

---

# Modélisation des impacts multiples simultanés. Etude d'une chaîne de billes.

— oOo —

Vincent ACARY, Bernard Brogliato  
INRIA Rhône-Alpes, Projet BIPOP  
Vincent.Acary@inrialpes.fr

— oOo —

---

## Plan de l'exposé

- 1 – Introduction et motivations
- 2 – Etude d'une chaîne de trois billes
- 3 – Chaînes de  $n$  billes
- 4 – Conclusion et perspectives



## 1 – Introduction et motivations

1.1 – Définition

1.2 – Objectifs

1.3 – Revue des approches déjà proposées

1.4 – Approche développée

- 2 – Etude d'une chaîne de trois billes
- 3 – Chaînes de  $n$  billes
- 4 – Conclusion et perspectives

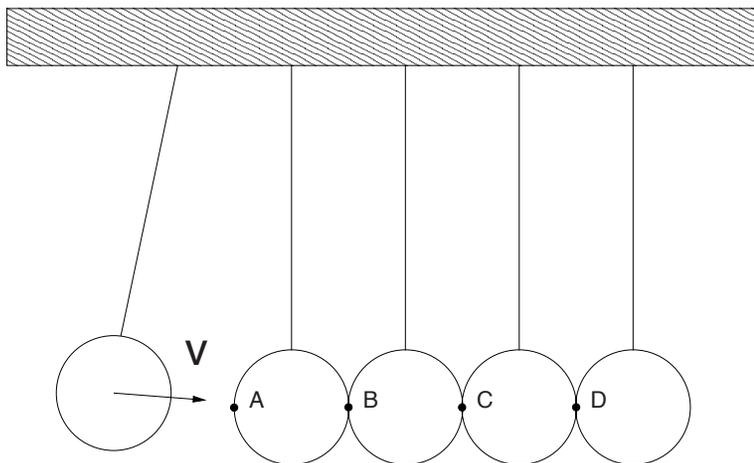
## **1 – Introduction et motivations**

### Impact Multiple simultané :

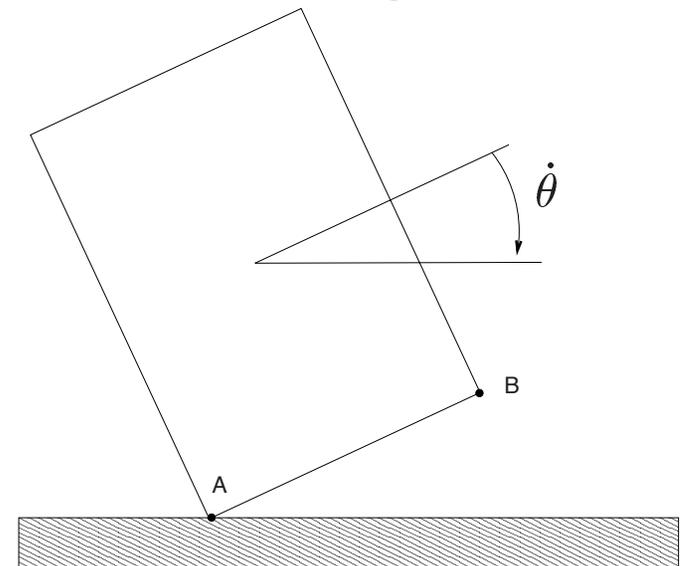
Occurrence de plusieurs impacts au même instant sur plusieurs points d'un système de solides rigides.

