Structural analysis of historical constructions, possibilities of numerical and experimental techniques*, pp. 189–224. CIMNE, January 1997.

E. Oñate, S. Oller, J. Oliver & J. Lubliner. A plastic damage model for nonlinear analysis of concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3), pp. 299–326, 1989.

M. Ortiz. A constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete. *Mechanics of materials*, 4, pp. 67–93, 1985.

M. Ortiz, Y. Leroy & A. Needleman. A finite elements method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61, pp. 189–214, 1987.

M. Ortiz & E.P. Popov. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, pp. 1561–1576, 1985.

A.W. Page. Finite element model for masonry. *Journal of Stuctural Division A.S.C.E.*, 104 (ST8), pp. 1267–1285, August 1978.

A.W. Page. A biaxial failure criterion for brick masonry in the tension-tension range. *International Journal of Masonry Construction*, 1(1), pp. 26–29, 1980.

A.W. Page. The biaxial compressive strength of brick masonry. *Proceedings Institution Civil Enginneers, A.S.C.E.*, 71, pp. 8993–906, 1981.

A.W. Page. The strength of brick masonry under biaxial tension compression. *International Journal of Masonry Construction*, 3(1), pp. 26–31, 1983.

A.C. Palmer. A limit theorem for materials with non-associated flow laws. *Journal de Mécanique*, 5(2), pp. 217–222, 1966.

G.N. Pande, J.X. Liang & J. Middleton. Equivalent elastic moduli for brick masonry. *Computers & geotechnics*, 8, pp. 243–265, 1989.

T. Panzeca & C. Polizotto. Constitutive equations for no-tension materials. *Meccanica*, 23, pp. 88–93, 1988.

E. Papa & A. Nappi. Numerical modelling of masonry : A material model accounting for damage effects and plastic strains. *Applied Mathematical Modelling*, 21, pp. 319–335, June 1997.

H. Parland. Stability of rigid body assemblages with dilatant interfacial contact sliding. *International Journal of Solids and Structures*, 32(2), pp. 203–234, 1995.

N.L. Pedersen & M.L. Pedersen. A direct derivation of the equations of motion for 3d-flexible mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41, pp. 697–719, 1998.

P. Pegon & A. Anthoine. Numerical strategies for solving continuum damage problems with softening : application to the homogenization of masonry. *Computers & Structures*, 64(1-4), pp. 623–642, 1997. homogeinisation en maçonnerie.

S. Pietrusczak & X. Niu. A mathematical description of macroscopic behaviour of brick masonry. *International Journal of Solids and Structures*, 29(5), pp. 531–546, 1992.

G. Pijaudier-cabot & Z.P. Bazant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113, pp. 1512–1533, 1987.

G. Pijaudier-cabot & Z.P. Bazant. Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, 115, pp. 755–767, 1989.

M.E. Plesha. Rock joints : Theory, constitutive equations. In Selvadurai & Boulon (1995).

P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of non linear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(1), pp. 45–71, 1991.

P. Ponte Castañeda. Exact second order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(6), pp. 827–862, 1996.

P. Ponte Castañeda & P. Suquet. On the effective behavior of weakly inhomogeneous nonlinear materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 14, pp. 205–236, 1995.

P. Ponte Castañeda & P. Suquet. Nonlinear composites. *Advances in Applied Mechanics*, 34, pp. 171–302, 1998.

W. Prager. *An introduction to plasticity.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.

J.M. Pérouse de Montclos. *Architecture vocabulaire - Principes d'analyse scientifique.* Imprimerie Nationale, 1988.

D. Radenkovic. *The theory of limit loads applied to soils mechanics.* Library Communication No 1542. University of Leicester, UK, 1970.

T.M. Raijmakers & A.T. Vermelfoort. Deformation controlled meso shear tests on masonry piers. Technical Report B-92-1156, TNO-BOUW/TU Eindhoven, Building and construction research, Eindhoven, THe Netherlands, 1992.

S. Rajgelj, C. Amadio & A. Nappi. An internal variable approach applied to the dynamic analysis of elastic-plastic structural systems. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, 22, pp. 885–903, 1993.

M. Raous, L. Cangémi & M. Cocu. Consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177(3-4), pp. 383–399, 1999.

J.R. Riddington & N.F. Naom. Finite element prediction of masonry compressive strength. *Computers & Structures*, 52(1), pp. 133–119, 1994.

E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15, pp. 529–551, 1979.

R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.

G. Romano & E. Sacco. Conve problems in structural mechanics. G. Del Piero & F. Maceri, editors, *Unilateral problem in structural analysis*, pp. 279–297, CISM Couses and lectures, 1987. Springer-Verlag.

P.P. Rossi. Possibilities of the experimental techniques for the structural analysis of historical constructions. P. Roca, J.L. Gonzalez, A.R. Maro & E. O nate, editors, *Structural analysis of historical constructions, possibilities of numerical and experimental techniques*, pp. 24–46. CIMNE, January 1997.

J.W. Rudnicki & J.R. Rice. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23, pp. 371–394, 1975.

J. Salençon. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.

M. Save. On the application of limit analysis to masonry structures. Lemaire R.M. & Van Balen K., editors, *Stable or unstable ? - Structural consolidation of ancient buildings*, pp. 231–248. Center for conservation of historic Towns and buildings, Leuven University Press, April 12-16 1986.

M. Schatzmann. *Analyse numérique*. Interéditions, 1991.

A.P.S. Selvadurai & M.J. Boulon, editors. *Mechanics of geomaterial interfaces*. Number 42 in Studies in Applied Mechanics. Elsevier, 1995.

A. A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, second edition, 1998.

A.A. Shabana & A.P. Christensen. Three-dimensional absolute nodal co-ordinate formulation : Plate problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, pp. 2775–2790, 1997.

Lianxi Shen & Sung Yi. New solutions for effetive elastic moduli of microcracked solids. *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp. 3525–3534, 2000.

J.C. Simo. A finite strain beam formulation. the three dimensional dynamic problem, part i. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49, pp. 55–70, 1985.

J.C. Simo, D.D. Fox & M.S Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model, part i., formulation and optimal parametrization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72, pp. 267–304, 1989.

J.C. Simo, J.G. Kennedy & S. Govindjee. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. loading/unloading conditions and numerical algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, pp. 2161–2185, 1988.

J.C. Simo & T. Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, 30(5), pp. 115–1198, 1992.

J.C. Simo & M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, pp. 1595–1638, 1990.

J.C. Simo & N. Tarnow. The discrete energy-momentum method. conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 43, pp. 757–792, 1992.

J.C. Simo & R.L. Taylor. Consitent tangent operators for rate-independant elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, pp. 101–118, 1985a.

J.C. Simo & R.L. Taylor. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, pp. 649–670, 1985b.

J.C Simo & L. Vu Quoc. A three-dimensional finite strain rod model, partïi : Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58, pp. 79–116, 1986.

D.J. Steigman. Analysis of a theory of elasticity for masonry solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(4), pp. 543–553, 1991.

O.D.L. Strack & P.A. Cundall. the distinct element method as a tool for research in granular media. Technical Report Part. I, The National Science Foundation concerning NSF Grant ENG76-20711, Dept. of Civil and Mineral Eng., Univ. of Minnesota, 1978.

P. Suquet. Analyse limite et homogénéisation. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 296, Série II, pp. 1355–1358, 1983.

P. Suquet. Discontinuities and plasticity. In Moreau & Panagiotopoulos (1988), pp. 280–340.

P. Suquet. Overall potentials and extremal surfaces of power law or ideally plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41, pp. 981–1002, 1993.

P. Suquet. *Mécanique et thermodynamique des milieux continus*. Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, 1997. Cours de DEA.

P.M. Suquet. Sur les équations de la plasticité : existence et régularité des solutions. *Journal de Mécanique*, 20(1), pp. 3–39, 1981.

P.M. Suquet. *Plasticité et homogénéisation*. Thèse d'état de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1982.

P.M. Suquet. Approach by homogenization of some linear and nonlinear problems in solid mechanics. *Plastic behavior of anisotropic solids*, number 319 in Colloques internationaux du CNRS, pp. 77–117, 1985a.

P.M. Suquet. Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity. *Platicity Today - Modelling, Methods and Apllications*, pp. 279–310, 1985b.

E.B. Tadmor, M. Ortiz & R. Phillips. Quasicontinnum analysis of defects in solids. *Philosophical Magazine Part A.*, 73, pp. 1529–1563, 1996a.

E.B. Tadmor, R. Phillips & M. Ortiz. Mixed atomistic and continuum models of deformation in solids. *Langmuir*, 12, pp. 4529–4534, 1996b.

R. Teman & G. Strang. Duality and relaxation in the variational problems of plasticity. *Journal de Mécanique*, 19(3), pp. 493–527, 1980a.

R. Teman & G. Strang. Functions of bounded deformation. *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, 75, pp. 7–21, 1980b.

R. Van Der Pluijm. Material properties ans its components under tension and shear. *Proc., 6th Can. Masonry Symp.*, Saskatoo, Canada, 1992.

R. Van Der Pluijm. Shear behaviour of bed joints. *Proc., 6th North Am Masonry Conf.*, pp. 125–136, Philadelphia, Pa., 1993.

A.T. Vermelfoort, T.M Raijmakers & H.J.M. Janssen. Shear tests on masonry walls. *Proc., 6th North American masonry conference*, pp. 1183–1193, Philadelphia, Pa., 1993.