### Exemples classiques :

Le berceau de Newton



The rocking block



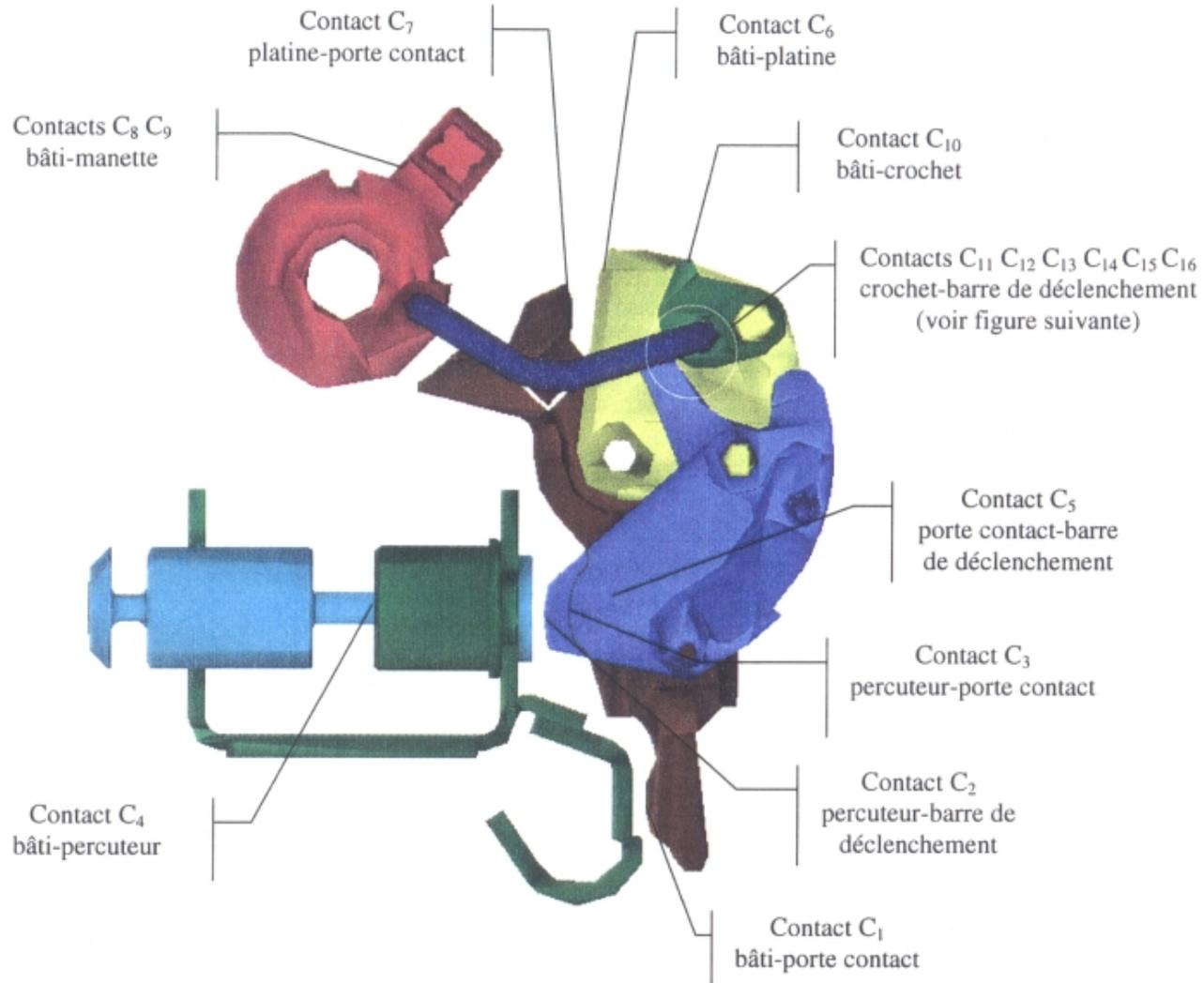
### Difficultés :

- Mise en défaut des lois de chocs classiques. ( Newton, Poisson, ... )
- Problème de continuité par rapport aux conditions initiales.

# 1 – Introduction et motivations

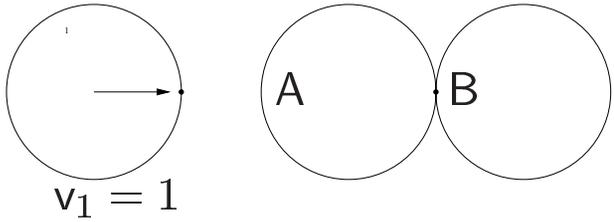
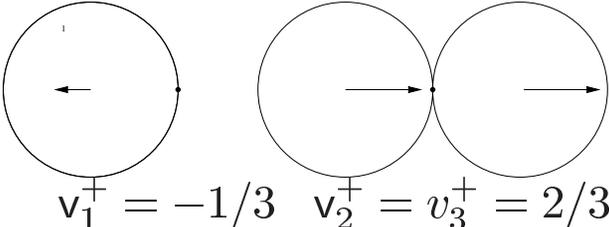
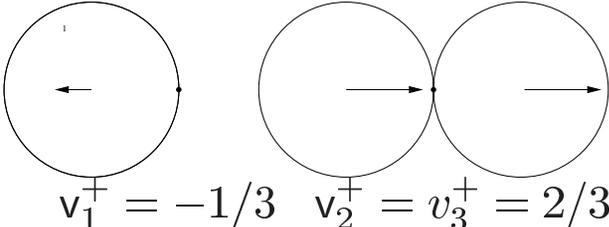
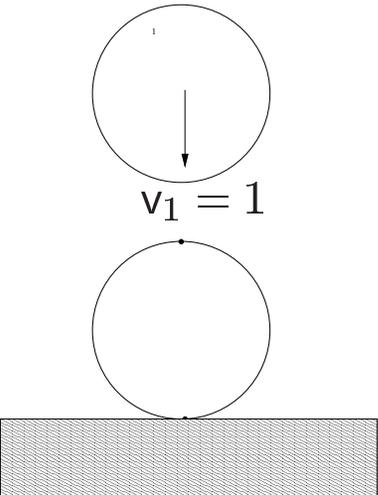
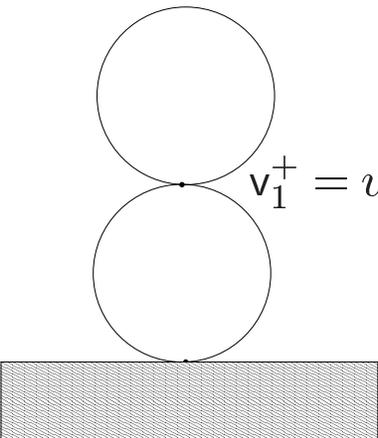
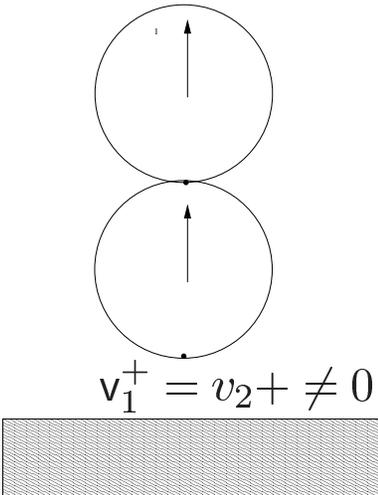
Collaboration avec Schneider Electric (M. Abadie)

Etude de la stabilité des disjoncteurs aux chocs externes.



# 1 – Introduction et motivations

## Illustrations de la mise en défaut des lois classiques

Exemples	Newton	Poisson Simultanéité des temps de compression
 <p><math>v_1 = 1</math></p>	<p><math>e_A = e_B = 1</math></p>  <p><math>v_1^+ = -1/3 \quad v_2^+ = v_3^+ = 2/3</math></p>	<p><math>e_A = e_B = 1</math></p>  <p><math>v_1^+ = -1/3 \quad v_2^+ = v_3^+ = 2/3</math></p>
 <p><math>v_1 = 1</math></p>	<p><math>e_A = 0 \quad e_B = 1</math></p>  <p><math>v_1^+ = v_2^+ = 0</math></p>	<p><math>e_A = 0 \quad e_B = 1</math></p>  <p><math>v_1^+ = v_2^+ \neq 0</math></p>

### Loi de chocs multiples :

Fonction déterminant les vitesses après impact  
à partir des vitesses avant impact et de la configuration actuelle.

$$\dot{q}^+ = \mathcal{F}(\dot{q}^-, q, t)$$

### Propriétés :

1. Fonction univoque.
2. Respect des principes de la mécanique et de la thermodynamique :
  - Equations du mouvement.
  - Contraintes unilatérales.
  - Equilibre énergétique.
3. Respect qualitatif et quantitatif des expériences d'impact multiple.
  - Paramètres mesurables par l'expérience.
  - Signification physique de paramètres
4. Traitement numérique efficace.
  - Problème de complémentarité
  - Problème optimisation sous contraintes

- Approche séquentielle [Han & Gilmore , 1993]
  - ▷ Choix heuristique des solutions.
  - ▷ Pas de garantie d'existence.
  
- Généralisation des lois classiques aux systèmes multicontraints :
  - Newton [Moreau, 1988].
  - Poisson [Glocker & Pfeiffer, 1995].
  - ▷ Algorithme numérique performant.
  - ▷ Désaccord avec l'expérience.
  
- Introduction du rapport d'impulsion [Hurmuzlu, 2001].
  - ▷ Manque de respect des principes thermomécaniques
  - ▷ Pas d'algorithme de résolution.
  