Y. Vervialle. Detection des cobtact entre polyédres convexes. Rapport de stage de deuxième année, ecole supérieure de mécanique de marseille, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille, 1999.

J. Wang, J. Fang & B.L. Karilahoo. Asymptotic bounds on overall moduli of cracked solids. *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp. 6221–6237, 2000.

J.R. Willis. Bounds and self-consistent estimates fro the overall moduli of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25, pp. 185–202, 1977.

J.R. Willis. The overall response of composite materials. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of A.S.M.E*, 50, pp. 1202–1209, 1983.

J.R. Willis. The overall response of nonlinear comosite media. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 19, pp. S165–S184, 2000. special issue of Euromech colloqium 2000, Metz, France.

F.Y. Yokel & S.G. Fattal. Failure hypothesis for masonry shear walls. *Journal of Stuctural Division A.S.C.E.*, 102(ST3), pp. 505–532, 1976.

Zbib & Aifantis E.C. On the localisation and post localisation of plastic deformation. Part I. On the initiation of shear bands. part II. On the evolution and thickness of shear bands. *Res Mechanica*, 23, pp. 261–277 ;279–292, 1988.

H. Ziegler. Some extremum principles in irreversible thermodynamics with applications to continuum mechanics. I.N. Sneddon & R. Hill, editors, *Progress in Solids Mechanics, IV*, pp. 93–193. North Holland Publ., 1963.

O.C. Zienkiewicz & G.N. Pande. Time dependent mutli-laminate model of rocks - a numerical study of defromation and failure of rock masses. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1, pp. 219–247, 1977.

O.C. Zienkiewicz & R.L. Taylor. *The Finite Element Method, Fourth Edition*, volume 1 & 2. Mc Graw-Hill, fourth edition, 1989, 1991.

TABLE DES FIGURES

1.1 Différents types d'appareils, d'après (Pérouse de Montclos, 1988) 8
1.2 Détails d'un appareil de parement en joints vifs et du blocage mis à nu — Prieuré N.D. D'Aleyrac, Drome(26) 10
1.3 Essais de cisaillement cyclique sur un marbre de Dionysos - Réaction tangentielle en fonction du déplacement tangentiel (d'après (Armand *et al.*, 1997)) 13
1.4 Tests de mortier sur des micro-assemblages 16
1.5 Evaluation de la résistance en compression des assemblages joint/mortier sur des prismes maçonnés 17
1.6 Comportements caractéristiques des joints de mortier 17
1.7 Comportement tangent d'un joint de mortier moderne sous sollicitation cyclique, d'après (Atkinson *et al.*, 1989) - épaisseur du joint : $13\,\mathsf{mm}$ - Surface du joint : $100 \times 420\,\mathsf{mm}^2$ - Pression normale : $13,7\,\mathsf{kN}$ 18
1.8 Comportement tangent d'un joint de mortier ancien sous sollicitation cyclique, d'après (Armand *et al.*, 1997) - Vitesse de sollicitation : $0,05\,\mathsf{mm.s}^{-1}$, Pression normale : $1\,\mathsf{MPa}$ 19
1.9 Évaluation des propriétés élastiques par un essai de compression uniaxial 21
1.10 Essais sous des états de contraintes homogènes 22
1.11 Essais sous des états de contraintes hétérogènes 23
1.12 Critère de rupture biaxial isotrope 25
1.13 Test biaxial traction-compression (d'après (Page, 1983)) 26
1.14 Test biaxial de double compression (d'après (Page, 1981)) 26
1.15 Comportement d'un géomatériau quasi-fragile, d'après (Dragon & Mróz, 1979) 31

2.1 Voûte & analyse limite 39
2.2 Convexe de résistance limite et principe de normalité 40
2.3 Critère de rupture des maçonneries, d'après (Delbecq, 1982) 42
2.4 Critère de rupture des maçonneries en contraintes généralisées, d'après (Delbecq, 1982) 43
2.5 Principe de normalité entre déformations et contraintes 45
2.6 Essai de charge-décharge sur un matériau NTM ou NTMP 49
2.7 Charge limite d'un mur chargé uniaxialement 51

2.8 Critère de plasticité composite pour les maçonneries, d'après (Lourenço *et al.*, 1997) . . . 55
2.9 Lois d'adoucissement en compression, d'après (Lourenço *et al.*, 1997) . . . 57
2.10 Evolution uniaxial et endommagement scalaire . . . 59
2.11 Critère d'endommagement de la maçonnerie (d'après Oñate *et al.* (1997)) . . . 60
2.12 Endommagement et adoucissement, d'après (Lotfi & Shing, 1991) . . . 64
2.13 Domaine d'élasticité et loi d'adoucissement(d'après Papa & Nappi (1997)) . . . 66
2.14 Deux exemples de violation du postulat de stabilité, d'après(Drucker, 1959) . . . 69
2.15 (a) Milieu régulier composé de blocs et un volume représentatif. (b) Compatibilité entre rotation et déplacement relatif entre deux blocs rigides, d'après (Mühlhaus, 1993) . . . 78
2.16 Efforts généralisés dans un milieu composé de blocs, d'après (Mühlhaus, 1993) 79

3.1 Discrétisation des efforts aux interfaces. . . . 86
3.2 Frottement non associé de Coulomb et frottement associé de Mohr-Coulomb pour les sols . . . 88
3.3 Surface limite du joint, d'après (Lotfi & Shing, 1994) . . . 95
3.4 Surface limite et loi de durcissement/adoucissement pour les éléments, d'après (Lotfi & Shing, 1994) . . . 97
3.5 Surface limite d'interface, d'après Lourenço & Rots (1997) . . . 98
3.6 Surface rugueuse - Aspérités et usure, d'après (Giambanco & Di Gati, 1997) . 100

4.1 Périodicité d'un appareil régulier - Exemple de définition d'un volume représentatif générateur . . . 110
4.2 Volume élémentaire représentatif d'une assise . . . 110
4.3 Procédure d'homogénéisation en deux étapes . . . 112
4.4 Cinématique de solide rigide pour chaque sommet de la cellule de base . . . 115
4.5 Domaine de résistance de la maçonnerie $\mathcal{G}^{hom}$, d'après (de Buhan & De Felice, 1997). La contrainte macroscopique σ^0 est représentée par Σ et f correspond au coefficient de frottement $\mu = \tan\phi$. . . . 117
4.6 Etapes d'homogénéisation . . . 119
4.7 Volume élémentaire représentatif . . . 120
4.8 Représentation des modes de chargements . . . 121
4.9 Modèle mécanique de la cellule de base dans la direction x, choisi par Lopez *et al.* (1999) permettant une réduction du nombre des variables internes plastiques. . . . 125
4.10 Cellule de base affaiblie par une fissure . . . 130
4.11 Plusieurs échelles de fissuration, d'après (Alpa & Monetto, 1994) . . . 133
4.12 d'après (Alpa & Monetto, 1994) . . . 134
4.13 d'après (Alpa & Monetto, 1994) . . . 135
4.14 d'après (Alpa & Monetto, 1994) . . . 135

5.1 Condition de SIGNORINI . . . 178
5.2 Frottement de TRESCA . . . 181
5.3 Frottement de COULOMB . . . 182
5.4 Comportement élastique en traction . . . 185
5.5 Prise en compte d'une résistance à la traction . . . 186
5.6 Evolution de l'endommagement . . . 188
5.7 Essai de charge-décharge dans la direction normale . . . 196
5.8 Essai de charge-décharge dans la direction tangentielle . . . 197
5.9 Exemple uniaxial illustrant le phénomène de saut de solution, d'après MONERIE (2000) . . . 202

6.1 Réduction aux variables de contact . . . 214
6.2 Schéma synoptique de l'approche NSCD, M. JEAN© . . . 217
6.3 Revue des schémas d'intégration qui satisfont le critère énergétique de stabilité, inspirée de KUHL & CRISFIELD (1999) . . . 221
6.4 Résolution du problème de contact frottant en 2D . . . 239

7.1 Maillage d'un bloc . . . 248
7.2 Réactions et déformée à l'équilibre, (amplification= 10000) . . . 248
7.3 Résultante sur le sol en fonction du temps . . . 250
7.4 Différents états d'équilibre pour différents pas de temps Amplification = 10000 . . . 251
7.5 Décomposition en somme directe . . . 253
7.6 Résultante sur le sol en fonction du temps . . . 254
7.7 Simulation d'affaissement de sol en quasi-statique (-50mm sur la gauche) . . . 255
7.8 Murette tridimensionnelle sous gravité (amplification=2.5E+06) . . . 256
7.9 Déformée d'un arc sous gravité, ($\times$30000) . . . 260
7.10 Ligne de poussée et placement des points de contact . . . 261
7.11 Effet du positionnement des points de contact . . . 263
7.12 Contraintes principales et déformée d'un portique avec arcs-boutants, ($\times$300) . . . 264
7.13 Fissures provoquées par une augmentation de portée . . . 265
7.14 Contraintes après un affaissement de sol, $-4\,\mathsf{cm}$, ($\times$10) . . . 266
7.15 Passage d'une onde de cisaillement, ($\times$200) . . . 267
7.16 Dôme circulaire soumis à la gravité . . . 269
7.17 Tour soumise à la gravité ($\times 2.5.10^6$) . . . 270
7.18 Dôme sur piliers soumis à la gravité . . . 272
7.19 Géométrie initial et maillage . . . 273
7.20 Déformées et faciès de fissures pour différentes valeurs de résistance du mortier. (a) Résistance à la traction de $1.5\,\mathsf{MPa}$,(b) Résistance à la traction légèrement supérieure aux joints plancher/brique de $1.6\,\mathsf{MPa}$ (c) Résistance limite de $2.1\,\mathsf{MPa}$ 275
7.21 Essai de cisaillement sur un panneau, d'après (LOURENÇO & ROTS, 1997) . . . 276

7.22 Faciès de rupture expérimentaux pour les panneaux pleins, issus initialement de Raijmakers & Vermelfoort (1992) et Vermelfoort *et al.* (1993). 277
7.23 Faciès de rupture expérimentaux pour les panneaux avec baie, issus initialement de Raijmakers & Vermelfoort (1992) et Vermelfoort *et al.* (1993). . . . 278
7.24 Maillage tridimensionnel du problème 278
7.25 Définition du plan séparateur et sélection des points de contact 287
7.26 Plan général du Palais des Papes, d'après D. Reppelin A.C.M.H. 290
7.27 La Tour Saint Laurent 291
7.28 Restitution d'un parement 292
7.29 Illustrations des opérations de maillage et de détection des contacts 293
7.30 Contraintes de von Mises dans le parement et la plate-bande 293
7.31 Prieuré Notre-Dame, plan général des vestiges, d'après Hartmann-Virnich (1996) 295
7.32 Vue intérieure, coté Nord-est 296
7.33 Vues de la voûte de l'abside principale 297
7.34 Vue de l'arc dans l'axe du transept Nord 298
7.35 Vues de l'arc du transept Nord - Extrait des couples stéréos 299
7.36 Couple stéréo-photogrammétrique de l'arc du transept Nord 300
7.37 Reconstitution de l'arc à partir d'hypothèses archéologiques et architecturales, d'après Drap *et al.* (2000) 301
7.38 Restitution des entités - Visualisation sous Microstation® Bentley 302

A.1 Approche de $\mathcal{K}$ par l'extérieur 7
A.2 Chargements extrêmes et chargements limites, d'après (Suquet, 1988). 12

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Propriétés mécaniques des éléments 12
1.2 Propriétés mécaniques des joints suivant le dosage - Source : Norme ACNOR A179 15

7.1 Paramètres génériques 258

ANNEXE A

Rappels de calcul à la rupture et d'analyse limite

Dans cette annexe, on rappelle le formalisme et les principaux résultats concernant le calcul à la rupture et l'analyse limite. La majeure partie des notations et des concepts sont empruntés aux travaux de Frémond & Friaà (1982) et Salençon (1983).

A.1 Calcul à la rupture

A.1.1 Modes de chargement dépendant de n paramètres

Pour rendre le calcul à la rupture efficace, en particulier en vue d'applications analytiques et numériques, on considère un système soumis à un chargement défini par un nombre fini de paramètre.

On considérera un système dans l'hypothèse des petites perturbations (géométrie fixée) dans un cadre quasi-statique pour simplifier les écritures. Les définitions et les notations concernant les grandeurs sthéniques et cinématiques de la déformation sont données dans le § 5.1. Simplement, pour un solide occupant un domaine Ω, soumis à un contrainte $\boldsymbol{\sigma}$, et à taux de déformations $\boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})$, pour la vitesse virtuelle $\hat{\boldsymbol{v}}$, la puissance virtuelle des efforts intérieurs s'exprime par :

$$\hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) = -\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})\, d\boldsymbol{x}, \tag{A.1.1}$$

Le système est soumis à un mode de chargement défini par :

- des forces de volume $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dans Ω,
- des données aux limites : efforts surfaciques $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ et vitesses imposées $\boldsymbol{v}^0(\boldsymbol{x})$, en chaque point $\partial\Omega$.

On définit les espaces suivants :

- champ des contraintes statiquement admissible (S.A.) :

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathrm{div}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans}\,\Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t} \quad \text{sur}\,\partial\Omega\}, \tag{A.1.2}$$

- champ des vitesses cinématiquement admissible (C.A.) :

$$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^0 \quad \text{sur}\,\partial\Omega\}, \tag{A.1.3}$$

- champ d'autocontraintes :

$$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}, \quad \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) = 0, \quad \forall \hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C}\}, \tag{A.1.4}$$

- champ d'autodéformations :

$$\mathcal{D} = \{\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}, \quad \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = 0, \quad \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{S}\}. \tag{A.1.5}$$

On dit que le système est soumis à un mode de chargement à n paramètres si $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel et si l'espace quotient $\mathcal{S}|_{\mathcal{A}}$ est de dimension n.

La puissance des efforts extérieurs peut alors s'exprimer sous la forme suivante :

$$\hat{\mathcal{P}}_{ext}(\hat{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\sigma}).\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}), \tag{A.1.6}$$

où $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\sigma}) \in \{\boldsymbol{Q}\}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et dépend linéairement de $\boldsymbol{\sigma}$,

$\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) \in \{\dot{\boldsymbol{q}}\}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et dépend linéairement de $\hat{\boldsymbol{v}}$.

Sous cette forme, on peut dire que le système est soumis à un mode de chargement à n paramètres si $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel et que $\mathcal{C}|_{\mathcal{S}}$ est de dimension n.

A.1.2 Domaine admissible pour les contraintes

La donnée d'un domaine admissible pour les contraintes permet de définir les capacités de résistance du matériau en chaque point $\boldsymbol{x}$. Nous ferons l'hypothèse qu'il est invariable, i.e., indépendant du temps et des sollicitations subies.

En tout point $\boldsymbol{x}$ de Ω, $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est un domaine invariable de $\mathbb{R}^6$ tel que :

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \notin \mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est impossible,

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est permis.

En règle générale, $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ possède les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ contient l'état de contraintes nulles :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = 0 \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x}). \tag{A.1.7}$$

2. $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est étoilé de centre 0 :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \quad \forall \alpha \in [0,1], \quad \alpha\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x}). \tag{A.1.8}$$

Le domaine $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est souvent défini par la donnée d'une fonction $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}))$ scalaire appelée fonction seuil :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \overset{\circ}{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}), \\ g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \overline{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}) \setminus \overset{\circ}{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}), \\ g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \notin \overline{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{A.1.9}$$

Si $\mathcal{G}$ est convexe, il est commode de choisir $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}))$ convexe.

Remarque A.1

La notion de matériau constitutif est à prendre au sens large. Elle englobe bien sûr les matériaux classiques, que l'on peut qualifier de volumiques mais aussi, les interfaces de contact entre les solides. Les lois de contact et de frottement peuvent alors être rangées dans cette notion.

Par commodité, on étend alors la définition de puissances des efforts intérieurs aux interfaces de la manière suivante :

$$\hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) = -\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Sigma} [\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \tag{A.1.10}$$

où Σ représente les interfaces du matériau et $[\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})]$ le saut de vitesses à ces interfaces.

❑

A.1.3 Chargement potentiellement supportable

Définitions. On considère un système mécanique dans une géométrie donnée soumis à un mode de chargement à n paramètres. Il s'agit de déterminer le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ des chargements $\boldsymbol{Q}$ pour lesquels le système sera potentiellement stable.

Pour cela, on écrit la condition nécessaire de stabilité suivante :

$$\text{Stabilité} \Rightarrow \text{compatibilité entre} \begin{cases} \text{équilibre statique sous } \boldsymbol{Q}, \\ \text{capacités de résistance du matériau.} \end{cases} \tag{A.1.11}$$

On définit l'ensemble $\mathcal{K}$ des chargements potentiellement supportables par l'intermédiaire de l'équivalence suivante :

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Q} \in \mathcal{K} \text{ (Chargement potentiellement supportable)} \\ \Updownarrow \\ \exists\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} / \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{gathered} \tag{A.1.12}$$

Définissons maintenant l'opérateur $\boldsymbol{L}$ qui associe à $\boldsymbol{\sigma}$ statiquement admissible le chargement $\boldsymbol{Q}$ qu'il équilibre. Sous l'hypothèse des petites perturbations, $\boldsymbol{L}$ est une application linéaire mais généralement non bijective. Son noyau $\mathcal{K}er\boldsymbol{L}$ est en fait l'espace $\mathcal{A}$ des champs autocontraints. Il est donc réduit à zéro uniquement dans le cas des structures isostatiques. Nous considérons pour simplifier la restriction suivante de $\boldsymbol{L}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} : \mathcal{S}|_{\mathcal{A}} &\longrightarrow \{\boldsymbol{Q}\}, \\ \boldsymbol{\sigma} &\longrightarrow \boldsymbol{Q}. \end{aligned} \tag{A.1.13}$$

On peut alors redéfinir l'ensemble des chargements potentiellement supportables :

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Q} \in \mathcal{K} \text{ (Chargement potentiellement supportable)} \\ \Updownarrow \\ \exists\, \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{Q}) / \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega. \end{gathered} \tag{A.1.14}$$

On définit les chargements extrêmes comme les chargements appartenant à la frontière de $\mathcal{K}$.