- Formulation non locale des impacts [Frémond, 1995].
  - ▷ Cadre thermo-mécanique rigoureux.
  - ▷ Signification physique des paramètres.

### □ Problématique de fond:

Tenir compte de la propagation des impacts dans une chaîne cinématique.

- Prise en compte du caractère déformable des solides.

### □ Restriction à un cas particulier : Système de solides massifs.

Cadre des hypothèses de la théorie du contact de Hertz.

- Faible importance de la vibration des solides.

- Déformation localisée dans la zone de contact.

- système de solides rigides + raideur et amortissement de contact.

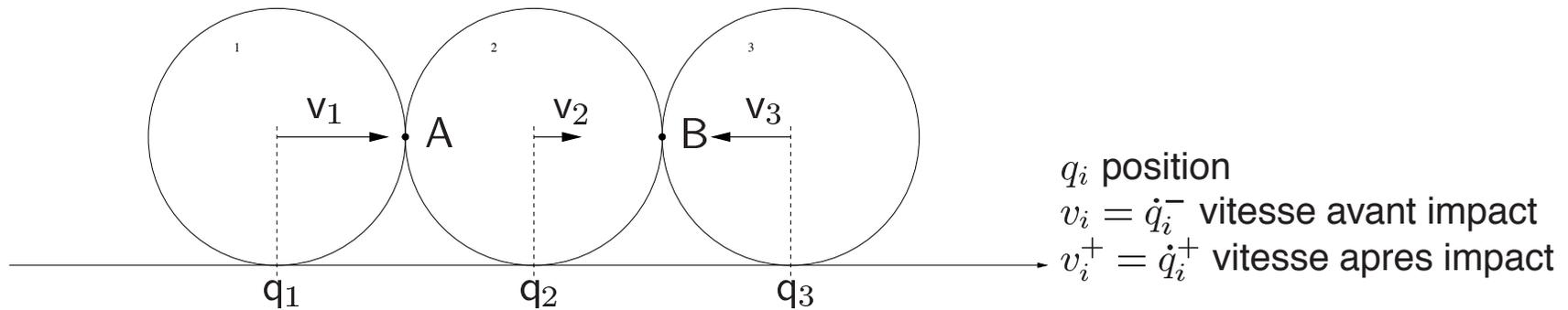
### □ Exemple particulier : la chaîne de billes.

Modélisation physique d'une chaîne de billes : [Falcon & Laroche, 1998].

- Billes : masse ponctuelle.
- Interaction : ressort et amortisseur non-linéaires de Hertz.

- ● 1 – Introduction et motivations
- ● 2 – Etude d'une chaîne de trois billes
  - 2.1 – Modèle de solides rigides
  - 2.2 – Choix d'une loi d'impact multiple
  - 2.3 – Modèle régularisé
  - 2.4 – Modèle régularisé – résultats numériques
  - 2.5 – Modèle régularisé – conclusions préliminaires
  - 2.6 – Modèle régularisé linéaire – résultat analytique
- 3 – Chaînes de  $n$  billes
- 4 – Conclusion et perspectives

## **2 – Etude d'une chaîne de trois billes**



Equation de la dynamique à l'instant d'impact ( $v_2 = 0$ ) :

$$\begin{cases} m(v_1^+ - v_1) = -p_1 \\ m(v_2^+) = p_1 - p_2 \\ m(v_3^+ - v_3) = p_2 \end{cases} \quad (1)$$

Contraintes unilatérales :

$$\begin{cases} v_1^+ \leq v_2^+ \leq v_3^+ \\ p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

□ **Loi cinématique** : 2 coefficients de Newton  $e_A, e_B$ :

□ Prédiction univoque d'un état après impact :

$$\text{pour } [v_1, v_3] = [1, 0], [v_1^+, v_2^+, v_3^+] = [-1/3, 2/3, 2/3] \quad (3)$$

□ **Loi sthénique** : 2 coefficients de Poisson  $e_A, e_B$ :

□ Même résultat avec une hypothèse supplémentaire de simultanéité des temps de compression.

*Paramètres proposés :*

- Loi énergétique globale :  $(v_1^+)^2 + (v_2^+)^2 + (v_3^+)^2 = e(v_1^2 + v_3^2)$
- Rapport d'impulsion :  $\alpha = \frac{p_1}{p_2}$

□ Description l'ensemble de vitesses admissibles après impact.