Introduisons maintenant l'espace $\mathcal{H}$ des contraintes statiquement admissibles et respectant les capacités de résistance du matériau :

$$\mathcal{H} = \{\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x}), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega\}. \tag{A.1.15}$$

L'ensemble des chargements potentiellement supportables est donc l'image de $\mathcal{H}$ par $\boldsymbol{L}$:

$$\mathcal{K} = \boldsymbol{L}(\mathcal{H}). \tag{A.1.16}$$

Propriétés. Du fait de la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{S}|_{\mathcal{A}}$ et de la linéarité de $\boldsymbol{L}$, les propositions suivante sont immédiates :

1. Si $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, 0 \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x})$, alors $\boldsymbol{Q} = 0 \in \mathcal{K}$.
2. Si $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est étoilé de centre 0, alors $\mathcal{K}$ est étoilé de centre O.

$$\boldsymbol{Q} \in \mathcal{K} \Rightarrow \quad \forall \alpha \in [0,1], \quad \alpha \boldsymbol{Q} \in \mathcal{K}. \tag{A.1.17}$$

3. Si $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est convexe, alors $\mathcal{K}$ est convexe.

De la manière que $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ peut être caractérisé par une fonction seuil k définie par :

$$k(\boldsymbol{Q}) = \inf_{\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{L}^{-1}(Q)} \quad \sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega} \left\{ g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})) \right\}. \tag{A.1.18}$$

Si $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}))$ est convexe, alors k est convexe de $\boldsymbol{Q}$.

Remarque A.2
La donnée unique d'un domaine admissible pour les contraintes, invariant, $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ permet l'obtention de $\mathcal{K}$, l'ensemble des chargements potentiellement supportables. Elle fournit une condition nécessaire de stabilité du système sous un chargement. Sans information supplémentaire, on ne peut pas préjuger de la stabilité du système et établir une condition suffisante (*voir* exemple § A.3).

Si le chargement $\boldsymbol{Q}$ est extérieur $\mathcal{K}$, on obtient une condition suffisante sur la perte de stabilité du système.

❑

A.1.4 Construction de $\mathcal{K}$ par l'intérieur

Grâce aux définitions (A.1.15) et (A.1.16), on construit $\mathcal{K}$ par l'intérieur, point par point. En règle général $\mathcal{K}$ est étoilé de centre 0, on procède par trajets radiaux en résolvant le problème de maximisation suivant :

Soit $\boldsymbol{Q}_1 \neq 0$ donné,

$$\text{maximiser } \lambda \text{ tel que } \exists \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \text{ en équilibre avec } \boldsymbol{Q}_\lambda = \lambda \boldsymbol{Q}_1. \tag{A.1.19}$$

Sauf dans des cas très simples (systèmes réticulés, ...), ce calcul ne peut pas être mené analytiquement. On fait alors appel aux méthodes numériques, comme les méthodes aux éléments finis qui permettent l'évaluation de l'opérateur $\boldsymbol{L}$.

Dans la cas particulier d'un domaine convexe, si l'on met en évidence m chargements $\boldsymbol{Q}_\lambda^m$ potentiellement supportables, l'enveloppe convexe de ces chargements dans $\mathbb{R}^n$ fournit une approximation par l'intérieur de $\mathcal{K}$.

A.1.5 Construction de $\mathcal{K}$ par l'extérieur

Approche en contraintes. Une approche par l'extérieur de $\mathcal{K}$ en contraintes peut être proposée mais elle conduit souvent à des problèmes difficiles a manipuler. En effet, il faut étudier la proposition contraposée suivante :

$$\text{Système certainement instable} \Leftrightarrow \text{incompatiblité entre} \begin{cases} \text{équilibre quasi-statique sous } \boldsymbol{Q}, \\ \text{capacités de résistance du matériau.} \end{cases} \tag{A.1.20}$$

En d'autres termes, il faut montrer que $\mathcal{H}(\boldsymbol{Q}) = \mathcal{H} \cap \boldsymbol{L}^{-1}(Q)$ est vide. Il faut donc être en mesure d'explorer $\mathcal{H}(\boldsymbol{Q})$ ou de trouver une incompatibilité entre une conséquence logique de l'équilibre sous $\boldsymbol{Q}$ et les capacités de résistance. Cette approche se révèle être assez difficile en pratique. Toutefois, elle a été utilisée par Coulomb (1773), puis reprise par Salençon (1983) sous le nom de méthodes d'équilibre de blocs. On cherche alors l'incompatibilité entre l'équilibre d'une partie supposée rigide de la structure et les capacités de résistance.

Approche en vitesses. Les constructions des domaines de résistance par l'extérieure sont souvent synonymes d'approche en vitesses. La condition $\boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{Q})$ exprime en fait l'équilibre de la structure sous $\boldsymbol{Q}$. Elle peut être exprimée de manière équivalente par le Théorème des Puissances Virtuelles (*voir* § 5.1.3) :

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{Q}) \\ \Updownarrow \\ \forall \hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C}, \quad -\hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) = \hat{\mathcal{P}}_{ext}(\hat{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\sigma}).\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}). \end{gathered} \tag{A.1.21}$$

En se donnant $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\sigma})$, il reste à démontrer l'incompatibilité de (A.1.21) avec les capacités de résistance du matériau. En clair, si il existe une vitesse $\hat{\boldsymbol{v}}$ tel que, pour $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\sigma})$, on ne puisse vérifier pas l'égalité des puissances, on montre alors que $\boldsymbol{Q}$ est à l'extérieur de $\mathcal{K}$.

La condition $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ permet de majorer la puissance des efforts intérieurs. En posant :

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = \sup \left\{ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) \quad / \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x}) \right\}, \tag{A.1.22}$$

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}), [\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})]) = \sup \left\{ [\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})] \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \quad / \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{G}(\boldsymbol{x}) \right\}, \tag{A.1.23}$$

la puissance des efforts intérieurs se trouve majorée par :

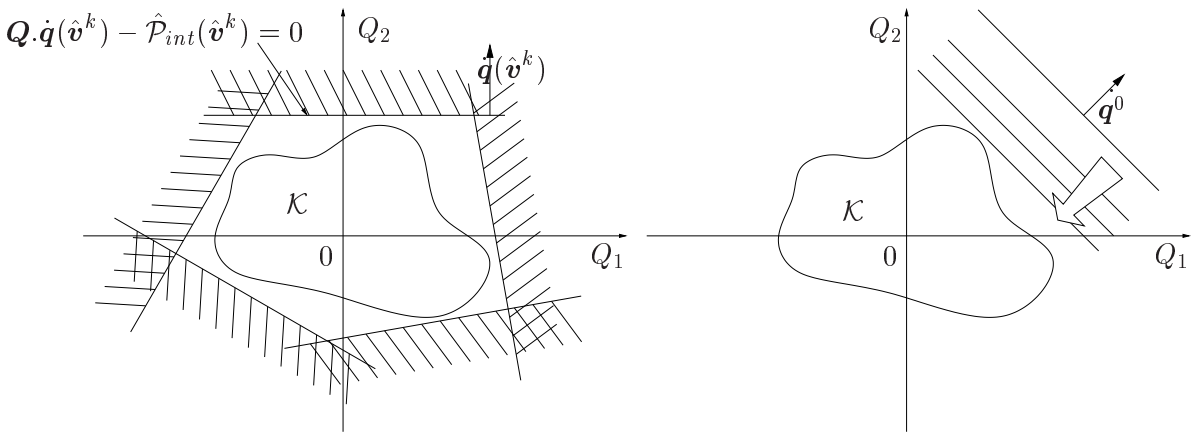
$$\hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) = -\int_{\Omega(t)} \pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}))\, d\boldsymbol{x} - \int_{\Sigma} \pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}), [\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})])\, d\boldsymbol{x}. \tag{A.1.24}$$

On peut alors exprimer une condition suffisante sur le chargement sous la forme suivante :

$$\left.\begin{array}{c} \exists \hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C} \text{ telle que} \\ \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) < \boldsymbol{Q}.\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Q} \notin \mathcal{K}, \tag{A.1.25}$$

ou de manière équivalente :

$$\mathcal{K} \subset \left\{ \boldsymbol{Q} / \quad \boldsymbol{Q}.\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) - \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) \leq 0 \right\}, \quad \forall \hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C}. \tag{A.1.26}$$



(a) variation de $\hat{\boldsymbol{v}}^k$ (b) variation de $\boldsymbol{q}^o$

FIGURE A.1 – *Approche de $\mathcal{K}$ par l'extérieur*

D'un point de vue pratique, une première méthode consiste à se donner une famille de vitesses virtuelles $(\hat{\boldsymbol{v}}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $\hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}^k)$ est finie. On forme ensuite l'enveloppe convexe des hyperplans d'équations (*voir* figure A.1(a)) :

$$\boldsymbol{Q}.\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}^k) - \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}^k) = 0. \tag{A.1.27}$$

On peut aussi chercher à borner $\mathcal{K}$ dans une direction donnée $\dot{\boldsymbol{q}}^0$ (*voir* figure A.1(b)). Cela nous conduit à minimiser la fonctionnelle suivante $\boldsymbol{Q}.\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) - \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}})$ sur $\hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C}$ telle que $\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) = \dot{\boldsymbol{q}}^0$.

Estimation et étude de la fonction π La recherche de $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}))$ consiste à chercher pour $\boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})$ donné la valeur maximale du produit contracté : $\boldsymbol{\sigma}(x) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})$. Autrement dit, cela revient en se donnant une direction $\boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})$ dans l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques à chercher les points de la frontière de $\mathcal{G}$ qui ont la normale orientée suivant $\boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})$.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

1. pas de points réalisant la condition :

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = +\infty,$$

2. un unique point réalisant la condition :

$$\exists\, !\boldsymbol{\sigma}^\star, \quad \pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = \boldsymbol{\sigma}^\star(x) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}),$$

3. plusieurs points réalisant la condition :

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}^\star} \left\{ \boldsymbol{\sigma}^\star(x) \,\bar{\bar{\otimes}}\, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) \right\}.$$

Si $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est étoilé de centre 0, $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}))$ est une fonction positive homogène de degré 1. Elle est en fait la fonction d'appui de l'enveloppe convexe de $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$.