**Evaluation de  $e$  et  $\alpha$  ?**

□ Equation de la dynamique régularisée en termes d'indentation

$$\delta_i = q_{i+1} - q_i$$

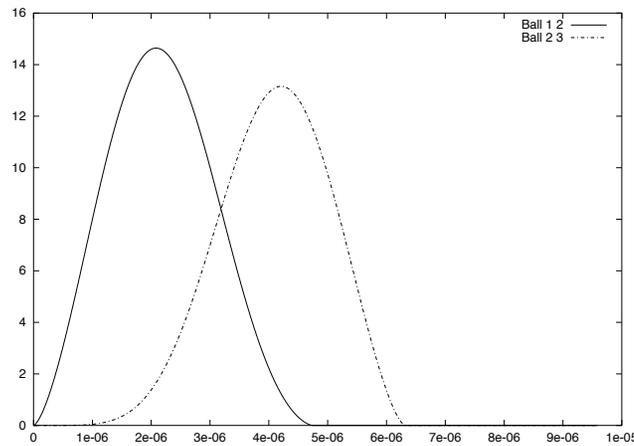
$$\begin{cases} m\ddot{\delta}_1 = -2f_1(\delta_1) + f_2(\delta_2) \\ m\ddot{\delta}_2 = -2f_2(\delta_2) + f_1(\delta_1) \\ 0 \leq \mathbf{f} \perp \mathbf{f} - \mathbf{K}(\boldsymbol{\delta}) \cdot \boldsymbol{\delta} \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

□ Raideur non-linéaire de Hertz

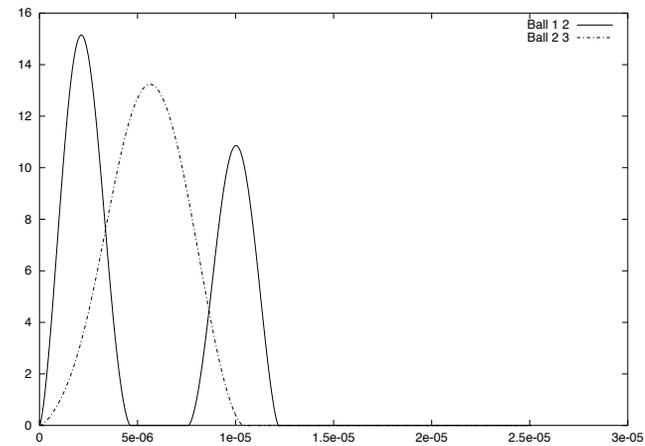
$$K(\boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} k_1 \delta_1^{1/2} & 0 \\ 0 & k_2 \delta_2^{1/2} \end{bmatrix}, \quad \kappa = \frac{k_1}{k_2} \quad (5)$$

□ Le rapport entre les impulsions est défini par :

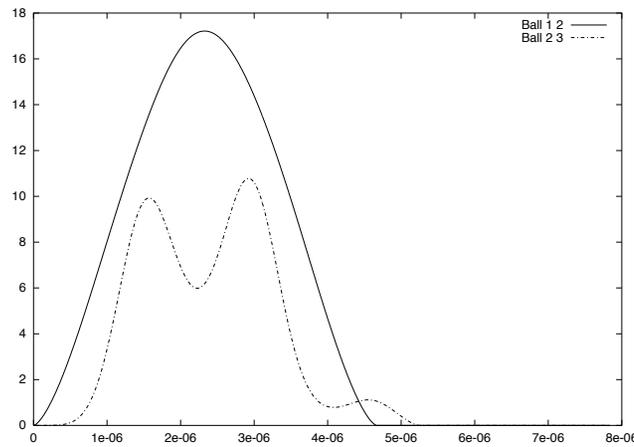
$$\alpha = \frac{\int_0^{t_f} f_1(t) dt}{\int_0^{t_f} f_2(t) dt} \quad (6)$$