Cas où $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est une domaine convexe. Si de plus $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est convexe, il n'y a plus que deux cas à distinguer :

1. aucun point ne réalise la condition :

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = +\infty,$$

2. un unique point réalise la condition :

$$\exists! \boldsymbol{\sigma}^\star, \quad \pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = \boldsymbol{\sigma}^\star(x) \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}).$$

En caractérisant $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ par sa fonction seuil $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}))$, $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}))$ peut être exprimée de la manière suivante :

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = \boldsymbol{\sigma}^\star(x) \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) \text{ si } \exists \boldsymbol{\sigma}^\star \text{ tel que } \begin{cases} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}^\star(\boldsymbol{x})) = 0, \\ \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) \in \lambda \partial g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}^\star(\boldsymbol{x})), \\ \lambda \geq 0, \end{cases} \tag{A.1.28}$$

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = +\infty \text{ sinon.} \tag{A.1.29}$$

Une définition équivalente peut être donnée grâce à la fonction indicatrice $\Phi_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}))$ de $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$:

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = \boldsymbol{\sigma}^\star(x) \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) \text{ si } \exists \boldsymbol{\sigma}^\star \text{ tel que } \begin{cases} \Phi_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}^\star(\boldsymbol{x})) = 0, \\ \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) \in \partial \Phi_{\mathcal{G}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}^\star(\boldsymbol{x})), \end{cases} \tag{A.1.30}$$

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = +\infty \text{ sinon.} \tag{A.1.31}$$

La fonction $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}))$ est ici la fonction d'appui du domaine convexe $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$. Elle est elle-même convexe et la transformée de Legendre-Fenchel de $\Phi_{\mathcal{G}}$.

Fonction d'appui de $\mathcal{K}$ pour $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ convexe Pour $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ convexe, nous définirons par $\mathcal{K}_1$ l'approximation convexe par l'extérieur de $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}_1 = \bigcap_{\hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C}} \left\{ \boldsymbol{Q} / \quad \boldsymbol{Q}.\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) - \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) \leq 0 \right\}. \tag{A.1.32}$$

Comme pour $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$, $\mathcal{K}_1$ peut être défini par sa fonction indicatrice $\Phi_{\mathcal{K}_1}$:

$$\Phi_{\mathcal{K}_1}(\boldsymbol{Q}) = \sup_{\hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C}} \{ \boldsymbol{Q}.\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) - \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) \}, \tag{A.1.33}$$

qui est la transformée de Legrendre-Fenchel de la fonction d'appui, $\hat{\mathcal{P}}_{int}$.

On sait que si $\mathcal{G}(\boldsymbol{x})$ est un domaine convexe, $\mathcal{K}$ l'est aussi. On peut alors le caractériser par sa fonction d'appui :

$$\Pi(\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}})) = \sup_{\boldsymbol{Q} \in \mathcal{K}} \left\{ \boldsymbol{Q}.\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) \right\}, \tag{A.1.34}$$

ou directement par

$$\overline{\mathcal{K}} = \bigcap_{\hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C}} \left\{ \boldsymbol{Q} / \quad \boldsymbol{Q}.\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) - \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) \leq 0 \right\}. \tag{A.1.35}$$

Les résultats de l'approche par l'extérieur montre que :

$$\Pi(\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}})) \leq \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}), \quad \forall \hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C}. \tag{A.1.36}$$

ce qui nous montre que :

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1. \tag{A.1.37}$$

Frémond & Friaà (1982) donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'égalité $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$ soit vérifiée. En particulier, si $\boldsymbol{L}(\mathcal{H})$ est fermé, on alors égalité. Une conséquence intéressante de l'égalité de ces deux ensembles est que l'inégalité (A.1.36) est atteinte de la manière suivante :

$$\Pi(\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}})) = \inf \left\{ \hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) / \quad \hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C} \text{ et } \dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) = \dot{\boldsymbol{q}}^0 \right\}. \tag{A.1.38}$$

A.2 Analyse limite

Nous avons vu dans la partie précédente que la théorie du calcul à la rupture a permis de dégager la notion de chargements potentiellement supportables. Nous avons vu que l'ensemble de ces chargements $\mathcal{K}$ était la donnée la plus élaborée qu'il était possible d'acquérir en connaissant uniquement le domaine du matériau $\mathcal{G}$.

La théorie des charges limites va permettre de compléter ces résultats, en s'attachant aux matériaux élastiques linéaires, parfaitement plastiques, dont les principales propriétés comme l'hypothèse de dissipativité normale, sont rappelées dans le § 5.1.4.d. Cette restriction du calcul à la rupture permet d'apporter une information supplémentaire sur le comportement du matériau. En particulier, on caractérise son comportement à l'intérieur du domaine et sur la frontière lors de l'écoulement plastique.

A.2.1 Réponse à un chargement à n paramètres

Le domaine $\mathcal{G}$ n'est autre que le domaine d'élasticité du matériau, noté $\mathcal{P}$. La fonction seuil associée p limite alors l'état de contraintes vis à vis de plasticité. On reprend pour le reste les notations introduites en calcul à la rupture.

Si l'on considère un système soumis à un mode de chargement $\boldsymbol{Q}$ à n paramètres, linéairement élastique et parfaitement plastique obéissant à la règle de normalité, on peut montrer que l'état du système est déterminé tant que le trajet de chargement reste intérieur à $\mathcal{K}$.

Considérons $\boldsymbol{Q}^+$ le chargement extrême situé à l'intersection du trajet de chargement et de la frontière de $\mathcal{K}$. De part la définition de $\mathcal{K}$ et le comportement plastique parfait du matériau, $\boldsymbol{Q}^+$ constitue un chargement limite possédant les propriétés suivantes, le définissant :

1. le trajet de chargement ne peut être poursuivi au delà de $\boldsymbol{Q}^+$,
2. jusqu'à $\boldsymbol{Q}^+$ la réponse du système élasto-plastique est bien déterminée.

A.2.2 Propriétés des chargements limites

De part la définition des chargements extrêmes et des chargements limites, les propriétés suivantes peuvent être énoncées :

1. le chargement limite sur un trajet de chargement est indépendant des conditions initiales,
2. il est indépendant du trajet de chargement,
3. il est indépendant des caractéristiques élastiques linéaires du matériau,
4. il peut être déterminé par l'application de méthodes, statiques et cinématiques, présentées pour les chargements extrêmes dans la partie précédente.

A.2.3 Nouvelle interprétation de $\mathcal{K}$

Compte tenu du fait que l'état du système est déterminé pour tout chargement intérieur à $\mathcal{K}$, L'ensemble des chargements potentiellement supportables $\mathcal{K}$ devient l'ensemble des chargements qui seront effectivement supportés. $\mathcal{K}$ peut être qualifié de domaine des chargements stables ou domaine de sécurité du système. Ceci est une conséquence de la règle de normalité qui implique le principe du travail plastique maximal.

A.2.4 Approche de $\mathcal{K}$ par l'intérieur - Méthode statique

Du fait de cette nouvelle interprétation de $\mathcal{K}$, on est conduit à reformuler la construction de $\mathcal{K}$ de la manière suivante :

- Le système supportera, du point de vue plastique, tout chargement $\boldsymbol{Q}$ tel que l'on puisse trouver un champ de contraintes, $\boldsymbol{\sigma}$, statiquement admissible ($\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$), plastiquement admissible ($\forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{P}(\boldsymbol{x})$) qui équilibre $\boldsymbol{Q}$.

A.2.5 Approche de $\mathcal{K}$ par l'extérieur - Méthode cinématique

Comme en calcul à la rupture, considérons un champ de vitesses $\hat{\boldsymbol{v}}$ cinématiquement admissible ($\hat{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{C}$) telle que :

- il y ait une déformation vis à vis du mode de chargement imposé :

$$\dot{\boldsymbol{q}}(\hat{\boldsymbol{v}}) \neq 0, \tag{A.2.1}$$

- la puissance dissipable soit finie :

$$\hat{\mathcal{P}}_{int}(\hat{\boldsymbol{v}}) < +\infty. \tag{A.2.2}$$

On rappelle que cette puissance est calculée grâce à la fonction π de la manière suivante :

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) \bar{\bar{\otimes}} \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) \text{ si } \exists \boldsymbol{\sigma} \text{ tel que } \begin{cases} p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})) = 0 (\boldsymbol{\sigma} \text{est sur a frontière de } \mathcal{P}), \\ \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}) \in \dot{\lambda} \partial p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})), \\ \dot{\lambda} \geq 0, \end{cases} \tag{A.2.3}$$

$$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})) = +\infty \text{ sinon.} \tag{A.2.4}$$

Puisque le matériau suit la règle de normalité, pour que la puissance dissipée soit finie, il faut que $\boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})$ soit un taux de déformation qui puisse être associé par la règle d'écoulement plastique à la limite d'écoulement. On dit que $\boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}})$ doit être plastiquement admissible.

S'il en est ainsi, $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}))$ s'identifie alors à la dissipation plastique par unité de volume $\phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}(\hat{\boldsymbol{v}}))$ présentée au § 5.1.4.d.

La méthode cinématique de recherche de charges limites peut donc s'énoncer ainsi :

– Tout chargement dont la puissance dans un champ de vitesses cinématiquement et plastiquement admissibles est supérieure à la puissance dissipée ne sera pas supporté par le système.

Nayroles (1970) ; Frémond & Friaà (1982) ont démontré l'équivalence des méthodes statiques et cinématiques dans le cas des matériaux plastiques parfaits, où la règle de normalité est respectée pour une convexe $\mathcal{P}$ fermé.

A.2.6 Cas des comportements plastiques non-associés

Dans le cas de comportements plastiques non-associés, les méthodes statiques et cinématiques ne sont plus équivalentes. Il est par contre possible d'obtenir des estimations des chargements stables en considérant les cas limites de la plasticité associée et de la plasticité avec un écoulement tangent au domaine d'élasticité. Pour de détails sur ces résultats, le lecteur intéressé pourra consulter les travaux de Palmer (1966) et Radenkovic (1970).

A.3 Exemple didactique de la différence entre calcul à la rupture et analyse limite

L'exemple, qui suit, est tiré de (Suquet, 1988). Il permet de comprendre les différences fondamentales qu'il peut y avoir entre chargements extrêmes et chargements limites.

Cet exemple, illustré à la figure A.2, est composé d'un système de deux barres en parallèle, de section unité, constituées de deux matériaux élastiques fragiles différents. Les matériaux sont caractérisés par leurs contraintes maximales σ_i^{max}, leurs déformations maximales ϵ_i^{max} et leur modules d'Young E_i. Le système est chargé par une unique force caractérisée par le paramètre λ.

L'équilibre peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sigma_i = cste, \text{ dans chaque matériau,} \tag{A.3.1}$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \lambda. \tag{A.3.2}$$

Le chargement extrême qui peut être déduit simplement par la méthode statique (A.1.19) vaut donc :

$$\lambda^s = \sigma_1^{max} + \sigma_2^{max}. \tag{A.3.3}$$

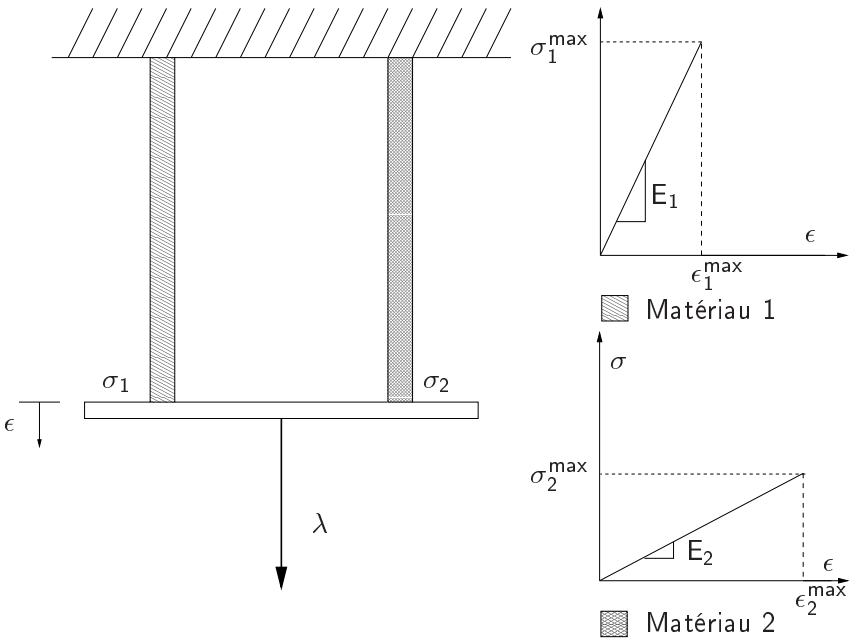


FIGURE A.2 – *Chargements extrêmes et chargements limites, d'après (*SUQUET*, 1988).*

Si maintenant, on tient compte des déformations maximales que peuvent supporter les barres, les déformations doivent vérifier :

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \leq \inf(\epsilon_1^{max}, \epsilon_2^{max}) = \epsilon_1^{max}. \tag{A.3.4}$$

La contrainte maximale qui peut être atteinte dans le matériau 2, tant que le matériau 1 n'est pas ruiné, est :

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_1^{max}, \tag{A.3.5}$$

et conduit donc au chargement maximum tant que les deux barres ne sont pas cassées suivant :

$$\lambda = \sigma_1^{max} + E_2 \epsilon_1^{max} < \lambda^s. \tag{A.3.6}$$

Cependant, un chargement plus élevé peut être équilibré si la barre 1 casse, soit :

$$\lambda = \sigma_2^{max}. \tag{A.3.7}$$

En résumé, si l'on tient compte des lois de comportements effectives des matériaux et pas seulement des capacités de résistance du matériau en contraintes, la charge physiquement acceptable vaut :

$$\lambda^{max} = \sup(\sigma_2^{max}, \sigma_1^{max} + E_2 \epsilon_1^{max}) < \lambda^s. \tag{A.3.8}$$

On peut donc remarquer que le chargement extrême λ^s surestime les limites de résistance d'une structure fragile. Dans le cas de matériau élastoplastique parfait, si une barre atteint la limite d'élasticité, elle continue de supporter la contrainte à l'écoulement. Ceci permet alors à la structure d'atteindre la charge limite λ_s.

ANNEXE B

Rudiments d'analyse convexe

Sans vouloir prétendre à la plus grande rigueur et exhaustivité, nous précisons dans cette annexe quelques notions d'analyse convexe nécessaires à la formulation et la résolution des modèles contenus dans ce mémoire. Les principales définitions seront rappelées ainsi que les principaux théorèmes, en renvoyant aux textes classiques pour de plus amples détails : (Moreau, 1967 ; Rockafellar, 1970 ; Brezis, 1973 ; Ekeland & Temam, 1976)

B.1 Ensembles et fonctionnelles convexes

On considère dans ce paragraphe que X est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

B.1.1 Ensembles convexes et cônes

1 **Définition**

On dit que l'ensemble $K \subset X$ est convexe si et seulement si

$$\forall x \in K, \forall y \in K, \forall \lambda \in [0,1], \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in K. \tag{B.1.1}$$

❑

Par convention, on considère que l'ensemble vide $\emptyset$ est convexe.

2 **Définition**

On dit que l'ensemble $K \subset X$ est un cône si et seulement si

$$\forall x \in K, \forall \lambda \geq 0, \qquad \lambda x \in K. \tag{B.1.2}$$

❑

Une cône convexe se définit donc de la manière suivante :

3 **Définition**

On dit que l'ensemble $K \subset X$ est un cône convexe si et seulement si

$$\forall x \in K, \forall y \in K, \qquad x + y \in K. \tag{B.1.3}$$

❑

Un cône est particulièrement important dans la pratique, il s'agit du cône tangent (au sens de Bouligand) :

4 **Définition**

Soit un ensemble $K \subset X$, soit $x \in K$, le cône tangent à K en x, $T_K(x)$ est défini par

$$T_K(x) = \bigcup_{y \in K} \bigcup_{\lambda > 0} \lambda (y - x). \tag{B.1.4}$$

❑

Si $K \subset X$ est un ensemble convexe, alors $T_K(x)$ est un cône convexe.

B.1.2 Fonctionnelles convexes

Dans la suite, on considérera des fonctions de X à valeurs dans $]-\infty,+\infty] = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ [1].

5 **Définition**

Soit K un ensemble convexe de X, on dit qu'une fonction f définie sur K à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est convexe si et seulement si

$$\forall x \in K, \forall y \in K, \forall \lambda \in [0,1], \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{B.1.5}$$

❑

On parle de fonction strictement convexe lorsque l'inégalité est stricte et de fonction convexe propre si la fonction n'est identiquement égale à $+\infty$.

1 **Théorème**

Une fonction f définie sur $K \subset X$ est convexe si et seulement la fonction $\bar{f}$ qui la prolonge à X tout entier,

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K, \\ +\infty & \text{si } x \notin K, \end{cases} \tag{B.1.6}$$

est convexe.

❑

Dans la suite, on ne considérera que des fonctions convexes définies sur l'espace X entier en considérant si nécessaire le prolongement qui vient d'être défini.

6 **Définition**

On appelle épigraphe d'une fonction f, noté $\mathrm{epi}(f)$, l'ensemble suivant :

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x,r) \in X \times \mathbb{R}, f(x) \leq r\}. \tag{B.1.7}$$

❑

On peut définir un épigraphe strict si l'inégalité dans la définition 6 est stricte.

2 **Théorème**

Une fonction est convexe si et seulement son épigraphe (resp. strict) est une partie convexe de $X \times \mathbb{R}$.

❑

7 **Définition**

On appelle domaine effectif d'une fonction convexe f, noté $\mathrm{dom}(f)$, l'ensemble suivant :

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in X, f(x) < +\infty\}. \tag{B.1.8}$$

❑

1. Le cas des fonctions à valeurs dans $[-\infty,+\infty]$ peut être envisagées mais cela nécessite quelques précautions supplémentaires quant aux opérateurs d'addition. *voir* (Moreau, 1967)

Une fonction convexe particulièrement intéressante est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe, qui se définit de la manière suivante :

8 **Définition**
Soit $A \subset X$ une partie de X, la fonction indicatrice de A, ψ_A est définie par

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ +\infty & \text{si } x \notin A. \end{cases} \tag{B.1.9}$$

❑

3 **Théorème**
Une fonction indicatrice d'un ensemble $K \subset X$ est convexe si et seulement si K est convexe.