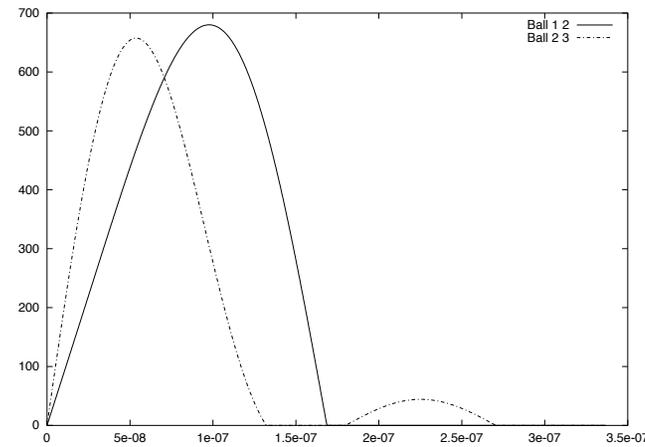
$\kappa = 1, v_1 = 1, v_3 = 0$



$\kappa = 0.1, v_1 = 1, v_3 = -1$



$\kappa = 100, v_1 = 1, v_3 = 0$



$\kappa = 2.24, v_1 = 1, v_3 = -1$

Effort de contact en fonction du temps

Tous ces processus très différents produisent un impact multiple au passage à la limite rigide  $k \rightarrow +\infty$

#### □ Remarques sur les simulations numériques :

- Aucune séquentialité ou simultanéité des efforts dans la chaîne de billes.
- Présence de plusieurs séquences de contact (micro-collisions).
- Grande dépendance aux conditions initiales.

#### □ Difficulté principale de la formulation d'une loi d'impact multiple :

Comment représenter le comportement d'un système dynamique non linéaire par une loi algébrique ?

□ Evaluation de  $e$  et  $\alpha$  à partir d'une résolution du modèle régularisé sans effort extérieur (Hypothèse de Darboux-Keller).

Nécessité de garantir l'existence de  $e$  et  $\alpha$

□ **Etude analytique** sur un modèle avec ressorts linéaires :

fréquences propres des systèmes liés :  $\omega_i, i = \{1, 2, 3, 4\}$

- Instants adimensionalisés de changements de statut de contact :

$$T = \omega_i t = f\left(\frac{\omega_i}{\omega_j}, v_i^-\right)$$

- le rapport d'impulsion

$$\alpha = f\left(\frac{\omega_i}{\omega_j}, v_i^-\right)$$

□ le rapport d'impulsion reste constant lorsque  $k \rightarrow +\infty$ .

□ le rapport d'impulsion apporte une information supplémentaire sur le comportement dynamique du système régularisé.

□ **Modèle non linéaire en loi puissance** (Hertz viscoélastique)

□ Indépendance du rapport d'impulsions aux valeurs absolues de masse et de raideur

- ● 1 – Introduction et motivations
- ● 2 – Etude d'une chaîne de trois billes
- ● 3 – Chaînes de  $n$  billes
  - 3.1 – Remarques sur les rapports d'impulsions
  - 3.2 – Resultats généraux
- 4 – Conclusion et perspectives