❑

On peut remarquer que l'étude des ensembles convexes peut se faire au moyen des fonctions convexes grâce à la définition de la fonction indicatrice. De même, l'étude des fonctions convexes peut se faire à partir des ensembles convexes via leurs épigraphes.

Une autre fonction convexe est aussi intéressante à utiliser dans la pratique. Il s'agit de la fonction jauge dont on donne la définition suivante :

9 **Définition**
On dit que $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction jauge si elle possède les propriétés suivantes :

1. f prend ses valeurs dans $[0, +\infty]$,
2. $f(0) = 0$,
3. f est positivement homogène, i.e. $\forall x \in X, \forall \lambda]0, +\infty[, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$,
4. f est convexe.

❑

10 **Définition**
Pour toute partie convexe $K \subset X$, il existe une fonction et une seule telle que :

$$f(x) = \inf\{k \in]0, +\infty[, x \in k\, K\}. \tag{B.1.10}$$

On dit que f est la jauge de l'ensemble convexe K.

❑

B.2 Semi-continuité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Dans ce paragraphe, X désigne un espace topologique.

11 **Définition**
On dit qu'une fonction $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si l'ensemble

$$[f^{\leq r}] = \{(x \in X, f(x) \leq r\}, \tag{B.2.1}$$

est fermé dans X, $\forall r \in \mathbb{R}$.

❑

12 **Définition**
On dit qu'une fonction $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si l'ensemble

$$[f^{<r}] = \{(x \in X, f(x) < r\}, \tag{B.2.2}$$

est ouvert dans X, $\forall r \in \mathbb{R}$.

❑

Ces définitions peuvent s'interpréter de façon usuelle en terme de convergence, par exemple, pour la semi-continuité inférieure :

4 **Théorème**
Si $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction s.c.i. et si la suite (x_n) converge vers x_0 alors :

$$\lim_{n \to +\infty} \inf f(x_n) \geq f(x_0). \tag{B.2.3}$$

❑

Ces définitions peuvent aussi être transportées sur des ensembles de $X \times \mathbb{R}$ ce qui révèle particulièrement intéressant pour les fonctions convexes.

5 **Théorème**
$f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction s.c.i. si et seulement si son épigraphe est fermé.

❑

On parle aussi pour les fonctions convexes s.c.i de fonctions convexes fermées. Par exemple, une fonction indicatrice d'un convexe K est s.c.i. si et seulement K est un convexe fermé.

B.3 Fonctions convexes conjuguées.

On considère dans la suite de cette annexe que X est un espace de Banach réflexif sur le corps $\mathbb{R}$. On notera X' son dual topologique, et le $\langle ., . \rangle$ le produit de dualité en X et X'.[2]

B.3.1 Fonction conjuguée d'une fonction numérique

13 **Définition**
Soit une fonction $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on appelle la fonction conjuguée de f la fonction notée $f^\star$, définie pour tout $y \in X'$ par

$$f^\star(y) = \sup_{x \in X} \left[\langle x, y \rangle - f(x)\right]. \tag{B.3.1}$$

❑

2. Bien sur, le choix d'un espace de Banach réflexif est un cadre assez rassurant souvent beaucoup trop riche pour les résultats qui vont être présentés. Ce choix étant fait pour ne pas trop alourdir la présentation.

Pour toute fonction $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la fonction conjuguée $f^\star$ est une fonction convexe s.c.i. sur X'. En effet, pour $x \in X$ fixé la fonction $f \mapsto \langle x, y\rangle - f(x)$ est convexe et continue. L'enveloppe convexe de ces fonctions, lorsque x parcourt X est convexe s.c.i. On parle communément pour l'opération qui fait passer de f à $f^\star$ de transformée de Legendre-Fenchel, ou, pour la fonction conjuguée, de transformée de Legendre-Fenchel.

A titre d'exemple, si A est une partie non vide quelconque de X, on considère sa fonction indicatrice ψ_A. La fonction conjuguée de ψ_A se réduit alors à

$$\psi_A^\star(y) = \sup_{x \in A} \langle x, y\rangle, \tag{B.3.2}$$

qui est par définition la fonction d'appui de l'ensemble A. C'est une fonction convexe s.c.i., positivement homogène.

6 **Théorème**

On suppose que $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une fonction convexe, s.c.i propre alors

$$f^{\star\star} = f. \tag{B.3.3}$$

❑

Dans le cas où la fonction n'est pas une fonction convexe, la double transformée de Legendre-Fenchel permet de « convexifier » la fonction en la considérant une enveloppe de fonctions affines.

Si maintenant on considère un ensemble convexe fermé $K \subset X$ non vide, la fonction indicatrice ψ_K de cet ensemble est semi-continue inférieurement propre et sa fonction conjuguée, qui est la fonction d'appui de K l'est aussi. Si l'on considère la conjuguée de la fonction conjuguée $\psi_K^\star$, on retrouve la fonction indicatrice de K.

B.3.2 Fonctions duales.

14 **Définition**

On dit que deux fonctions $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sont duales si chacune est la fonction conjuguée de l'autre :

$$f^\star = g, \qquad g^\star = f. \tag{B.3.4}$$

❑

15 **Définition**

On dit que deux point $x \in X$ et $y \in X'$ sont conjugués par au couple de fonctions duales f et g si on a l'égalité suivante :

$$f(x) + g(y) = \langle x, y\rangle. \tag{B.3.5}$$

❑

Par abus de langage, on parle souvent de fonctions conjuguées pour des fonctions duales. Les fonctions indicatrice et d'appui d'un ensemble convexe fermé sont des fonctions convexes conjuguées.

B.3.3 Ensemble et cône polaires

On a vu que la correspondance entre les ensembles convexes et leurs fonctions d'appui exprime une certaine dualité entre le fait d'être positivement homogène et le fait d'être une fonction indicatrice. Ceci peut se concrétiser par la définition de cône polaire à un cône convexe.

16 **Définition**
Soit un cône convexe $K \subset X$, K° est appelé cône polaire de K défini par :

$$K^\circ = \left\{ y \in X', \forall x \in K, \langle x, y \rangle \leq 0 \right\}. \tag{B.3.6}$$

K° est un cône convexe fermé.

❑

Si $K \subset X$ est un cône convexe non vide, $K^{\circ\circ}$ est l'adhérence du cône K. Si K est fermé, alors $K^{\circ\circ} = K$

Un exemple intéressant est le cône polaire d'un cône tangent à un ensemble convexe K qui définit le cône normal à K en un point.

17 **Définition**
Soit un ensemble convexe $K \subset X$, soit $x \in K$, le cône normal à K en x, $N_K(x)$ est défini par

$$N_K(x) = \left\{ y \in X', \forall z \in T_K(x), \langle y, z \rangle \leq 0 \right\}. \tag{B.3.7}$$

❑

En règle général, dans un espace vectoriel topologique, on modifie la définition du cône tangent en prenant l'adhérence du cône tangent classique. Ceci permet d'obtenir un cône tangent fermé et donc le polaire du cône polaire de $T_K(x)$ est directement $T_K(x)$.

La notion de polarité pour les ensembles convexes qui ne sont pas forcément des cônes peut être généralisée en considérant les fonctions jauges. Cela conduit à la définition suivante :

18 **Définition**
Soit $K \subset X$, un ensemble convexe non vide, K° est appelé ensemble polaire de K défini par :

$$K^\circ = \left\{ y \in X', \forall x \in K, \langle x, y \rangle \leq 1 \right\}. \tag{B.3.8}$$

❑

Il est intéressant de remarquer que K° contient l'origine. Si $K \subset X$ est fermé et contient l'origine, $K^{\circ\circ} = K$.

B.4 Sous-différentiabilité des fonctionnelles convexes

La notion de sous-différentiabilité et la définition de sous-différentiel permettent de prolonger les notions de différentiel et de gradient pour des fonctions dont la régularité ne suffit pas pour leur différentiabilité.

19 **Définition**
On dit que la fonction f de X dans $]-\infty,+\infty]$ est sous différentiable au point $x_0 \in X$ s'il existe une fonction affine continue prenant la même valeur qu'elle au point x_0 (cela implique que $f(x_0) \in \mathbb{R}$) et la minorant partout sur X.

❑

20 **Définition**
Une telle minorante peut s'écrire :

$$x \mapsto \langle x - x_0, y_0 \rangle + f(x_0). \tag{B.4.1}$$

On dit que la « pente » y_0 de cette fonction affine est un sous-gradient de h au point x_0.

❑

21 **Définition**
L'ensemble (éventuellement vide) des sous-gradients de f au point x_0 est appelé le sous-différentiel de la fonction en ce point et est noté :

$$\partial f(x_0) = \{y, \forall x \in X, \langle x - x_0, y \rangle \leq f(x) - f(x_0)\}. \tag{B.4.2}$$

❑

Le fait que le sous-différentiel peut être éventuellement vide permet de la définir pour tous types de fonction. Le sous-différentiel d'une fonction f au point x_0 est une partie convexe fermée (éventuellement vide) et l'opérateur $\partial f : X \mapsto X'$ est une multi-application que l'on nomme le sous-différentiel.

La notion de sous-différentiel tire une bonne partie de son intérêt de la remarque suivante :

7 **Théorème**
La fonction $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ possède un minimum, atteint au point x_0 si et seulement si $0 \in \partial f(x_0)$.

❑

Le théorème suivant donne un résultat de sous-différentiabilité des fonctions convexes et rend du compte du fait que la notion de sous-différentiel est particulièrement bien adaptée aux fonctions convexes.