### 3 – Chaînes de $n$ billes

17-1

#### □ Chaîne de $n$ billes :

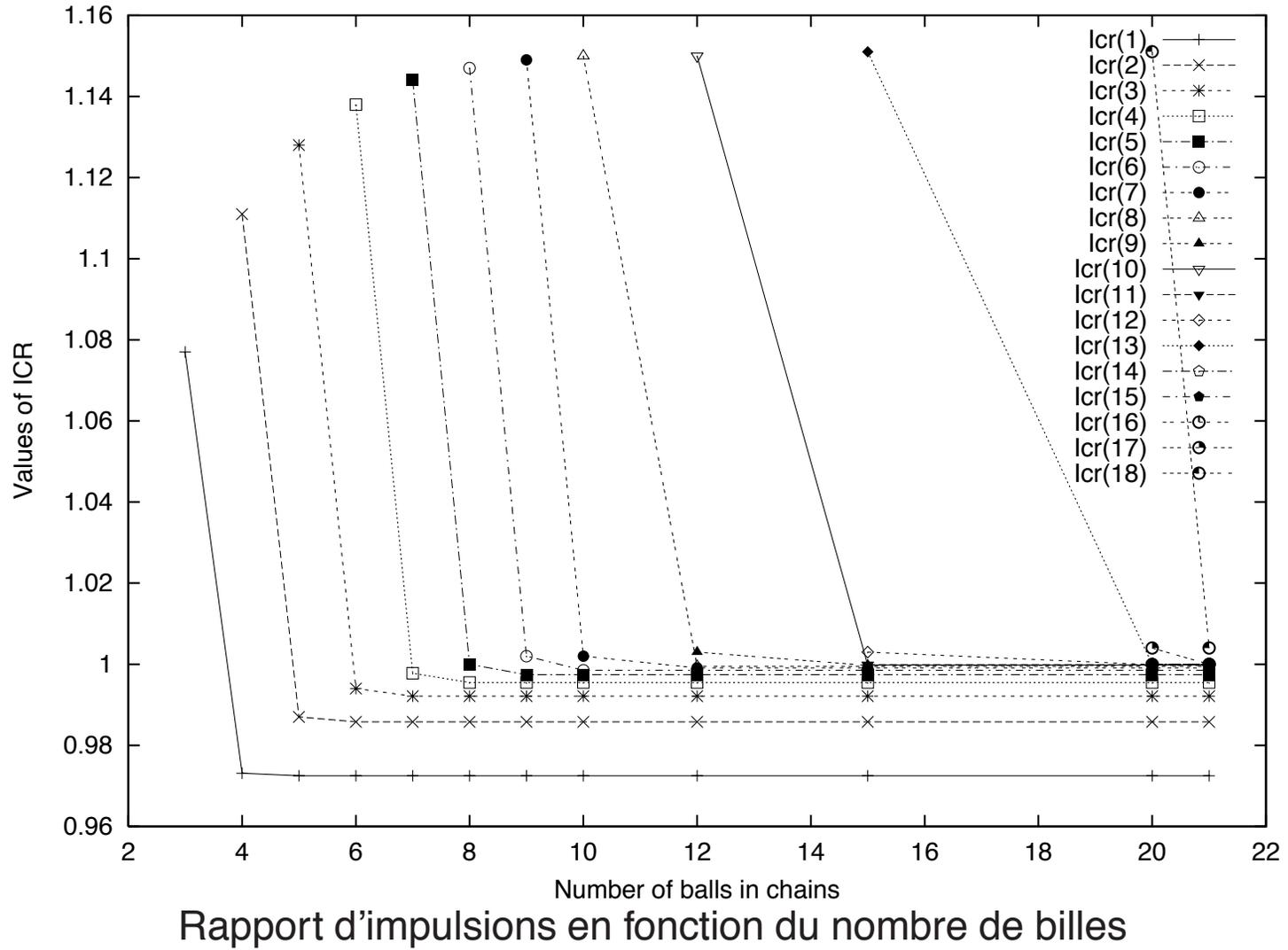
Inconnues :  $n$  vitesses,  $n - 1$  impulsions

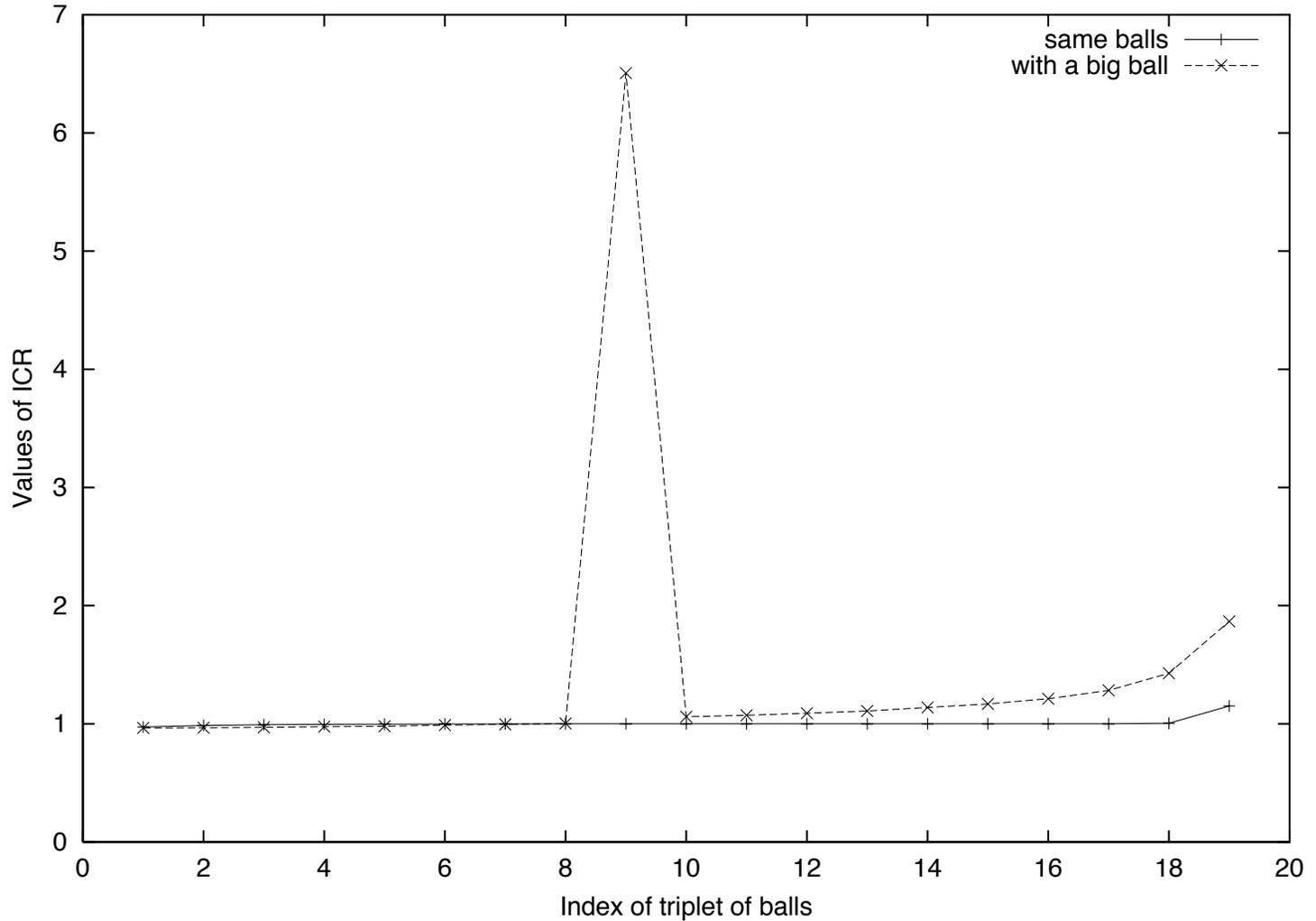
- $n$  équations de la dynamique
- 1 équation énergétique globale
- $(n - 2)$  rapports d'impulsions

□ Détermination univoque des vitesses après impact par une équation quadratique sous contraintes.

□ Les rapports d'impulsions dépendent du comportement dynamique régularisé de la chaîne entière.

□ pas de possibilité de transport de rapport d'impulsions d'un triplet de billes vers une chaîne de  $n$  billes.





Introduction d'une bille avec un rayon multiplié par 5

#### □ **Modèle de contact de Hertz viscoélastique :**

$$f = K\delta^n + C\delta^{n-1}\dot{\delta}$$

- les rapports d'impulsions sont bornés et le sous-espace de l'espace d'état

$$E = \{\delta \geq 0, \dot{\delta} \geq 0\} \tag{7}$$

est globalement attractif.

- l'amplitude des efforts entre les billes tend vers 0.
- la vitesse relative  $\dot{\delta}$  tend vers une constante.

#### □ **Modèle de contact élastique linéaire**

- les rapports d'impulsion ne dépendent que des rapports des fréquences propres des systèmes liés et des conditions initiales

- ● 1 – Introduction et motivations
  - ● 2 – Etude d'une chaîne de trois billes
  - ● 3 – Chaînes de  $n$  billes
  - ● 4 – Conclusion et perspectives
- 4.1 – Conclusions
  - 4.2 – Perspectives

## **4 – Conclusion et perspectives**

- Une équation énergétique globale + rapports d'impulsions
  - Paramétrisation des l'ensemble de vitesses admissibles après impact
  - Reproduction des expériences sur les billes.
- Prise en compte par les rapports d'impulsion :
  - de la propagation des efforts dans la chaîne
  - du comportement dynamique des système liés
- Respect des aspects qualitatifs et quantitatifs de l'impact multiple
- Evaluation numérique aisée de ces rapports d'impulsions par intégration numérique du système régularisé sans efforts extérieurs

- Formulation dans un cadre thermomécanique rigoureux
- Extension aux systèmes de liberté finie :
  - Chaîne cinématique ouverte
  - Chaîne cinématique fermée (bouclée)
- Résultats généraux en temps fini.
- Extension aux systèmes déformables
  - prise en compte du comportement vibratoire
- Question de la dépendance continue aux conditions initiales ?

- ● 1 – Introduction et motivations
- ● 2 – Etude d'une chaîne de trois billes
- ● 3 – Chaînes de  $n$  billes
- ● 4 – Conclusion et perspectives