8 **Théorème**
Soit $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, si f est finie et continue en x_0 alors

$$\partial f(x) \neq \emptyset, \forall x \in \text{int dom}(f)$$

❑

En fait, ce théorème peut être rapproché d'une propriété très intéressante des fonctions convexes sur un espace vectoriel topologique :

9 **Théorème**
Soit f une fonction convexe sur un espace vectoriel topologique X à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. S'il existe un ouvert dans X sur lequel f est majorée, alors f est continue sur l'intérieur (visiblement non vide) de dom(f)

❑

Revenons au cas particulier de fonctions convexes que sont les indicatrices d'ensemble convexe. Le sous différentiel d'une fonction indicatrice, ψ_K d'un convexe $K \subset X$ vaut alors :

$$\partial\psi_K(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin K, \\ N_k(x) & \text{si } x \in K \setminus \text{ int } K, \\ 0 & \text{si } x \in \text{ int } K. \end{cases} \tag{B.4.3}$$

Une propriété lie les fonctions conjuguées au sous-différentiel. Elle peut s'énoncer de la manière suivante :

10 **Théorème**
Si f et g sont deux fonctions duales, les trois propriétés suivantes sont équivalentes pour un couple de points, x et y :

$$y \in \partial f(x), \tag{B.4.4}$$

$$x \in \partial g(y), \tag{B.4.5}$$

$$f(x) + f(y) = \langle x, y. \rangle \tag{B.4.6}$$

❑

Ces relations sont très intéressantes d'un point de vue pratique car $\partial g = \partial f^\star$ peut être vue comme l'application réciproque de ∂f. Ceci permet en particulier de passer d'un problème primal sur X en un problème dual sur X'. Dans les problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes, ceci peut être très intéressant car le problème primal peut ne pas avoir de solution alors que le problème dual en possède.

B.5 Monotonie des multi-applications sous-différentielles

On parle de multi-applications pour les applications multivoques. Soit T une multi-application de X dans X', T(x) est pour chaque $x \in X$ une partie de X'.

22 **Définition**
On appelle domaine effectif d'une multi-application, $T : X \mapsto X'$ l'ensemble de X :

$$\text{dom}(T) = \{x \in X, T(x) \neq \emptyset\}. \tag{B.5.1}$$

❑

23 **Définition**

On appelle graphe d'une multi-application, $T : X \mapsto X'$ l'ensemble de $X \times X'$:

$$\mathrm{Gr}(T) = \left\{(x, y) \in X \times X', y \in T(x)\right\}. \tag{B.5.2}$$

❑

24 **Définition**

On dit qu'une multi-application $T : X \mapsto X'$ est monotone[3] si

$$\forall x \in X, \forall x' \in X, \forall y \in T(x), \forall y' \in T(x'), \qquad \langle x - x', y - y' \rangle \geq 0. \tag{B.5.3}$$

❑

11 **Théorème**

Pour toute fonction $f : X \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la multi-application ∂f de X dans X' est monotone.

❑

Cette propriété permet de généraliser la propriété des fonctions convexes différentiables dont le gradient est une application (univoque) monotone. Le succès des méthodes variationnelles pour établir l'existence de solutions à des problèmes fonctionnels est étroitement lié à cette monotonie. Pour plus de détails sur ces aspects, on renvoie à Brezis (1973).

Par contre, toute multi-application monotone n'est pas forcement un sous-différentiel. Pour cela, une hypothèse supplémentaire doit être formulée.

25 **Définition**

On dit qu'une multi-application $T : X \mapsto X'$ est cycliquement monotone si pour tout entier $n > 0$ et toute famille de couple $(x_i, y_i \in T(x_i)) \in X \times X', i \in [\![1, n]\!]$, on a l'inégalité :

$$\langle x_1 - x_0, y_0 \rangle + \ldots + \langle x_n - x_{n-1}, y_{n-1} \rangle + \langle x_0 - x_n, y_n \rangle \geq 0. \tag{B.5.4}$$

❑

12 **Théorème**

Soit T une multi-application de $X \mapsto X'$, pour qu'il existe une fonction propre convexe s.c.i., f, telle que $T \subset \partial f$, il faut il suffit que T soit cycliquement monotone.

❑

Ce théorème généralise, en quelques sortes, l'existence d'un potentiel pour une fonction à circulation conservative.

26 **Définition**

On dit qu'une multi-application T est monotone maximale si son graphe n'est pas strictement inclus dans le graphe d'une multi-application monotone.

❑

3. Certains auteurs parlent d'opérateur accrétif en encore dissipatif. Ceci est à mettre en relation avec l'hypothèse de dissipativité normale pour les lois de comportement discutées au § 5.1.4

Une multi-application monotone maximale peut être vue comme un élément maximal d'un ensemble de multi-application monotone au sens de leur inclusion en graphe dans $X \times X'$.

La propriété de maximalité des opérateurs monotones à des conséquences très intéressantes comme la suivante :

13 **Théorème**
Si T est une multi-application cycliquement monotone maximale alors il existe une fonction propre convexe s.c.i., f, telle que $T = \partial f$,

❑

Réciproquement, on a le théorème suivant :

14 **Théorème**
Si f est une fonction propre convexe s.c.i. alors ∂f est une multi-application cycliquement monotone maximale.

❑

Le théorème suivant donne une caractéristique importante des opérateurs maximaux monotones sur des espace de HILBERT que nous désignerons par H.

15 **Théorème**
Soit une multi-application $T : A \subset H \mapsto H$ maximale monotone alors l'image de A par $T + I$ est égale à H, où I est l'application identité sur H, c'est à dire

$$\forall f \in H, \exists u \in A, \text{ tel que } u + Tu = f \tag{B.5.5}$$

❑

Cette propriété très importante permet de démontrer le théorème HILLE-YOSIDA qui fournit un résultat d'existence et d'unicité au problème d'évolution $\dot{u}+Tu = f$ sur un espace de HILBERT. (*voir* (BREZIS, 1973)).

Contribution à la modélisation mécanique et numérique des édifices maçonnés

Résumé : Du point de son comportement mécanique, la maçonnerie apparaît comme un géomatériau quasi-fragile composite, caractérisé par la coexistence de trois échelles d'études (macroscopique, mésocopique et microscopique) et deux comportements intimement couplés, l'endommagement fragile et la plasticité non-associée. Suite à une revue bibliographique étendue des nombreuses modélisations déjà proposées (approche macroscopique phénoménologique, approche micromécanique, analyse multi-échelle), il semble que deux points importants restent encore difficiles à traiter : la prise en compte de la structure de l'appareil et la localisation de la déformation liée au caractère adoucissant et non-associé des comportements. Afin de répondre à ces problèmes, une modélisation micromécanique discrète dans un cadre dynamique non-régulier a été proposée. La maçonnerie est vue comme un milieu divisé composé d'une collection de corps déformables reliés par des lois non-régulières. Le modèle de base pour les joints vifs, composé du contact unilatéral et du frottement de Coulomb est enrichi pour les joints de mortier par des modèles de zone cohésive, fragile ou à endommagement progressif. Le cadre numérique de cette modélisation s'appuie sur la méthode « Non-Smooth Contact Dynamics » apte à intégrer la dynamique non-régulière en présence de contraintes unilatérales et de frottement sec. Le comportement des corps est traité par des méthodes aux éléments finis adaptées au caractère discret des structures modélisées. Les lois non-régulières d'interfaces sont résolues quant à elles par des méthodes itératives dédiées aux problèmes de complémentarité de grande taille. Enfin, une collaboration interdisciplinaire a été conduite avec les architectes et les archéologues du bâti pour mener à bien des études d'édifices monumentaux en utilisant la stéreophotogrammétrie numérique.
Mots-clés : Dynamique non-régulière, contact unilatéral, frottement de Coulomb, modèles de zone cohésive, milieux divisés, géomatériaux quasi-fragiles, maçonnerie, édifices monumentaux.

Contribution to the mechanical and numerical modelling of masonry buildings

Abstract : From a mechanical point of view, masonry appears as a composite quasi-brittle geomaterial, characterized by the coexistence of three scales of studies (macroscopic, mesoscopic and microscopic) and two closely related mechanical behaviors : the brittle damage and the non associated plasticity. After an extended review of various existing modelling (phenomenological approach, micromechanical approach and multiscale analysis), it is concluded that two major obstacles are pointed out : the influence of bond on the macroscopic mechanical response and the strain localisation. In this work, a discrete micromechanical modelling in a non-smooth dynamical framework is proposed. Masonry material is considered as a divided medium composed of a collection of deformable bodies in interaction through non-smooth interface laws. The basic model for dry joints, based on unilateral contact and dry friction, is enhanced for mortar joints by cohesive zone models, with brittle failure or continuous damage. The computational framework is based on the Non-Smooth Contact Dynamics method, designed to numerically integrate a non-smooth dynamical evolution with unilateral contact and dry friction. Finite element methods are used for non-linear behavior of each body and are modified to take into account the discrete character of the considered structure. Non-smooth interface laws are solved by means of iterative solvers dedicated to large scale complementarity problems. Finally, an interdisciplinary work has been made with architects and building archaeologists, in order to study monumental buildings in their natural context by means of numerical stereophotogrammetry.
Key words : Non-smooth dynamics, unilateral contact, Coulomb friction, Cohesive zone models, divided materials, quasi-brittle geomaterials, masonry, monumental buildings.

UNIVERSITE DE LA MEDITERRANEE AIX-MARSEILLE II